

表面源激发的瑞利波传播特性分析

柴华友¹, 柯文汇^{2,3}, 黄祥国², 李忠超², 李天祥²

(1. 武汉工程大学 资源与土木工程学院, 湖北 武汉 430073; 2. 武汉市市政建设集团有限公司, 湖北 武汉 430023;
3. 清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 自由状态下层状介质中平面瑞利波相速度与频率及层状介质特性参数有关, 表面源激发的瑞利波以柱面波阵面传播, 传播速度不仅与频率有关, 而且还与传播距离有关, 这样, 自由状态下层状介质中平面瑞利波传播特性理论不能有效地用于激发瑞利波相速度分析。以薄层法得到的圆盘状表面垂直源激发瑞利波位移响应为基础, 导出激发瑞利波相速度, 比较激发模态与简正模态相速度差异, 分析激发模态空间特性, 揭示这种空间特性形成机制。结果表明: 源对激发模态传播影响距离不超过一个波长, 波场距源越近, 激发模态竖直振动传播速度越低; 在多模波场, 激发模态间相长相干或相消相干导致表观相速度具有较明显的空间特性。该研究可为发展考虑瑞利波频率及空间特性反演数学模型及算法提供指导。

关 键 词: 薄层法; 主动源; 瑞利波; 频散特性; 空间特性

中图分类号: O 451

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 02-0325-09

Analysis of propagation behavior of Rayleigh waves activated by surface sources

CHAI Hua-you¹, KE Wen-hui^{2,3}, HUANG Xiang-guo², LI Zhong-chao², LI Tian-xiang²

(1. School of Resources and Civil Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan, Hubei 430073, China;

2. Wuhan Municipal Construction Group Co., Ltd., Wuhan, Hubei 430023, China;

3. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In the free state, the phase velocity of the planar Rayleigh waves in layered media is related to the frequency and the material properties of media. Rayleigh waves activated by the surface sources propagate with cylindrical wave-fronts. The phase velocity is related to the travelling distance as well as the frequency. Thus, without taking the spatial behavior into consideration, the theory of the planar Rayleigh waves in layered media can not be appropriately applied to analyzing the propagation behavior of the activated Rayleigh waves. Based on the displacement of Rayleigh waves obtained by the thin layer method for the disk-like vertical surface sources, the phase velocities of the activated Rayleigh waves are derived. The difference between the activated and the normal Rayleigh waves is compared. The spatial behavior of activated modes is analyzed and its mechanism is investigated. The results show that the effect of sources on the spatial behavior of activated modes is confined within the wave field about one wavelength from the sources. The nearer the wave field is, the slower the phase velocity of vertical vibration is. In the wave field with multiple activated modes, the spatial behavior of apparent phase velocity is obvious due to the constructive and destructive interferences of these modes. The study results can provide some guidelines for developing new inverse mathematical models and algorithms which could include both the frequency behavior and the spatial behavior.

Keywords: thin layer method; active source; Rayleigh waves; dispersion behavior; spatial behavior

1 引 言

自由状态下层状介质中瑞利波频率特性研究常基于平面波阵面假设^[1-4], 在这种假设下, 瑞利波各模态 (称之简正模态) 只与频率 (波长) 及介质参数有关, 不随传播距离变化。

在表面波测试中, 瑞利波场要通过各式各样的源来激发, 一般称自然微动 (如风、波浪等) 或背景噪音 (如人类各种自然活动) 为被动源^[5-7], 而激发能量及频率成份可人为操控的各种源 (如锤击、落重、爆炸等) 为主动源^[8]。这两种不同形式源应用范围不同。对被动源, 由于源位置不确定, 瑞利

收稿日期: 2015-07-27

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (No. 41474113); 武汉工程大学人才专项经费资助项目; 湖北省建设科技计划项目 (2016)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(41474113), the Talent Project of Wuhan Institute of Technology and the Plan Project of Construction Science and Technology of Hubei Province (2016).

第一作者简介: 柴华友, 男, 1965年生, 博士, 武汉工程大学特聘教授, 主要从事多相介质动力响应及波动特性研究。E-mail: chy_rsm@hotmail.com

波传播方向不确定,一般要采用圆形测点布置来获取频散数据。对自然微动或脉动,由于其频率很低,频散主要反映数百米以下土层信息。在岩土工程或工程地球物理勘探中,往往更关注数十米以内地质分层信息。主动源可以将频率控制在数赫兹至数千赫兹,成为工程勘探首选振源。在主动源激发的表面波场,当波传播距离相对波长较小,源对波场影响较大,一般称这个影响区域为近场^[8-9]。源对近场主要影响有:①表面波场含体波成分(包括直达体波及层面反射波),由表面质点响应得到的频散数据夹杂着体波影响,不完全对应于瑞利波频散数据;②激发的瑞利波各模态(为了便于区别自由状态下的简正模态,这里简称激发模态)以柱状波阵面由振源往外传播,同时介质受外部荷载扰动,这种扰动随传播距离增加而逐渐减小,激发模态传播特性也会随传播距离变化,即激发模态不仅具有介质分层导致的频散特性而且还具有随传播距离变化的空间特性。这样,自由层状介质中瑞利波传播理论不再适用于激发瑞利波分析^[10-11]。一些研究聚焦于体波影响范围、程度以及消除这种影响测点布置及数据筛选方法^[12-15],但忽略了激发瑞利波与简正瑞利波传播特性差异,空间特性易被误作频率特性,这会导致土参数反演计算误差甚至错误。为了提高测试频散数据的解释精度,针对激发瑞利波,需构建同时考虑瑞利波频率特性及空间特性的反演模型及算法。

