

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.02.013

基于修正 Drucker-Prager 准则的 岩石次加载面模型

周永强, 盛 谦, 朱泽奇, 付晓东

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 为模拟岩石在循环加、卸载作用下的变形特性, 结合 Drucker-Prager (简称 D-P) 屈服准则与次加载面理论, 建立了能考虑岩石材料实际抗拉强度和应力角效应的循环加、卸载模型。首先考虑岩石在三轴压缩和在三轴拉伸状态下不同的强度特性, 在传统的 D-P 屈服准则中引入角隅模型, 并借鉴殷有泉提出的 D-P-Y 准则, 形成了修正的 D-P 屈服准则; 进一步结合修正屈服准则和次加载面理论, 提出了适用于岩石循环加、卸载的次加载面模型, 并通过自编程序, 实现了循环加、卸载模型的数值表达与岩石循环加、卸载试验数值仿真。计算结果表明, 基于修正 D-P 屈服准则的次加载面模型能较好地描述岩石的曼辛效应和棘轮效应; 通过改变抗拉强度的大小, 可以发现随着抗拉强度的减小, 岩石的变形量相应增加, 且增加的幅度逐渐提高, 说明修正模型可准确反映抗拉强度对岩石的循环加、卸载变形的影响。

关 键 词: 应力角效应; 拉剪区; 修正的 D-P 准则; 次加载面; 循环加载

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 02-0400-10

Subloading surface model for rock based on modified Drucker-Prager criterion

ZHOU Yong-qiang, SHENG Qian, ZHU Ze-qi, FU Xiao-dong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: To simulate the deformation behavior of rocks under cyclic loading and unloading, a cyclic loading-unloading model is developed based on Drucker-Prager (D-P) yield criterion and the subloading surface theory. Tensile strength and stress angle effect are considered in this model. By introducing the corner model into the traditional D-P yield criterion, and referring the D-P-Y yield criterion proposed by Yin Youquan, a modified D-P yield criterion is put forward on the basis of strength characteristics of rocks under triaxial compression and tension. According to the modified yield criterion and the subloading surface theory, a subloading surface model for rock under cyclic loading and unloading is proposed. Numerical verification of this model is conducted by programing. The results show that the subloading surface model can be used to represent the Mansingh reaction and the ratchet effect of rock. As the tensile strength decreases, the deformation of rock increases, and the rate of increase is gradually improved, which demonstrates that the modified model can be used to well reflect the effect of tensile strength on the deformation of rock under cyclic loading and unloading.

Keywords: stress angle effect; tensile shear region; modified Drucker-Prager criterion; subloading surface; cyclic loading-unloading

1 引 言

岩石材料在循环荷载下的变形表现出了滞回性及应变累积性, 亦即曼辛效应和棘轮效应^[1-5], 然而传统屈服面只能模拟岩石的一定程度塑性变形, 却没有累积性, 更不能反映加、卸载时产生的滞回

圈, 如图 1 所示。

为了能模拟岩石在动力荷载 (包括循环荷载) 下的动态特性, 曹文贵等^[6]利用黏性元件和非线性元件模拟岩石单元的动态应力分量与静态应力分量, 进而得到岩石三轴动态变形过程模拟方法; 刘红岩等^[7]采用考虑岩石微观损伤的非线性元件、节

收稿日期: 2015-04-01

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目 (No. 2015CB057905); 国家自然科学基金项目集成项目 (No. 91215301); 国家自然科学基金资助项目 (No. 11272331)。

This work was supported by the National Program on Key Basic Research Project of China (973 Program) (2015CB057905), the Integration Project of the National Natural Science Foundation of China (91215301) and the National Natural Science Foundation of China(11272331).

第一作者简介: 周永强, 男, 1990 年生, 博士, 主要从事岩土工程领域的科研工作。E-mail: 852538607@qq.com

理面闭合及剪切变形元件等 3 个基本元件的串联来模拟，动态应力分量采用黏性元件来模拟，从而建立了贯通节理岩体动态单轴压缩损伤本构模型。上述模型虽在一定程度上可以较好地反映岩石的应变率效应及损失效应，但却不能模拟岩石在循环荷载下的滞回效应及应变累积。对此，刘恩龙等^[8]根据岩土破损力学理论，针对岩石材料提出了一个考虑循环荷载作用的二元介质本构模型，该模型虽较好地反映棘轮效应，然而在滞回效应方面却很差。还有学者提出了岩石内时模型^[9]，该模型模拟岩石在循环荷载下的动态响应具有很好的实用性，然而该模型参数较多，且其物理意义不明确，同时参数确定存在较大的难度。此外还有 PM 模型^[10]、热激活弛豫波动理论^[11]等，这些模型同内时模型一样存在一些难以解释的问题。基于此，次加载面模型则成了一个有益的选择^[12]。

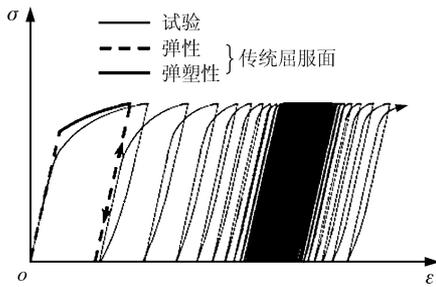


图 1 传统屈服面与循环加载试验
Fig.1 The traditional yield criterion and a cyclic loading test

次加载面模型反映材料在循环荷载下的变形特性具有很好的适应性和正确性^[13-16]，但这些材料一般都局限于土体材料、金属材料 and 混凝土，并没有涉及岩石材料，因此，对于岩石材料，次加载面的正常屈服面，应选择适用于岩石的屈服准则。

