文章编号：1000－7598－(2013) 增 2－0041－04

热-水-力共同作用下圆形洞室弹塑性解析解

张玉军[1]，张维庆[2]

（1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室，武汉 430071；2. 中铁隧道勘测设计院有限公司，天津 300133）

摘　要：基于已有的工作和 Mohr-Coulomb 屈服准则，建立了热-水-力三场共同作用下的圆形洞室弹塑性解析解，并分别在单力场、热-力场、水-力场、热-水-力场以及改变介质强度参数的条件下计算和比较了围岩中的应力分布、变化及塑性区范围。结果显示，温度场使得塑性区半径有所减小，但总的来看温度作用不明显；与仅有力作用时相比，孔隙水压力使得塑性区半径、径向应力和切向应力有较大幅度增长。

关　键　词：热-水-力共同作用；圆形洞室；弹塑性；解析解

中图分类号：TV 542; TB 115　　**文献标识码：**A

An elastoplastic analytical solution for circular cavern considering combined thermo-hydro-mechanical action

ZHANG Yu-jun[1]，ZHANG Wei-qing[2]

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering，Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China；2. China Railway Tunnel Survey & Design Institute Co., Ltd., Tianjin 300133, China）

Abstract: On the basis of the existing work and Mohr-Coulomb yield criterion, an elasto-plastic analysis solution for circular underground cavern is established considering the combined thermo-hydro-mechanical action. Under the conditions of single stress field, thermo-mechanical field, hydro-mechanical field and thermo-hydro-mechanical field and changing strength parmeters of a medium, the distribution and change of stresses and plastic zones in the surrounding rock mass are computed and compared respectively. The results show that the temperature field makes the radius of plastic zone some decrease, but the action of temperature is not obvious on the whole; compared with the action of the single stress field, the pore water pressure makes the plastic zones ,radial stresses and tangential stresses increase greatly.

Key words: combined thermo-hydro-mechanical action; circular cavern; elastoplasticity; analytical solution

1　引　言

当圆形地下洞室的埋深较大时，如果岩体为均匀连续介质且仅考虑地层的自重作用，可近似认为地下洞室所在围岩处于静水应力状态。若围岩为弹性体或弹塑性体，则可分别使用基尔西解[1]或经典的 Mohr-Coulomb 弹塑性解[2]进行应力及稳定性分析。当存在地下水时，荣传新等[3]使用 Mohr-Coulomb 准则和损伤力学理论，得出了渗流场-应力场共同作用时的解析解；黄阜等[4]采用原始的 Hoek-Brown 准则，推导了计入渗透力的圆形洞室弹塑性应力及位移表达式。若无地下水但要考虑岩体温度效应时，施毅等[5]在一定的简化和假设条件下，建立了深埋洞室岩体热-力耦合弹性应力场理论解，但岩体中应力场、渗流场和温度场共同存在且需同时考虑时相应的解析研究还很少见，与之有关白冰[6]曾针对饱和多孔介质空心圆柱的热固结问题，基于热渗效应和等温热流效应建立了相应的解析解，但其只涉及弹性问题且不能直接用于地下洞室稳定性分析。

鉴于此，笔者基于文献[3~5, 7]的工作和 Mohr-Coulomb 屈服准则，建立了热-水-力三场共同作用下的圆形洞室弹塑性解析解，并分别就单力场、热-力场、水-力场、热-水-力场以及最后一种工况中改变内摩擦角和黏聚力的条件下，计算和比较了围岩中的应力分布、变化及塑性区范围，得出了若干结

收稿日期：2013-02-25
基金项目：国家重点基础研究发展计划（973）项目资助（No.2010CB732101）；国家自然科学基金资助（No.51079145）。
第一作者简介：张玉军，男，1956 年生，博士，研究员，主要从事岩石力学与工程方面的研究。E-mail：yjzhang@whrsm.ac.cn

论。

2 圆环中热-水-力作用下的应力及塑性区

2.1 圆环的轴对称弹性应力

2.1.1 温度应力[7]