为了研究激发瑞利波传播特性,本文将层状半无限体截断,在截断处施加刚性基,然后用薄层对层状介质离散,由模态叠加法得到圆盘状竖直面源下层状介质瑞利波位移解,以此为基础导出激发模态相速度表达式;分析激发模态与简正模态传播特性间差异及这种差异形成机制;分析多模波场中模态间相互作用以及其对表观相速度影响。

2 简正模态传播特性薄层分析法

自由层状介质中以平面瑞利波传播特性研究

$$C_j = \begin{bmatrix} \frac{\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{3} & -\frac{\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{6} \\ \frac{\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{6} & \frac{\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{3} \\ \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{3} & -\frac{(\lambda_j + 2\mu_j)}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{6} \\ -\frac{(\lambda_j + 2\mu_j)}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{6} & \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{h_j} - \frac{\rho_j h_j \omega^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xj} & 0 \\ 0 & C_{zj} \end{bmatrix} \quad (4)$$

常采用传递矩阵方法。利用自由边界及半无限体远处位移为0条件,由传递矩阵得到频率方程,对频率方程进行根搜索,得到分析频率范围所有简正模态频散曲线。然而,传递矩阵元素含与波数 k 及层厚 d 有关的指数函数 $\exp(\pm i k d)$,这种超越函数不利于矩阵运算及求解,求解时数值精度损失较大^[3-4,16]。刚度矩阵方法也是常用的一种分析方法,相对于传递矩阵,总刚度矩阵是对称的,但矩阵元素仍含波数的超越函数,矩阵运算及行列式求解繁琐性、困难性没有根本改善。

将分层介质离散成薄层单元,当薄层厚度相对研究波长很小时(譬如 $1/8 \sim 1/10$ 波长),如图1所示,薄层内位移可以用薄层面位移线性插值。利用虚功原理,得到薄层刚度矩阵,矩阵元素是波数的代数多项式,将波数从元素中分离出来,第 j 薄层刚度矩阵可用波数二次多项式表示^[17-18]为

$$K_j = A_j k^2 + B_j k + C_j \quad (1)$$

式中: $C_j = G_j - \omega^2 M_j$, k 和 ω 分别为波数及角频率。若薄层位移矢量不是以薄层面位移排列,而是以层自由度排列,即先层面水平位移后层面竖直接位移排列,第 j 层的子矩阵 A_j 、 B_j 、 C_j 元素如下,矩阵元素仅是薄层材料特性及频率代数式。

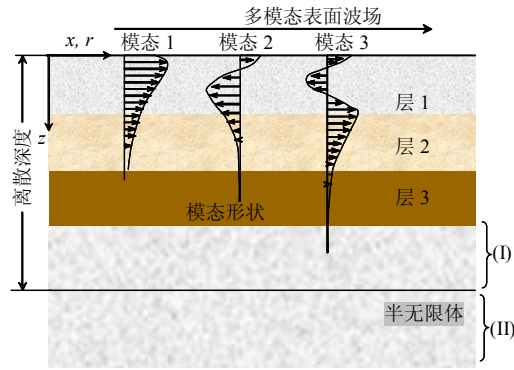
$$A_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda_j + 2\mu_j) & \lambda_j + 2\mu_j & & \\ \lambda_j + 2\mu_j & 2(\lambda_j + 2\mu_j) & & \\ & & 2\mu_j & \mu_j \\ & & \mu_j & 2\mu_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xj} & 0 \\ 0 & A_{zj} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & -(\lambda_j - \mu_j) & (\lambda_j + \mu_j) \\ & & -(\lambda_j + \mu_j) & (\lambda_j - \mu_j) \\ -(\lambda_j - \mu_j) & -(\lambda_j + \mu_j) & & \\ (\lambda_j + \mu_j) & (\lambda_j - \mu_j) & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_{xj} \\ B_{xj}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

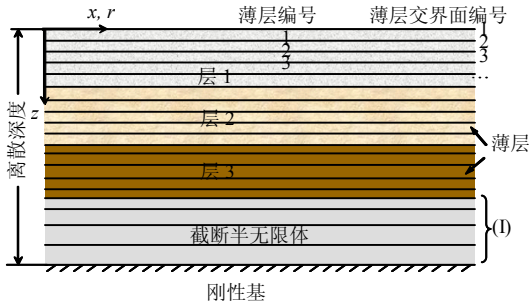
$$\mathbf{G}_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} \mu_j & -\mu_j & & \\ -\mu_j & \mu_j & & \\ & & \lambda_j + 2\mu_j & -(\lambda_j + 2\mu_j) \\ & & -(\lambda_j + 2\mu_j) & \lambda_j + 2\mu_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_j = \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中：\$\rho_j\$、\$h_j\$、\$\lambda_j\$ 及 \$\mu_j\$ 分别为第 \$j\$ 薄层密度、厚度及拉梅常数。