广泛运用到岩石材料中的屈服准则主要有 Mohr-Coulomb (简称 M-C) 准则、D-P 准则、Hoek-Brown (简称 H-B) 准则和双剪强度准则，然而 M-C 屈服准则没有考虑中间主应力对岩石强度的影响，与岩石试验现象不符^[17]，且其 π 平面上的屈服曲线有奇异点，不便于编程；H-B 准则在子午面上的包络线是抛物线，表明了内摩擦角是随静水压力变化，同时该准则还能反映岩体的破碎情况，但其与 M-C 准则一样没有考虑中间主应力的影响，且参数 m 和 s 的取值较难确定^[18]；双剪强度准则虽然考虑了中间主应力对强度的影响，但只能适用于剪切和拉压强度满足一定关系的材料^[19]；D-P 准则虽不能区分

岩石的拉伸和压缩子午线，子午面上的包络线也是直线，然而该准则却能考虑岩石的静水压力和中间主应力效应，且形式简单，物理意义明确， π 平面上的屈服曲线又是圆形，即处处光滑无奇异点，易于编程，因此，相对于其他准则，选择 D-P 准则作为次加载面的正常屈服面是个恰当的选择。

然而岩石材料拉、压强度不等且体现出明显的 Lode 角效应^[20]、岩石的实际抗拉强度对岩石屈服破坏的影响等，传统的 D-P 准则都没考虑，因此，本文的思路是基于 D-P 准则，考虑应力角效应及实际抗拉强度的影响，结合次加载面理论，建立了基于修正的 D-P 准则的次加载面模型，从而反映岩石在循环荷载的变形特性。

2 次加载面的基本原理

次加载面模型是由日本学者 Hashiguchi^[12]提出的，其基本思路是假设在正常屈服面（常规模型的屈服面）的内部存在一个与之保持几何相似的次加载面，当前应力点始终位于该加载面上，因此加载准则不需要判断应力点是否位于屈服面上。该模型可反映塑性应变增量对应力增量的相关性，能较好地模拟曼辛效应（滞回特性）、棘轮效应（塑性应变的积累性）等材料的主要循环加载特性，与常规模型相比，该模型的弹性阶段与塑性阶段能光滑过渡，即应力-应变关系是连续光滑的，因为塑性模量是用次加载面与正常屈服面大小的比值来表示。

次加载面模型如图 2 所示，正常屈服面的屈服形式为

$$f(\sigma_y) = F(H) \tag{1}$$

式中： σ_y 为位于次加载面上当前应力 σ 在正常屈服面上的对偶应力； H 为硬化变量。由于次加载面与正常屈服面保持几何相似，因此，次加载面模型为

$$f(\bar{\sigma}) = RF(H) \tag{2}$$

式中： R 为次加载面与正常屈服面的大小之比。图 2 中 \mathcal{R}_s 为相似中心面与正常屈服面之比，即相似中心比。从图 2 可以得出如下的几何相似关系：

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma - \bar{\alpha} = R\hat{\sigma}_y = R(\sigma_y - \alpha) \\ \hat{s} &= s - \alpha = \frac{\bar{s}}{R} = \frac{s - \bar{\alpha}}{R} \\ \bar{\sigma} &= \sigma - s = R\bar{\sigma}_y = R(\sigma_y - s) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

式中： s 为相似中心； α 为正常屈服面的几何中心； $\bar{\alpha}$ 为次加载面的几何中心。当 $R=0$ 时， $\sigma = s = \bar{\alpha}$ ，

表示次加载面与相似中心面重合（相似中心面与正常屈服面几何相似，且中心是同一点），即次加载面收缩为一个点；当 $R=1$ 时， $\sigma = \sigma_y$ ，即为传统的弹塑性模型，因此，传统的弹塑性模型为次加载面模型的一个特例。

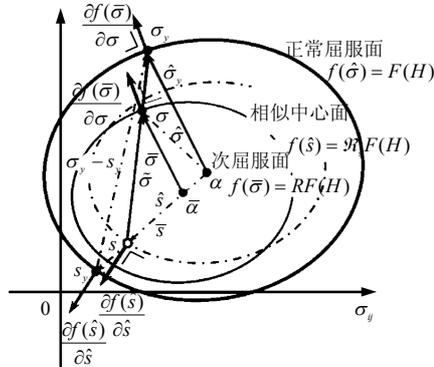


图 2 次加载面示意图

Fig.2 Schematic diagram of the subloading surface

3 修正的 D-P 准则

D-P 准则形式比较简单，参数少，考虑了静水压力和中间主应力的影响，同时在 π 平面上处处光滑无奇异点，在用流动法则确定塑性应变增量方向时比较方便，继而易于确定材料的弹塑性本构关系，使得编程较易实施，因而该屈服准则使用比较广泛。