如图 1 所示，圆环中发生轴对称的变温，其引起的极坐标温度应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rt}&=-\frac{E\alpha(T_a-T_b)}{2(1-\mu)}\left[\frac{\ln\left(\frac{b}{r}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{\frac{b^2}{r^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right]\\ \sigma_{\theta t}&=-\frac{E\alpha(T_a-T_b)}{2(1-\mu)}\left[\frac{\ln\left(\frac{b}{r}\right)-1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{\frac{b^2}{r^2}+1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中：σ_{rt}、$\sigma_{\theta t}$ 分别为径向及切向应力；α、E、μ 依次为介质的线热胀系数、弹性模量和泊松系数；a、b、r 依次为圆环的内、外半径及任一点的径向坐标；T_a、T_b 分别为圆环内、外边界上的增温。

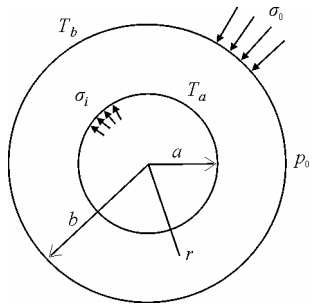


图 1 热-水-力作用下的圆环

Fig.1 Circularring under thermo-hydro-mechanical action

2.1.2 地下水渗流应力[3]

设圆环内、外边界上的孔隙水压力分别为 0 和 P_0，地下水渗流遵循达西定律，则可得由此引起的应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rh}&=p_0\left\{1+\frac{1}{2(1-\mu)}\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}+\right.\\&\qquad\left.\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)\left[1+\frac{1}{2(1-\mu)}\right]\right\}\\ \sigma_{\theta h}&=p_0\left\{1+\frac{1}{2\ln(a/b)}\left[\frac{1}{(1-\mu)}\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{2\mu-1}{1-\mu}\right]-\right.\\&\qquad\left.\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right)\left[1+\frac{1}{2(1-\mu)}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中：σ_{rh}、$\sigma_{\theta h}$ 分别为径向及切向应力。

2.1.3 边界荷载应力[7]

设圆环内、外边界上的均布荷载分别为 σ_i 和 σ_0，则可得由此引起的应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rm}&=-\frac{\frac{b^2}{r^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\sigma_i-\frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}}\sigma_0\\ \sigma_{\theta m}&=\frac{\frac{b^2}{r^2}+1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\sigma_i-\frac{1+\frac{a^2}{r^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}}\sigma_0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中：σ_{rm}、$\sigma_{\theta m}$ 分别为径向及切向应力。

2.1.4 总应力

将温度、地下水渗流应力及边界荷载产生的应力相加，可得总的弹性应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{re}&=\sigma_{rt}+\sigma_{rh}+\sigma_{rm}\\ \sigma_{\theta e}&=\sigma_{\theta t}+\sigma_{\theta h}+\sigma_{\theta m}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中：σ_{re}、$\sigma_{\theta e}$ 分别为总的径向及切向应力。

2.2 圆环的轴对称塑性区应力及半径

如图 2 所示的具有弹性区和塑性区的圆环，沿半径方向的温度分布为[5]

$$T=T_a+(T_b-T_a)\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}\tag{5}$$

则相应的温度应力为

$$p_T=E\alpha T\tag{6}$$

而孔隙水压力沿半径方向的分布规律[3]为

$$p_{\mathrm{w}}=p_0\frac{\ln(a/r)}{\ln(a/b)}\tag{7}$$

计入孔隙水压力和温度应力的贡献，可得平衡方程[3]为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\tag{8}$$

式中：$p_z=p_w+p_T$。

假定介质进入塑性状态后符合 Mohr-Coulomb 准则，即

$$\sigma_\theta-\sigma_r=\frac{2c\cos\varphi}{1-\sin\varphi}+\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\sigma_r\tag{9}$$

式中：c、φ 分别为介质的黏聚力和内摩擦角。

利用边界条件：$r=a$，$\sigma_r=p_i$，将式（9）代入式（8），求解可得塑性区径向及切向应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rp}&=\left(p_i+c\cot\varphi+\frac{p_{\mathrm{f}}(1-\sin\varphi)}{2\sin\varphi\ln(a/b)}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}-c\cot\varphi\\ \sigma_{\theta p}&=\frac{2C\cos\varphi}{1-\sin\varphi}+\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\sigma_{rp}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中：$p_{\mathrm{f}}=p_0+E\alpha(T_b-T_a)$。

令塑性区半径为 R，当 $r=R$ 时，应同时满足：

$$\sigma_{rp}+\sigma_{\theta p}=\sigma_{re}+\sigma_{\theta e}=A\tag{11}$$

以及

$$\frac{\sigma_{\theta p}-\sigma_{rp}}{\sigma_{\theta p}+\sigma_{rp}+2c\cot\varphi}=\sin\varphi\tag{12}$$