(a) 半无限体截断



(b) 薄层单元

图 1 层状半无限体离散

Fig.1 Discretization of layered half spaces

虽然薄层刚度矩阵具有波数二次多项式，但由于薄层下方半无限体刚度矩阵元素含复杂的有理式，总刚度矩阵仍不具有式 (1) 所示的简洁表达形式。将底部半无限体分成 I 和 II 两部分，确保 I 厚度相对波长较大，对 I 部分仍进行薄层离散。由于表面源激发瑞利波能量在底部半无限体随深度快速衰减，在 I、II 交界处趋于 0，在 I 与 II 交界处施加人工刚性基不影响瑞利波传播特性及瑞利波响应，此外，表面源激发的体波能量因几何扩散，在刚性基位置很微弱，其反射波也很微弱，不影响表面波场（或者近表面波场），此时，刚性基层状介质形

同于层状半无限体^[19-20]。由于刚性基位移为 0，删去总刚度矩阵中最后两行、列，总刚度矩阵可写成

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k^2 \tilde{\mathbf{A}}_x + \tilde{\mathbf{C}}_x & k \tilde{\mathbf{B}}_{xz} \\ k \tilde{\mathbf{B}}_{xz}^T & k^2 \tilde{\mathbf{A}}_z + \tilde{\mathbf{C}}_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中：\$\tilde{\mathbf{A}}_x\$、\$\tilde{\mathbf{A}}_z\$、\$\tilde{\mathbf{C}}_x\$、\$\tilde{\mathbf{C}}_z\$ 和 \$\tilde{\mathbf{B}}_{xz}\$ 为薄层相应子矩阵集成。

由式 (7)，自由状态下外力矢量与位移矢量关系可改写为

$$\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_x & \tilde{\mathbf{B}}_{xz} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_z \end{bmatrix} + \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_x & 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_{xz}^T & \tilde{\mathbf{C}}_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} k \tilde{\phi}_x \\ \tilde{\phi}_z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}} \quad (8)$$

式中水平及竖直位移矢量为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_x = [u_{x,1}, u_{x,2}, \dots, u_{x,N-1}, u_{x,N}]^T \\ \tilde{\phi}_z = i[u_{z,1}, u_{z,2}, \dots, u_{z,N-1}, u_{z,N}]^T \end{cases} \quad (9)$$

式中：\$i = \sqrt{-1}\$；\$N\$ 为薄层总数，层及层面编号见图 1。式 (8) 矩阵元素为代数，特征值及特征向量可以用矩阵分解方法得到，譬如，QR 分解方法，从而避免根搜索方法收敛性差问题^[21-23]。式 (8) 有 \$2N\$ 特征值 \$1/k^2\$，共有 \$4N\$ 波数，其中一半代表由中心向外传播的前行波（沿 \$+x\$ 方向），另一半代表由水平无穷远处向中心传播的反射波（沿 \$-x\$ 方向），这部分波不需考虑。\$2N\$ 模态中一部分模态位移幅值在截断半无限体 I 不随深度衰减，到达刚性基之前不趋于 0，但在刚性基处被截断，这些模态对应于 P-SV 体波，另一部分模态位移在截断半无限体中沿深度衰减，在刚性基处趋于 0，它们对应于瑞利波不同模态，根据这一特点，筛选出与瑞利波对应的波数，由波数可得到相速度，由相应特征向量得到水平及竖直模态形状。

分层介质中瑞利波模态数量与频率及分层介质特性参数有关，简谐荷载下层状介质瑞利波响应由这些模态响应叠加而成，而体波分量可看作由无穷多个 P-SV 波模态响应叠加。当分层介质被离散成薄层后，无穷多自由度变成有限个自由度。按前面所述的刚性基设置及薄层离散原则，可确保瑞利波模态数量及传播特性受离散化影响很小，但对体波分量，无穷多 P-SV 模态用数量有限 P-SV 模态代替，会引入截断误差，离刚性基越近，误差越大，但对近表面波场，如前所述，截断误差可以忽略。

薄层法仅在深度方向对层状介质离散，保持了波在水平传播方向连续性，特别适合瑞利波传播特性及动力响应研究。相对全离散的有限元方法，这种半离散的方法具有较高的计算效率及精度。

3 表面主动源激发瑞利波波场

主动源激发的表面波场如图 2 所示。

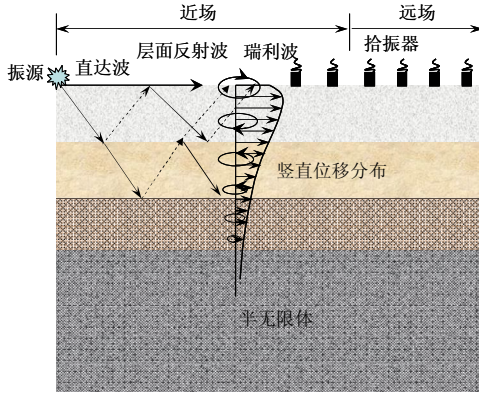


图 2 层状介质中表面源激发的波场
Fig.2 Wave fields activated by surface sources in layered media