然而该准则也有不适用性，一方面根据 D-P 准则可求出岩石的三向拉伸强度，假设岩石的三向拉伸强度与单轴拉伸强度相等，即可知单轴拉伸强度为 $\sigma_t = k / \beta = 3c \cot \varphi$ （其中 k 、 β 为 D-P 准则中的参数），但其值与表 1^[21-23] 则相差甚远，因此，如果继续在岩石的拉剪区域使用 D-P 准则，得出的结论会偏于危险；另一方面俞茂宏等^[20]指出，D-P 准则不具有应力角效应，即岩石的极限面与偏平面的交线不是圆形。基于此，本文提出了修正的 D-P 屈服准则，该准则可以很好地解决以上问题。

表 1 不同岩石的参数表

Table 1 Mechanical parameters of different rocks

岩石类型	白云岩	辉长岩	花岗岩	石灰岩	大理岩	砂岩	页岩	火山岩	石英岩	凝灰岩	文献
单轴抗压强度 /MPa	291.6~506.3	205.0~350.8	116.2~298.6	47.1~201.4	49.7~133.3	45.7~398.4					[23]
	82.7~165.5		166.9~587.4	69.0~331.0	51.7~152.4	12.3~179.3	55.2~213.0	150.2			[21]
	86.9~90.3		141.1~226.0	51.0~245.0	62.0~66.9	72.4~214.0	35.2~75.2		101.5	11.3	[22]
抗压强度与抗拉强度之比	19.7~29.8		7.9~28.0		3.0~22.0	1.5~49.8		6.0~12.5			[21]
			12.1~19.0	25.0~61.3	37.4~53.0	26.3~63.0	36.3~167.6		15.9	10.0	[22]

3.1 角隅函数

为考虑岩石在三轴压缩和在三轴拉伸状态下不同的强度特性，即应力角效应，引入了一种角隅模型 $g(\theta)$ ，亦称为形状函数，它表示破坏条件的形状。该函数的选择一般是根据试验结果来确定，但除此之外，该函数须满足以下 3 个条件才能保证 π 平面上屈服曲线外凸且平滑^[18]：

(1) 它是凸曲线

$$\frac{1}{g(\theta)} + \left(\frac{1}{g(\theta)} \right)'' \geq 0 \quad (4)$$

(2) $g(30^\circ) = 1$ 和 $g(-30^\circ) = b \leq 1$ (5)

$$\left. \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=30^\circ} = 0 \text{ 和 } \left. \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=-30^\circ} = 0 \quad (6)$$

综上，参考文献[24]，角隅模型取为

$$g(\theta) = \frac{b}{\left[b^2 + (1-b^2) \sin^2(45^\circ - 1.5\theta) \right]^{1/2}} \quad (7)$$

式中： b 为岩石三轴拉伸时 π 平面上的半径。如图 3

所示，表示屈服面在 π 平面上随 b 的变化过程， b 越大，屈服曲线越趋近于圆，当 $b=1$ 时，即屈服曲线为圆形。

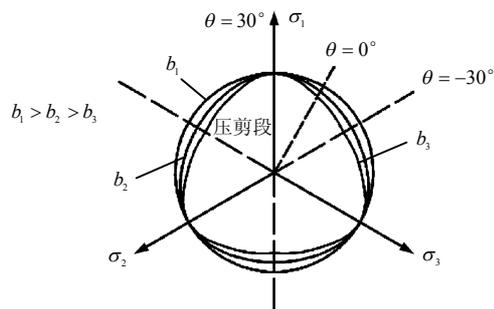


图 3 π 平面上屈服曲线随 b 的变化过程

Fig.3 Change process of yield curve with b in the π plane

3.2 考虑拉剪屈服的 D-P 准则

3.2.1 考虑拉剪屈服的岩石强度准则

正如上述，D-P 准则并未考虑岩石真实的抗拉强度，M-C 准则也是如此，对此，在考虑岩石拉剪屈服的强度准则方面，国内外做了相关研究，具体

可以分为双曲线包络线强度准则、抛物线包络线强度准则和圆形包络线强度准则。

对于抛物线包络线强度准则，朱子龙等^[25]认为，拉剪区的强度曲线为

$$\tau = \frac{\tau_0}{(\sigma_t - \sigma_0)} (\sigma - \sigma_0)^2 + \tau_0 \quad (8)$$

式中： σ_0 、 τ_0 分别为拉剪区曲线的最高点。

周火明等^[26]根据现场岩体拉剪试验，认为三峡船闸区岩体在拉剪区的破坏曲线更加符合二次抛物线，即

$$\tau = n(\sigma + \sigma_t) \quad (9)$$

式中： n 为待定系数，须通过试验来确定； σ_t 为单轴抗拉强度。

此外李建林^[27]则认为，H-B 准则也可以很好地描述三峡工程永久船闸区花岗岩拉剪区的破坏关系，并推导出了准则中参数 m 、 s 与岩石的单轴抗压、单轴抗拉和单轴抗剪强度有关。

岩石拉剪区的破坏准则也可以用双曲线来描述，周火明^[26]和柳赋铮^[28]则推导了此形式为

$$\left(\frac{\sigma + \sigma_t + a}{a} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{b'} \right)^2 = 1 \quad (10)$$