联立式（9）和式（12），可得

$$\sigma_{rp}=\frac{A}{2}-\left(\frac{A}{2}+c\cot\varphi\right)\sin\varphi\tag{13}$$

将式（13）代入式（10）有

$$\frac{A}{2}-\left(\frac{A}{2}+c\cot\varphi\right)\sin\varphi=\left(p_i+c\cot\varphi+\frac{p_f(1-\sin\varphi)}{2\sin\varphi\ln(a/b)}\right)\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{2\sin\phi}{1-\sin\phi}}-c\cot\varphi\tag{14}$$

因式（14）中 A 也是 R 的函数，故该式中塑性区半径 R 需用试算法求解。其作法为：先假定一个 R 的初值 R_i（其值大于 a），再由章节 2.1 中的有关公式算出 $r=R_i$ 处相应的温度应力、地下水渗流应力和边界荷载应力，将其迭加得出近似的弹、塑性区边界处的 σ_{re}、$\sigma_{\theta e}$ 及 A，然后，将 A 代入式（14），如其等号两侧数值结果之差小于给定的精度，则停止计算，此时的 R_i 就是所要求的塑性区半径，否则根据本次试算结果调整 R_i 再进行上述试算，直到满足精度要求。

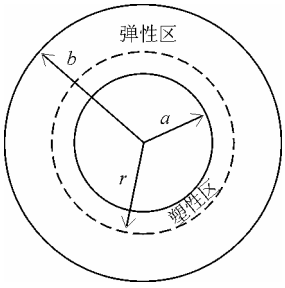


图 2　具有弹性区和塑性区的圆环

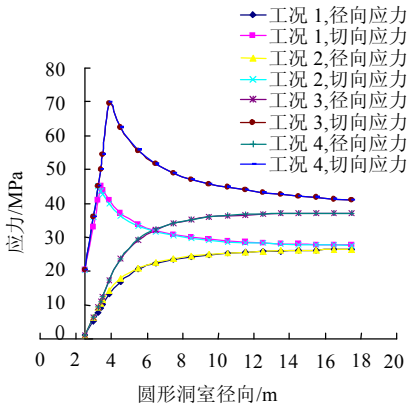
Fig.2　Circular ring with elastic and plastic zones

3　算　例

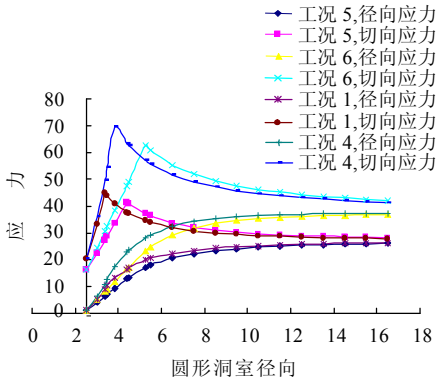
假定有一圆形洞室，其半径 a = 2.5 m，取 b = 10a。岩体的弹性模量、泊松系数和线热胀系数依次为 E = 3 700 MPa，μ = 0.25，$\alpha=10\times10^{-6}$ 1/℃。洞室围岩内、外边界上增温 T_a = 30 ℃，T_b = 90 ℃。孔隙水压力为 0，P_0 = 10 MPa；均布荷载分别为 p_i =σ_i =1.0 MPa，σ_0 = 26.7 MPa。取岩体的黏聚力和内摩擦角为 2 组值，即 c = 5 MPa，φ = 30°；c = 5 MPa，φ = 20°。

设有 6 种工况：（1）仅有力的作用；（2）热-力共同作用；（3）水-力共同作用；（4）水-热-力共同作用；（5）水-热-力共同作用；（6）仅有力的作用。前 4 种工况使用第 1 组黏聚力和内摩擦角值及其他参数值，第 5、6 种工况使用第 2 组黏聚力和内摩擦角值与其他参数值。

计算结果见图 3 及表 1。图 3 中切向应力的峰值位置即为塑性区半径，表 1 中，M、T-M、H-M、T-H-M 依次表示仅有力的作用、热-力共同作用、水-力共同作用、水-热-力共同作用；上标“1”、“2”分别表示第 1、2 组黏聚力和内摩擦角值。