按第 2 节方法对分层介质薄层离散后, 利用模态叠加法, 可以得到表面主动源激发波位移响应, 这里只考虑波场中瑞利波成份。对幅值为 q 作用于半径 R 的圆形区域表面竖直向简谐荷载, 距源中心 r 处第 n 个薄层面竖直向及径向瑞利波位移为^[18]

$$\begin{cases} u_z^n(r, \omega) \\ u_r^n(r, \omega) \end{cases} = -\frac{iqR\pi}{2} \begin{cases} \sum_{m=1}^{M(\omega)} (\phi_z^{nm})^2 J_1(k_m R) H_0^{(2)}(k_m r) / k_m \\ \sum_{m=1}^{M(\omega)} \phi_x^{nm} \phi_z^{nm} J_1(k_m R) H_1^{(2)}(k_m r) / k_m \end{cases} \quad r \geq R \quad (10)$$

式中: $M(\omega)$ 为瑞利波简正模态数量; k_m 为第 m 阶简正模态波数; ϕ_x^{nm} 和 ϕ_z^{nm} 分别为第 m 阶模态水平向及竖直向标准化振型 (即位移随深度变化) 在第 n 薄层面的值; $J_1(k_m R)$ 为第 1 阶第 1 类 Bessel 函数; $H_j^{(2)}(k_m r)$ ($j=0,1$) 为第 j 阶第 2 类 Hankel 函数:

$$H_j^{(2)}(k_m r) = J_j(k_m r) - iY_j(k_m r) \quad (11)$$

式中: $J_j(k_m r)$ 及 $Y_j(k_m r)$ 分别为第 j 阶第 1 类和第 2 类 Bessel 函数。

由式 (10)、(11) 可知, 瑞利波响应可分成实部 A_R 和虚部 A_I 两部分^[10-11], 相位谱为

$$\varphi(r, \omega) = \arctan(A_I / A_R) \quad (12)$$

瑞利波模态相互叠加后表观相速度可从相位谱得到

$$c = \omega / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (13)$$

由于表面波场存在直达波及分层界面处反射体波, 瑞利波场会受到这些波干扰。用实部及虚部增量 ΔA_R 及 ΔA_I 表示体波对瑞利波波场扰动, 扰动后相位谱可写为

$$\hat{\varphi}(r, \omega) = \arctan[(A_I + \Delta A_I) / (A_R + \Delta A_R)] \quad (14)$$

这样, 由式 (13) 计算的相速度也会发生扰动。均匀半无限体中瑞利波只有一个模态, 简正瑞利波相速度不随频率变化, 以此为例来分析体波对计算相速度扰动程度。图 3 为某一时刻表面荷载激发波场质点速度矢量幅值等值线图, 可以看出沿表面传播的波除了有瑞利波外还有直达体波或擦射波。在直达体波干扰下, 由表面响应相位谱计算的相速度会发生扰动, 不同泊松比情况下计算的无量纲相速度 c/c_R 随无量纲传播距离 r/λ_R 的变化如图 4 所示, 图中 c_R 和 λ_R 分别为半无限体中简正瑞利波相速度及波长, 实线对应于无体波干扰的激发瑞利波相速度。由图可以看出相速度计算值出现振荡, 这是由于直达体波在不同位置与瑞利波相长相干或相消相干所致。表面波场中直达体波与瑞利波竖直向质点速度如图 5 所示, 虽然直达体波相对于瑞利波能量很小, 但其对质点振动相位扰动较大, 由式 (14) 计算相速度扰动也较大。泊松比越大, 表面波场中直达波能量越大, 振荡越明显。由于直达体波几何衰减快于瑞利波, 对相速度扰动程度随传播距离增加逐渐递减。至于分层介质, 表面波场不仅受直达波影响, 而且还受层面反射波干扰, 直达波及层面反射波在表面波场能量与分层剖面刚度、厚度有关^[10]。要降低直达波及层面反射波干扰影响需对计算相速度进行筛选^[15]。

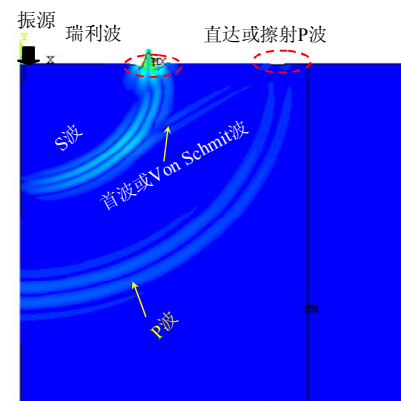


图 3 半无限体中表面源激发波场质点速度幅值等值线图
Fig.3 Contour image of amplitudes of particle velocities of waves activated by the surface source in a homogenous half space

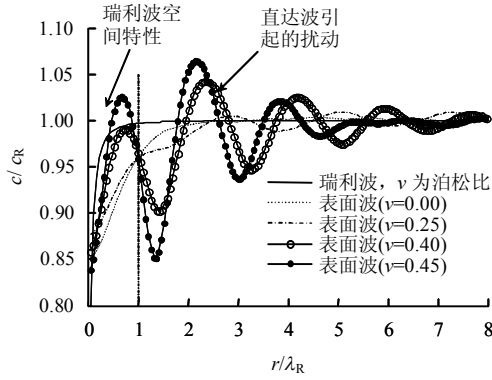


图4 半无限体中直达体波对计算相速度扰动

Fig.4 Computed phase velocities disturbed by direct body waves in homogenous half spaces