式中： a 和 b' 为曲线参数。其与现场拉剪试验的拟合情况如图 4 所示。Aubertin 等^[24]根据 D-P 准则和 Mises-Schleicher（简称 M-S）准则，导出了符合岩石实际抗拉强度的强度准则，并与压剪区的形式进行了统一（MSDPu 准则），即

$$\sqrt{J_2} - [\beta^2 (I_1^2 - 2a_1 I_1) + a_2^2]^{1/2} F_\pi = 0 \quad (11)$$

式中： a_1 和 a_2 为与岩石单轴抗拉强度、单轴抗压强度有关的参数； F_π 为 π 平面上的破坏函数； I_1 、 J_2 分别是第一应力不变量和第二偏应力变量。

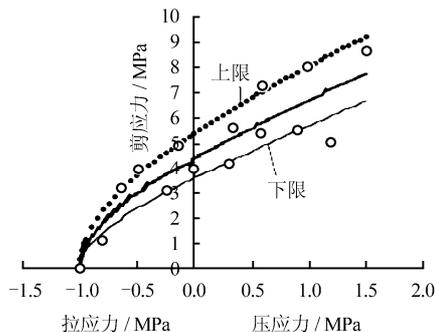


图 4 现场拉剪试验双曲线型强度曲线^[26]

Fig.4 Strength curves of the hyperbola model of in-situ tension-shear test^[26]

另外，李平恩等^[29]则用圆形代替了 D-P 准则在拉剪区的直线，压剪区的形式则沿用 D-P 准则。

3.2.2 D-P-Y 准则

上述成果在对描述岩石的拉剪破坏形态具有重要的参考作用，然而其各自都有一定的不足：朱子龙的模型和周火明的抛物线及双曲线包络线虽较好地拟合了岩石的拉剪破坏形态，但它们都是基于摩尔强度准则，说明了在 π 平面上屈服曲线是一个包含奇异点的不规则六边形，从而带来了数值实现的不便，同时没有考虑中间主应力效应^[17]；H-B 准则也有与周火明模型相同的问题，虽准则中参数 m 、 s 的确定问题已解决，然而李建林^[27]并没有证明其的适用性和正确性；李平恩和殷有泉虽保证了新的屈服准则是一个处处光滑的正则函数，但该屈服函数是阶段函数，并没有形成统一的形式；MSDPu 准则吸收了 D-P 准则和 M-S 准则的优点，且在拉剪区也能很好地反映岩石的屈服特性，但其参数 a_1 和 a_2 的值是随 π 平面曲线的变化而变化，同时在高应力下，相比 D-P 准则，该准则对预测岩体工程稳定性偏安全^[24]。

综上所述，考虑到 D-P 准则屈服面光滑，便于编程方面，同时能考虑静水压力效应和中间主应力作用，且压剪与拉剪屈服区能统一表达，此外还能较好地顾及及岩石真实的抗拉强度，李平恩等^[29]提出的 D-P-Y 准则无疑是一个最好的选择：使用一个双曲旋转面近似地代替 D-P 圆锥面，且 D-P 圆锥面是该双曲旋转面的渐近面，即

$$f = [J_2 + (k - \beta\sigma_t)^2]^{1/2} + \beta I_1 - k = 0 \quad (12)$$

该准则形式简单，物理意义明确，当 $\sigma_t = k / \beta$ 时，上式即为 D-P 准则。实际情况下， $\sigma_t \ll k / \beta$ ，说明了 D-P-Y 准则不但在拉剪情况下比 D-P 准则偏于危险，而且在高压应力下也同样偏于危险，由于该准则随着静水压力的增长而不断靠近 D-P 准则，说明该准则也同样反映了高静水压力下脆性岩石的摩擦滑移控制型延性破坏。对比式 (12) 和式 (10) 可以发现，当 $b' = k - \beta\sigma_t$ ， $a = b' / \beta$ 时，此两式是等效的，对照图 4，说明 D-P-Y 准则在拉剪区也能很好地反映岩石的屈服状态。

3.2.3 修正的 D-P 准则

基于上述角隅函数和拉剪屈服曲线的修正，则考虑了岩石应力在三轴压缩和三轴拉伸状态下不同的强度特性及实际抗拉强度的修正 D-P 准则的表达式为

$$f = \left[J_2 / g(\theta)^2 + (k - \beta \sigma_1)^2 \right]^{1/2} + \beta I_1 - k = 0$$

$$g(\theta) = \frac{b}{\left[b^2 + (1 - b^2) \sin^2(45^\circ - 1.5\theta) \right]^{1/2}}$$

(13)

该修正屈服准则的子午面及 π 平面上的曲线如图 5 所示, π 平面上的屈服曲线随着静水压力的增大, 由光滑的三角形逐渐趋近于圆形, 表示岩石由脆性破坏趋向延性破坏而表现为过渡脆延破坏现象, 在高静水压力下, 屈服曲线直接靠近于 D-P 准则, 说明表现出了延性破坏, 这与试验相符合。