(a) 工况 1～4



(b) 工况 1、4～6

图 3　围岩中应力分布

Fig.3　Stress distributions in the surrounding rock mass for of cases

表 1 6 种工况的塑性区半径及该处应力

Table 1 Radii of plastic zones and stresses at the radial end points

工况	塑性区半径 R/m	径向应力 σ_r / MPa	切向应力 σ_θ / MPa	备注
1	3.382	9.02	45.04	M[1]
2	3.251	9.21	45.02	T-M[1]
3	3.852	17.29	69.79	H-M[1]
4	3.850	17.32	69.59	T-H-M[1]
5	5.269	23.25	62.50	T-H-M[2]
6	4.413	12.87	41.41	M[2]

由图 3 和表 1 看出，对于使用第 1 组黏聚力和内摩擦角（高值）的工况，相比于仅有力作用时的塑性区半径、以及该处的径向应力和切向应力，当热−力共同作用时塑性区半径和切向应力有所减小，而径向应力有所增加，但幅度不大；当水−力共同作用时，塑性区半径和径向、切向应力均有明显增加，其增幅约分别达 14%、92%和 55%；当水−热−力共同作用时，则在水−力共同作用结果的基础上呈现了工况 2 的效应。而对于使用第 2 组黏聚力和内摩擦角（低值）的工况 5（水−热−力共同作用）与类似的工况 4 相比，塑性区半径和径向应力有较大增长，而切向应力有明显下降；工况 5、6 的变化规律与工况 4、1 相同。这表明，在本文特定的计算条件下，温度场对切向应力和径向应力分别有轻微的减载和加载作用，其综合效果使得塑性区半径有所减小，但总的来看温度作用不明显；而孔隙水压力的作用相当显著，与仅有力作用时相比，孔隙水压力使得塑性区半径、径向应力和切向应力有较大幅度增长；当介质强度参数（c、φ 值）降低时，水−热−力共同作用和仅有力的作用相比，塑性区及其应力表现了同样的变化规律。

4 结 语

在已有工作和使用 Mohr-Coulomb 屈服准则的基础上，推导得出了同时考虑温度场、渗流场和应力场作用下的圆形洞室弹塑性应力及塑性区的解析表达式，其中塑性区为应力的非线性函数，其要用试算法求解。分别在不同的力、热、水场的组合及改变围岩介质强度参数（c、φ 值）的条件下，计算和比较了围岩中的应力和塑性区的分布及变化。结果表明，当使用本文的计算参数时，温度场使得塑性区半径有所减小，但总的来看温度作用不明显，与仅有力作用时相比，孔隙水压力使得塑性区半径、径向应力和切向应力有较大幅度增长；若介质强度参数降低，则无论是力单场作用还是水、热、力多场作用，塑性区及其中的径向应力均增加，而切向应力降低。

参 考 文 献

[1] 卡斯特奈. 隧道与坑道静力学[M]. 同济大学译. 上海: 科学技术出版社, 1980: 46－54.

[2] 王建宇. 喷锚支护原理和设计[M]. 北京: 中国铁道出版社，1980: 135－144.

[3] 荣传新, 程桦. 地下水渗流对巷道围岩稳定性影响的理论解[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 741－744.

RONG Chuan-xin, CHENG Hua. Stability analysis of rocks around tunnel with ground water permeation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(5): 741－744.

[4] 黄阜, 杨小礼. 考虑渗透力和原始 Hoek-Brown 屈服准则时圆形洞室解析解[J]. 岩土力学，2010，31(5)：1627－1632.

HUANG Fu, YANG Xiao-li. Analytical solution of circular openings subjected to seepage in Hoek-Brown media[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(5): 1627－1632.

[5] 施毅, 朱珍德. 李志敬. 考虑温度效应时深埋洞室围岩变形特性[J]. 水利水电科技进展, 2008, 28(3): 33－36.

SHI Yi, ZHU Zhen-de, LI Zhi-jing. Deformation characteristics of deep-buried caverns considering thermal effect[J]. **Advances in Science and Technology of Water Resources**, 2008, 28(3): 33－36.

[6] 白冰. 空心圆柱饱和多孔介质热固结问题的解析解[J]. 岩土力学, 2011, 32(10): 2901－2916.

BAI Bing. Analytical solutions of thermal consolidation for a hollow cylinder saturated porous medium[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(10): 2901－2916.

[7] 徐芝纶. 弹性力学(上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980，152－184.