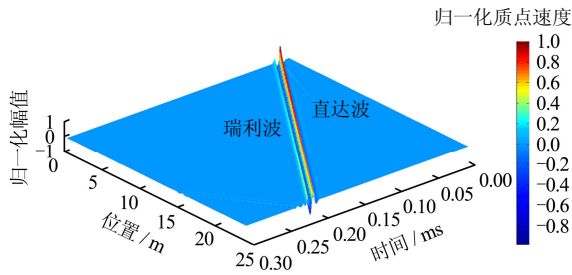


图5 半无限体中瑞利波与直达波竖直向质点速度

Fig.5 Vertical particle velocities of Rayleigh waves and direct body waves in homogenous half spaces

对时间-空间域波场质点响应作傅里叶变换得到频率-波数域振幅谱,不同能量极值迹线对应不同激发模态^[24-26]。由于直达体波及分层反射体波与瑞利波传播特性不同,在频率-波数域体波与瑞利波能量极值迹线不同,两者易于区别、分离,由瑞利波迹线对应的频率和波数可得瑞利波相速度。相对于以上由表面质点振动相位分析,对频率-波数域能量分析可以有效降低体波干扰。

4 激发瑞利波传播特性

4.1 表观相速度

取 $n=1$, 由式 (10) 得到瑞利波竖直向表面位移。由于材料阻尼对瑞利波相速度影响很小^[11], 当不考虑材料阻尼时, 波数及模态振型 ϕ_z^{lm} 是实数。将位移用实部及虚部表示, 由式 (12) 得到相位角, 利用 Bessel 及 Hankel 函数一些性质, 由式 (13) 可得多模波场表观相速度^[10, 22]为

$$c_z(r, \omega) = \frac{\sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \hat{B}_{lm} [Y_0(k_l r) Y_0(k_m r) + J_0(k_l r) J_0(k_m r)]}{\sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \hat{B}_{lm} c_m^{-1} [Y_0(k_l r) J_1(k_m r) - J_0(k_l r) Y_1(k_m r)]} \quad (15)$$

式中: $\hat{B}_{lm} = (\phi_z^{ll} \phi_z^{lm})^2 (k_l k_m)^{-1} J_1(k_l R) J_1(k_m R)$; c_m 为第 m 阶简正模态相速度; k_l 和 k_m 分别为第 l 阶和第 m 阶简正模态波数。

在远场, 即 $r/\lambda_m \gg 1$, 这里 λ_m 为第 m 阶简正模态波长, $J_j(k_m r)$ 及 $Y_j(k_m r)$ ($j = 0, 1$) 近似表达式为

$$\left. \begin{aligned} J_j(k_m r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \cos\left(k_m r - \frac{\pi}{4} - \frac{j}{2} \pi\right) \\ Y_j(k_m r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \sin\left(k_m r - \frac{\pi}{4} - \frac{j}{2} \pi\right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这样, 在远场, 式 (15) 可进一步简化为

$$c_z(r, \omega) \approx \frac{\omega \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M B_{lm} \cos[(k_l - k_m) r]}{\sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M B_{lm} k_m \cos[(k_l - k_m) r]} = \frac{\sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M B_{lm} \cos[(k_l - k_m) r]}{\sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M B_{lm} c_m^{-1} \cos[(k_l - k_m) r]} \quad (17)$$

式中: $B_{lm} = (k_l k_m)^{-1/2} \hat{B}_{lm}$; $(k_l - k_m) r$ 表示在距源中心 r 处第 l 阶和第 m 阶模态间相位差, 当 $(k_l - k_m) r \rightarrow n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\cos[(k_l - k_m) r] \rightarrow \pm 1$, 两模态相长或相消相干。因此, 式 (17) 揭示了模态相互作用对表观相速度的影响。

4.2 激发模态相速度

由式 (10) 可以看出, 瑞利波响应是由各模态叠加而成, 模态传播特性互不影响, 取其中任一模态 m 分析具有普遍性。由式 (15) 可得到第 m 阶激发模态竖直向质点振动传播速度为

$$c_{z,m}(r, \omega) = \beta(k_m r) c_m \quad (18)$$

式中: $\beta(k_m r)$ 为激发模态空间特性系数。

$$\beta(k_m r) = \frac{[Y_0(k_m r)]^2 + [J_0(k_m r)]^2}{[Y_0(k_m r) J_1(k_m r) - J_0(k_m r) Y_1(k_m r)]} \quad (19)$$

由式 (19) 可得激发模态相速度与简正模态相速度比值随无量纲传播距离变化, 见图 6, 图中小图为一个波长距离内激发模态相速度变化, 由图可以看出, 源对激发瑞利波传播特性影响距离不超过一个波长, 距源越近, 激发瑞利波竖直向质点振动传播速度越低。