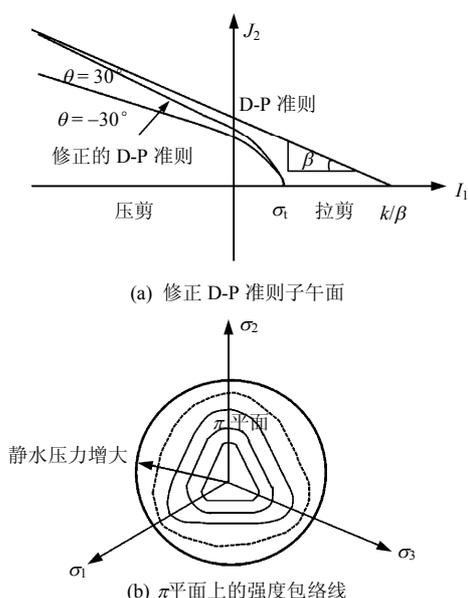


图 5 修正 D-P 准则子午面和 π 平面上的强度包络线
Fig.5 Strength envelopes in the meridional plane and π plane of the modified D-P criterion

4 基于修正 D-P 准则的次加载面模型数值实现过程

联合式 (13)、(2)、(3), 即可建立基于修正 D-P 准则的次加载面模型。运用弹性预测-塑性修正的思想, 通过自编程序, 基于修正 D-P 准则的次加载面模型的数值实现过程如图 6 所示, 其具体流程如下:

(1) 初始内变量: 时间步为 $n+1$ 、迭代步为 1 时, 相应的内变量为

$$S_{n+1}^K = S_n, \alpha_{n+1}^K = \alpha_n, R_{n+1}^K = R_n, F_{n+1}^K = F_n, H_{n+1}^K = H_n$$

(14)

(2) 弹性预测: 在时间步为 $n+1$ 、迭代步为 $k+1$ 时, 假设应力为

$$\sigma_{n+1}^{k+1} = \sigma_{n+1}^k + \mathbf{D}^{el} d\epsilon_{n+1}^{k+1}$$

(15)

式中: \mathbf{D}^{el} 为弹性矩阵。

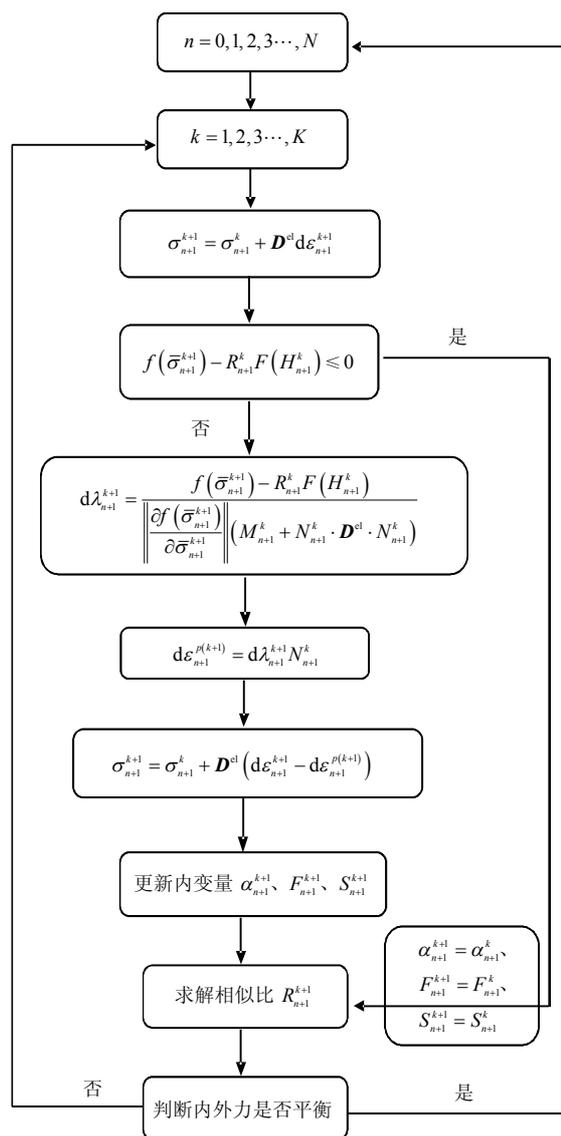


图 6 数值实现过程流程图
Fig.6 Flow chart of numerical simulation

(3) 屈服判断: 由 σ_{n+1}^{k+1} 计算相应的应力不变量 I_1 和 J_2 , 之后则判断

$$f(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}) - R_{n+1}^k F(H_{n+1}^k) \leq 0$$

(16)

如果式 (16) 成立, 则此时的应力即为步骤 (2) 中的应力, 转至步骤 (4) 中的③; 反之, 则要进行相应的塑性修正。

(4) 塑性修正: 塑性修正的目的是求解正确的应力, 从而使屈服函数能在屈服面上, 而不是远离屈服面。

①求解塑性因子:

$$d\lambda_{n+1}^{k+1} = \frac{f(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}) - R_{n+1}^k F(H_{n+1}^k)}{\left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1})}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}} \right\| \left(M_{n+1}^k + N_{n+1}^k \cdot \mathbf{D}^{el} \cdot N_{n+1}^k \right)}$$

(17)

$$N_{n+1}^k = \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1})}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}} \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1})}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}} \right\| \quad (18)$$

$$M_{n+1}^k = M_{n+1}^k \left\{ \frac{F_{n+1}^{r,k}}{F_{n+1}^k} \hat{\sigma}_{n+1}^k + \alpha_{n+1}^k + U_{n+1}^k \frac{\hat{\sigma}_{n+1}^k}{R_{n+1}^k} + S(1-R_{n+1}^k) \left[\frac{\bar{\sigma}_{n+1}^k}{R_{n+1}^k} - \frac{\hat{S}_{n+1}^k}{\chi} \right] \right\} \quad (19)$$