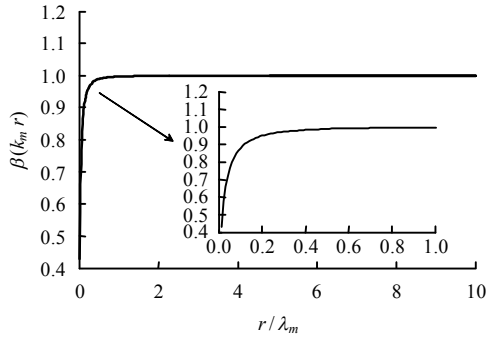


图6 瑞利波激发模态空间特性

Fig.6 Spatial behavior of activated modes of Rayleigh waves

5 激发瑞利波空间特性分析

5.1 激发模态

为了便于与简正瑞利波传播比较,将 Bessel 函数分解为远场量及增量两部分

$$\left. \begin{aligned} J_j(k_m r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \cos\left(k_m r - \frac{\pi}{4} - \frac{j}{2}\pi\right) + \Delta J_j(k_m r) \\ Y_j(k_m r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \sin\left(k_m r - \frac{\pi}{4} - \frac{j}{2}\pi\right) + \Delta Y_j(k_m r) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$\Delta J_j(k_m r)$ 和 $\Delta Y_j(k_m r)$ ($j=1, 2$) 随无量纲传播距离变化分别如图 7(a) 和 7(b) 所示。

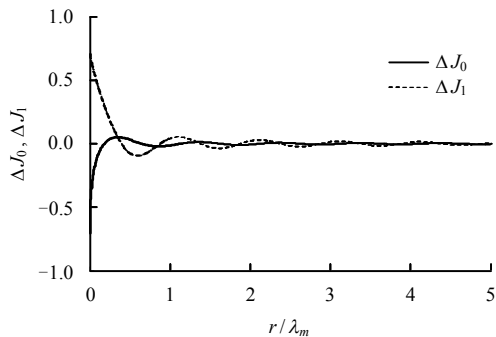
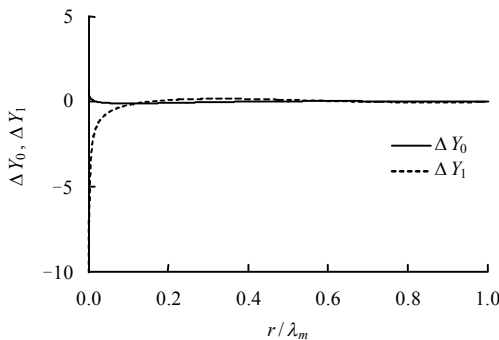
(a) $\Delta J_0(k_m r), \Delta J_1(k_m r)$ (b) $\Delta Y_0(k_m r), \Delta Y_1(k_m r)$

图7 第1和第2类贝塞尔函数增量随无量纲传播距离变化

Fig.7 Variations of increments of the first and the second Bessel functions with dimensionless distance

根据式 (20), 式 (10) 竖直向及径向位移的

实部可改写为

$$\begin{aligned} \text{Re}[u_z^{nm}(r, \omega)] &= \tilde{u}_z^{nm}(r, \omega) + \tilde{u}_{z0}^{nm}(r, \omega) \\ \text{Re}[u_r^{nm}(r, \omega)] &= \tilde{u}_r^{nm}(r, \omega) + \tilde{u}_{r0}^{nm}(r, \omega) \end{aligned} \quad (21)$$

式中: \tilde{u}_z^{nm} 、 \tilde{u}_r^{nm} 、 \tilde{u}_{z0}^{nm} 和 \tilde{u}_{r0}^{nm} 分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_z^{nm} &= \tilde{U}_z^{nm}(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \cos\left[(k_m r + \frac{\pi}{4})\right] \\ \tilde{u}_r^{nm} &= -\tilde{U}_r^{nm}(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \sin\left[(k_m r + \frac{\pi}{4})\right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{z0}^{nm} &= -\tilde{U}_z^{nm}(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \Delta Y_0(k_m r) \\ \tilde{u}_{r0}^{nm} &= \tilde{U}_r^{nm}(\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi k_m r}} \Delta Y_1(k_m r) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_z^{nm}(\omega) &= \frac{q\pi R}{2} (\phi_z^{nm})^2 J_1(k_m R) / k_m \\ \tilde{U}_r^{nm}(\omega) &= \frac{q\pi R}{2} \phi_x^{nm} \phi_z^{nm} J_1(k_m R) / k_m \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由 \tilde{u}_z^{nm} 和 \tilde{u}_r^{nm} 可得

$$\frac{\left[\sqrt{\frac{\pi k_m r}{2}} \tilde{u}_z^{nm}\right]^2}{(\tilde{U}_z^{nm})^2} + \frac{\left[\sqrt{\frac{\pi k_m r}{2}} \tilde{u}_r^{nm}\right]^2}{(\tilde{U}_r^{nm})^2} = 1 \quad (25)$$

其对应的质点轨迹为后退椭圆, 质点振动几何衰减为 $r^{-1/2}$, 传播特性与平面简正波相同, 这里称之为柱面简正波。由式 (21) 可知, 激发瑞利波总位移是在柱面简正波位移基础上叠加 \tilde{u}_{z0}^{nm} 与 \tilde{u}_{r0}^{nm} , 相当于柱面简正波的位移发生偏移, 或者说柱面简正波位移受外部变形发生扰动。由式 (23)、(24) 可知, 偏移位移 \tilde{u}_{z0}^{nm} 与 \tilde{u}_{r0}^{nm} 与简正瑞利波模态形状 ϕ_z^{nm} 和 ϕ_x^{nm} 有关。若把激发瑞利波位移看作这两种振动叠加, 激发瑞利波相速度也是一种表观相速度。由于偏移位移随传播距离变化, 表观相速度具有空间特性。由图 7 可知, 随着 r/λ_m 增加, $\Delta Y_0 \rightarrow 0$, $\Delta Y_1 \rightarrow 0$, 由式 (23) 可知 $\tilde{u}_{z0}^{nm} \rightarrow 0$, $\tilde{u}_{r0}^{nm} \rightarrow 0$, 激发模态表观相速度趋于简正模态相速度。

5.2 多模波场表观相速度

层状介质中瑞利波波场有多个模态, 这些模态在波场中能量分配及传播速度不同, 由源向外传播过程中, 或相长相干或相消相干。假设模态 1 和模态 2 分别以相速度 c_1 和 c_2 传播, 不同位置两模态

叠加后质点振动如图8中实线所示, 叠加波表观相速度不同于模态相速度 c_1 和 c_2 。多模波场中表观相速度不仅与模态传播特性有关而且还与模态间相互叠加有关。相较于源对激发模态的影响主要在一个波长范围内, 表观相速度空间特性甚至覆盖整个分析波场。表1给出3种典型分层土性参数^[7]。对情形 I, 分层剪切波速随层深度递增, 前几阶简正模态的频散曲线及由式(15)计算的距源中心 $r=1$ 、 5 m 处的表观相速度见图9(a)。对这种情形, 在分析频率范围内, 虽然有多个模态, 由于基阶模态(即模态1)起主导作用, 在大部分频率范围表观相速度与基阶简正模态频散接近。在低频处(小于 5 Hz), 只有基阶模态存在, 表观相速度就是基阶激发模态相速度。由于激发模态空间特性在低频处明显(见图6), 它们与基阶简正模态相速度差别较大。对浅部夹杂软弱层的情形 II, 不同频率范围, 波场由不同模态主导或数个模态共同作用, 这种情况下, 激发模态间干涉强烈, 表观相速度的空间特性明显, $r=1$ 、 5 m 处表观相速度差别较大, 表观相速度不同于其中任一简正模态频散, 见图9(b)。对浅部夹杂硬层情形 III, 基阶模态在大部分频率区域能量较大, 但在低频区域($10\sim 20\text{ Hz}$), 高阶模态发挥较大的作用, 可以看出在这段频率区域, 表观相速度与基阶模态区别较明显, 见图9(c)。

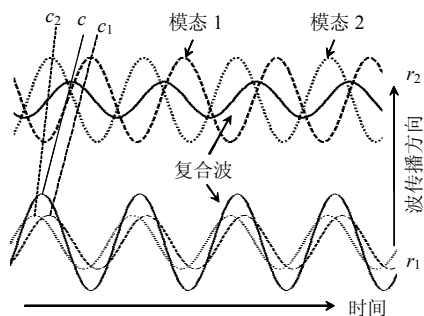


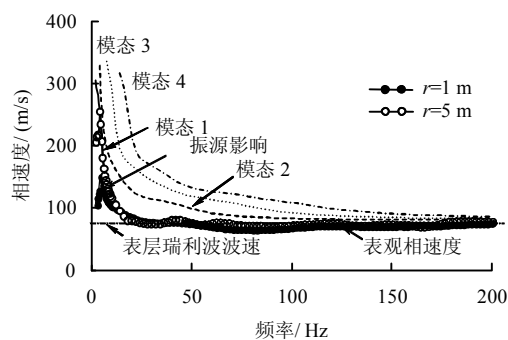
图8 多模波场模态相速度与表观相速度

Fig.8 Apparent phase velocity and phase velocities of modes for wave fields with multiple modes

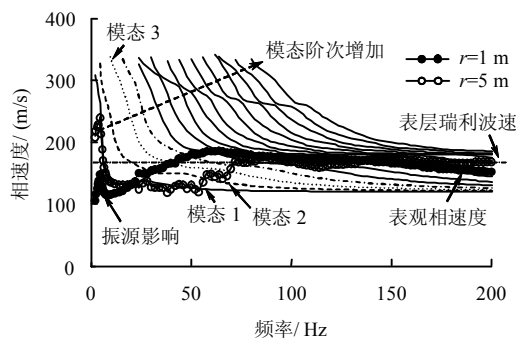
表1 3种典型层状介质土性参数

Table 1 Soil properties for three typical layered media

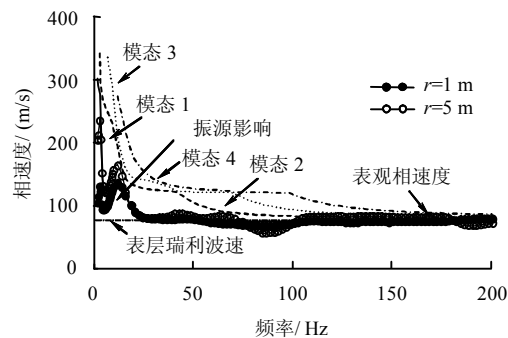
层号	剪切波速 (m/s)			厚度 / m	泊松比	密度 (g/cm ³)
	情形 I	情形 II	情形 III			
1	80	180	80	2	0.35	1.8
2	120	120	180	4	0.35	1.8
3	180	180	120	8	0.35	1.8
4	360	360	360	∞	0.35	1.8