②更新内变量:

$$d\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)} = d\lambda_{n+1}^{k+1} N_{n+1}^k \quad (20)$$

$$\sigma_{n+1}^{k+1} = \sigma_{n+1}^k + \mathbf{D}^{el} (d\varepsilon_{n+1}^{k+1} - d\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)}) \quad (21)$$

$$F_{n+1}^{k+1} = F_{n+1}^k + \sqrt{2k\beta\sigma_t - (\beta\sigma_t)^2} h \|d\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)}\| \quad (22)$$

$$\alpha_{n+1}^{k+1} = \alpha_{n+1}^k + A(rF_{n+1}^k N_{n+1}^k - \alpha_{n+1}^k) \|d\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)}\| \quad (23)$$

$$S_{n+1}^{k+1} = S_{n+1}^k \left(S \left[\frac{\bar{\sigma}_{n+1}^k}{R_{n+1}^k} - \frac{\hat{S}_{n+1}^k}{\chi} \right] + \alpha_{n+1}^k + \frac{F_{n+1}^{r,k}}{F_{n+1}^k} \hat{S}_{n+1}^k \right) \|d\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)}\| \quad (24)$$

③求解相似比 R :

$$R_{n+1}^{k+1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4ac}}{2a} \quad (25)$$

$$a = \frac{1}{2} \left\| \hat{S}_{n+1}^{k+1} \right\|^2 - 9\beta^2 g(\theta)^2 \left(\hat{S}_{n+1}^{k+1} \right)_m^2 - g(\theta)^2 \left(F_{n+1}^{k+1} \right)^2 + 6\beta g(\theta)^2 F_{n+1}^{k+1} \left(\hat{S}_{n+1}^{k+1} \right)_m \quad (26)$$

$$B = \left(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \cdot \hat{S}_{n+1}^{k+1} \right) - 18\beta^2 g(\theta)^2 \left(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \right)_m \left(\hat{S}_{n+1}^{k+1} \right)_m + 6\beta g(\theta)^2 F_{n+1}^{k+1} \left(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \right)_m \quad (27)$$

$$c = \frac{1}{2} \left\| \bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \right\|^2 - 9\beta^2 g(\theta)^2 \left(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \right)_m^2 \quad (28)$$

式中： $\left(\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1} \right)_m$ 和 $\left(\hat{S}_{n+1}^{k+1} \right)_m$ 分别为 $\bar{\sigma}_{n+1}^{k+1}$ 和 \hat{S}_{n+1}^{k+1} 的平均值。

(5) 判断内外力是否平衡:

$$\left\| \left(f_{n+1}^{k+1} \right)_{\text{int}} - \left(f_{n+1} \right)_{\text{ext}} \right\| < ToL \quad (29)$$

$$\left(f_{n+1}^{k+1} \right)_{\text{int}} = \int [B]^T \sigma_{n+1}^{k+1} dV \quad (30)$$

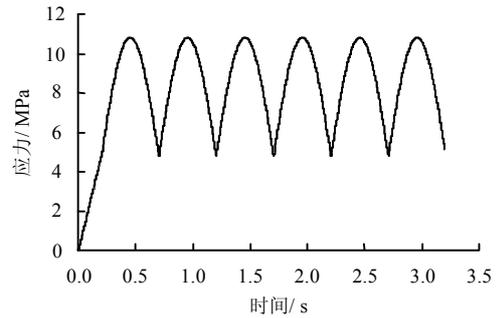
式中： ToL 为一个能允许的极小值； V 为单元的体积。

若上式成立，转至下一步，即步骤（1）；若不成立，则跳转到步骤（2）继续进行迭代。

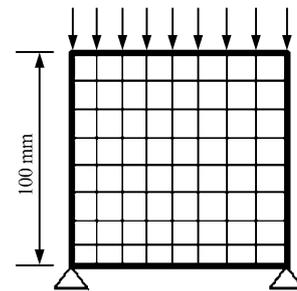
5 验证与对比

5.1 验证

对于一个 $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ 的立方体岩石，采用单轴加、卸载方式，先加载到 4.8 MPa ，之后再加载频率为 1 Hz 、幅值为 3 MPa 的半正弦波，加载次数为 6 次，加载路径如图 7 所示。其常规参数见表 2。



(a) 加载曲线



(b) 计算模型简图

图 7 加载应力路径图

Fig.7 Diagram of loading stress path

表 2 D-P 准则参数表

Table 2 Parameters of D-P criterion

E / GPa	ν	c / MPa	φ / (°)	H	A	r	u	S	χ
12	0.2	4	30	1	0	0.5	300	1 000	0.7

注： E 为弹性模量； ν 为泊松比； c 为黏聚力； φ 为内摩擦角； A 和 r 为非线性随动硬化参数； u 为控制应力点向正常屈服状态靠近的速率的参数； S 为影响滞回圈宽度的参数； χ 为最大相似中心面与正常屈服面的比值。

利用基于传统 D-P 准则的次加载面模型对上述应力路径下岩石的响应进行模拟，可以得出应力-应变曲线（见图 8）、应变随时间的变化曲线（见图 9）、相似比随应变的变化曲线（见图 10）。