(a) 情形 I



(b) 情形 II



(c) 情形 III

图9 $r=1$ 、 5 m 处表观相速度及前几阶简正模态频散
Fig.9 Apparent phase velocity curves at positions of $r=1\text{ m}$ and $r=5\text{ m}$ and dispersion curves of the first several normal modes

7 结 论

(1) 表面源激发波场中直达体波及层界面反射体波对瑞利波相位谱干扰较大, 但在频率-波数域, 由于体波与瑞利波传播特性不同, 能量迹线不同, 易于得到激发瑞利波频散数据。

(2) 瑞利波激发模态具有与频率有关的频率特性, 这种特性与简正模态相同, 同时还具有与传播距离有关的空间特性。

(3) 激发模态振动可认为由柱面简正波振动及偏移振动叠加, 前者与平面简正波传播特性相同, 后者与外部荷载对介质扰动有关, 随着传播距离增加, 偏移振动减小, 激发模态与简正模态传播特性

趋于一致。

(4) 源对激发模态影响距离一般不超过一个波长,距源越近,竖直向振动传播速度越低。

(5) 多模波场中不同模态在不同位置相长相干或相消相干会影响表观相速度空间特性。对层剪切波速随层深度递增场地,基阶模态主导波场,在距源较远处,表观相速度空间特性不明显。在多个高阶模态共同主导的波场或不同频率域主导波场的模态不同情况下,表观相速度空间特性明显。

参考文献

- [1] HASKELL N A. The dispersion of surface waves on multilayered media[J]. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 1953, 43: 17—34.
- [2] 夏唐代, 陈云敏, 吴世明. 匀质软夹层地基瑞利波弥散特性[J]. 振动工程学报, 1993, 6(1): 42—50.
XIA Tang-dai, CHEN Yun-min, WU Shi-ming. Rayleigh wave dispersion in soil profiles where a softer layer is trapped between harder layers[J]. **Journal of Vibration Engineering**, 1993, 6(1): 42—50.
- [3] 张碧星, 喻明, 熊伟, 等. 层状介质中的声波场及面波研究[J]. 声学学报, 1997, 22 (3): 230—241.
ZHANG Bi-xing, YU Ming, XIONG Wei, et al. Study of acoustic wave and surface waves in stratified media[J]. **Acta Acustica**, 1997, 22(3): 230—241.
- [4] 鲁来玉. 分层介质半空间瑞利波模式分析和介质参数反演[D]. 北京: 中国科学院声学研究所, 2004.
LU Lai-yu. Analysis of Rayleigh wave modes in stratified half-space and inversion of parameters of media[D]. Beijing: Institute of Acoustics, The Chinese Academy of Sciences, 2004.
- [5] TOKIMATSU K, SHINZAWA K, KUWAYAMA K S. Use of short period microtremors for V_s profiling[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 118(10): 1544—1558.
- [6] MORIKAWA H, SAWADA S, AKAMATSU J. A method to estimate phase velocities of Rayleigh waves using microseisms simultaneously observed at two sites[J]. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 2004, 94(3): 961—976.
- [7] TOKIMATSU K, TAMURA S, KOJIMA H. Effects of multiple modes on Rayleigh wave dispersion characteristic[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 118(10): 1529—1543.
- [8] YOON S S, RIX G J. Near-field effects on array-based surface wave methods with active sources[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2009, 135(3): 399—406.
- [9] ZYWICKI D J, RIX G J. Mitigation of near-field effects for seismic surface wave velocity estimation with cylindrical beamformers[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2005, 131(8): 970—977.
- [10] CHAI H Y, PHOON K K, WEI C F, et al. Analysis of effects of active sources on observed phase velocity based on the thin-layer method[J]. **Journal of Applied Geophysics**, 2011, 73(1): 49—58.
- [11] CHAI H Y, CUI Y J, WEI C F. A parametric study of the apparent phase velocity of surface waves in layered media[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 44: 176—184.
- [12] 柴华友, 吴慧明, 张电吉, 等. 弹性介质中的表面波理论及其在岩土工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
CHAI Hua-you, WU Hui-ming, ZHANG Dian-ji, et al. Theory of surface waves in elastic media and its application in geoenvironmental engineering[M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [13] 陈龙珠, 严细水, 赵永倩. 关于面波法检测地基波速中的测点布置问题[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(1): 63—66.
CHEN Long-zhu, YAN Xi-shui, ZHAO Yong-qian. On arrangement of transducers in surface wave measurement[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(1): 63—66.
- [14] CHEN L Z, ZHU J Y, YAN X S, et al. On arrangement of source and receivers in SASW testing[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2004, 24(5): 389—396.
- [15] GANJI V, GUCUNSKI N, NAZARIAN S. Automated inversion procedure for spectral analysis of surface waves[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1998, 124(8): 757—770.
- [16] 凡友华, 刘家琦, 肖柏勋. 计算瑞利波频散曲线的快速矢量算法[J]. 湖南大学学报, 2002, 29(5): 25—30.
FAN You-hua, LIU Jia-qi, XIAO Bai-xun. Fast vector-transfer algorithm for computation of Rayleigh wave dispersion curves[J]. **Journal of Hunan University (Natural Sciences Edition)**, 2002, 29(5): 25—30.
- [17] KAUSEL E, ROËSSET J M. Stiffness matrices for layered soils[J]. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 1981, 71(6): 1743—1746.