从图 8 可以看出，在卸载与再加载过程均有塑性变形产生，从而形成了滞回圈，说明该模型能反

映岩石曼辛效应。图 9 表明,随着加载次数的增加,累计塑性应变也在相应地增加,说明该模型同样也能反映岩石棘轮效应。图 10 反映了相似比 R 的变化过程:在加载阶段,次加载面逐渐向正常屈服面靠近,而在卸载过程中,次加载面则是先逐渐缩小,后则是相应增大,说明在卸载过程中起初只发生弹性变形,当次加载面超过相似中心面后则有弹塑性变形。因此,该模型在加、卸载过程中都有一定的塑性变形产生,与岩石实际变形特性是一致的。

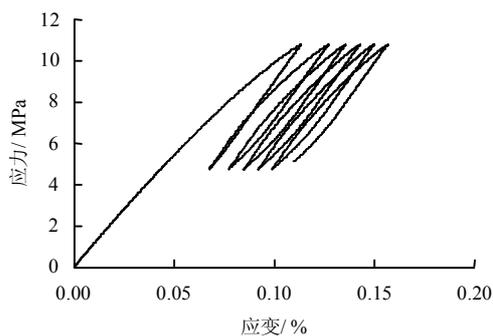


图 8 应力-应变曲线图
Fig.8 A typical stress-strain curve

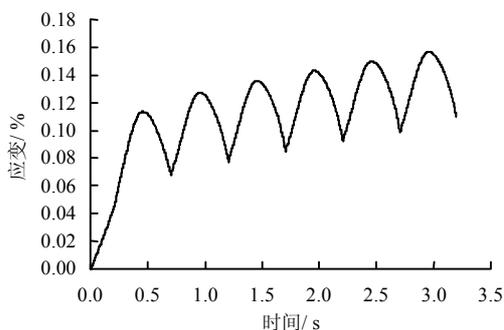


图 9 应变随时间的变化曲线
Fig.9 Relationship between strain and time

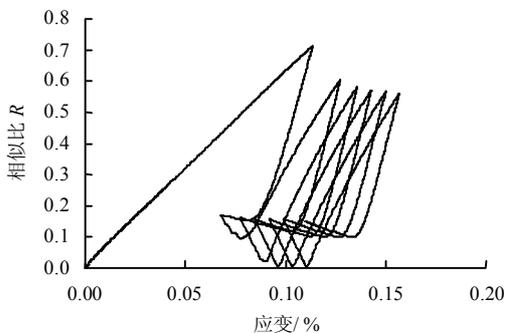


图 10 相似比 R 随应变的变化过程
Fig.10 Variation of similarity ratio R with strain

5.2 对比

上述模型只是基于传统的 D-P 准则,而并没有

考虑到岩石实际抗拉强度的影响,因此,利用基于上述修正 D-P 准则(D-P-Y 准则)的次加载面模型同样对上述岩石加载试验进行模拟,参数同表 2,岩石单轴抗拉强度则分别为 6、9、15 MPa,则其子午面上的屈服曲线与传统 D-P 准则的屈服曲线如图 11 所示,该图说明,抗拉强度越小,岩石的弹性区域则越小,也进一步表明岩石也越易屈服破坏,反之则越安全,这与实际情况相符。

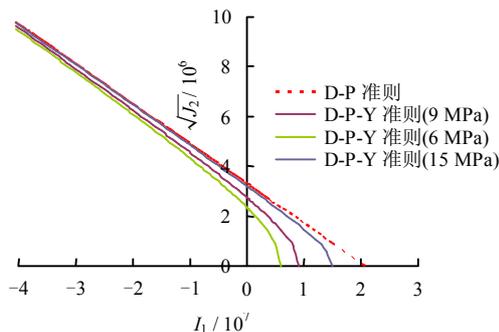


图 11 D-P-Y 准则和 D-P 准则在子午面上的强度包络线
Fig.11 Strength envelopes of the modified D-P criterion and D-P-Y criterion in the meridional plane

图 12、13 表明,基于修正 D-P 准则的次加载面模型同样也能模拟岩石的曼辛效应和棘轮效应。由传统 D-P 准则得出的单轴抗拉强度为 $\sigma_t = k / \beta = 3c \cot \varphi = 20.8$ MPa,均大于 3 个 D-P-Y 准则的抗拉强度,这反映出来的结果即为图 12~14 所示,随着抗拉强度的减小,岩石在循环荷载下的变形则相应增大,尤其是抗拉强度比较低时(6 MPa),岩石的变形增加幅度远远大于 9 MPa 和 15 MPa,此时岩石也更加危险,此现象也正好验证了图 11。因此,基于修正 D-P 准则的次加载面模型比基于 D-P 准则的次加载面模型更能反映岩石的真实特性,也更符合实际工程情况。

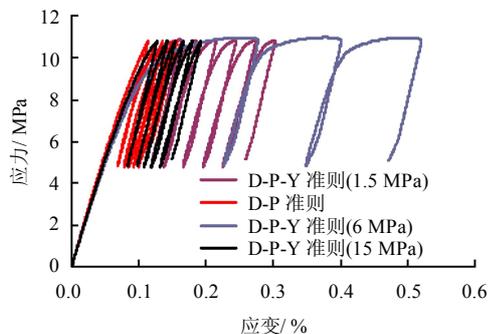


图 12 考虑抗拉强度的应力-应变曲线图
Fig.12 Stress-strain curve by considering tensile strength

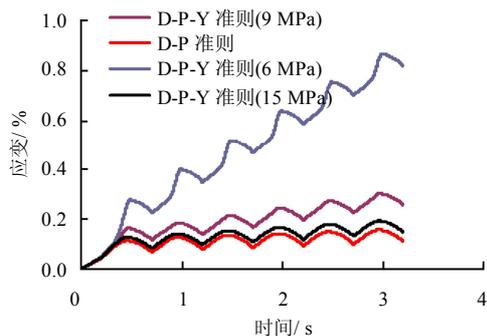


图 13 考虑抗拉强度应变随时间的变化曲线
Fig.13 Relationships between strain and time by considering tensile strength

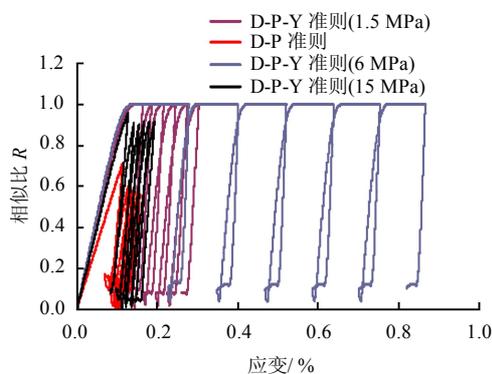


图 14 考虑抗拉强度相似比 R 随应变的变化过程
Fig.14 Variations of similarity ratio R with strain by considering tensile strength

6 结论与展望

(1) 基于传统 D-P 屈服准则, 引入了一种角隅模型, 可以考虑岩石在三轴压缩和三轴拉伸状态下不同的强度特性。在此基础上, 提出了能反映岩石实际抗拉强度的修正 D-P 屈服准则。

(2) 通过对岩石循环荷载试验的数值模拟, 发现基于修正 D-P 屈服准则的次加载面模型能较好地描述岩石的曼辛效应和棘轮效应。与传统 D-P 屈服准则相比, 基于修正 D-P 准则的次加载面模型反映的变形量更大, 偏于危险, 修正模型可准确反映岩石的真实变形特性。

对于岩石在动力问题上的应变率效应及相应的损伤效应, 修正模型没有考虑, 这些问题是笔者下一步研究工作中将要考虑的问题。

参考文献

[1] 刘建峰, 徐进, 李青松, 等. 循环荷载下岩石阻尼参数测试的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(5): 1036—1041.
LIU Jian-feng, XU Jin, LI Qing-song, et al. Experimental

research on damping parameters of rock under cyclic loading[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, 29(5): 1036—1041.

- [2] 陈运平, 王思敬. 多级循环荷载下饱和岩石的弹塑性响应[J]. 岩土力学, 2010, 31(4): 1030—1034.
CHEN Yun-ping, WANG Si-jing. Elastoplastic response of saturated rocks subjected to multilevel cyclic loading[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(4): 1030—1034.
- [3] 张媛, 许江, 杨红伟, 等. 循环荷载作用下围压对砂岩滞回环演化规律的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(2): 320—326.
ZHANG Yuan, XU Jiang, YANG Hong-wei, et al. Effect of confining pressure on evolution law of hysteresis loop of sandstone under cyclic loading[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, 30(2): 320—326.
- [4] 韩犇, 刘平. 循环荷载作用下岩石疲劳变形及特性试验研究[J]. 土工基础, 2013, 27(6): 131—133.
HAN Ben, LIU Ping. Experimental study of the fatigue deformation of rock samples under cyclic loadings[J]. *Soil Engineering and Foundation*, 2013, 27(6): 131—133.
- [5] 朱珍德, 孙林柱, 王明洋. 不同频率循环荷载作用下岩石阻尼比试验与变形破坏机制细观分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(增刊 1): 8—12.
ZHU Zhen-de, SUN Lin-zhu, WANG Ming-yang. Damping ratio experiment and mesomechanical analysis of deformation failure mechanism on rock under different frequency cyclic loadings[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(Supp.1): 8—12.
- [6] 曹文贵, 赵衡, 张玲, 等. 恒应变率下的岩石三轴动态变形过程模拟方法[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(11): 1658—1664.
CAO Wen-gui, ZHAO Heng, ZHANG Ling, et al. Simulation method of dynamic triaxial deformation process for rock under invariable strain rate[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(11): 1658—1664.
- [7] 刘红岩, 吕淑然, 张力民. 基于组合模型法的贯通节理岩体动态损伤本构模型[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(10): 1814—1821.
LIU Hong-yan, LÜ Shu-ran, ZHANG Li-min. Dynamic damage constitutive model for persistent jointed rock mass based on combination model method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(10):

- 1814—1821.
- [8] 刘恩龙, 张建海, 何思明, 等. 循环荷载作用下岩石的二元介质模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2013, 27(9): 6—11, 16.
LIU En-long, ZHANG Jian-hai, HE Si-ming, et al. Binary medium model of rock subjected to cyclic loading[J]. **Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)**, 2013, 27(9): 6—11, 16.
- [9] 莫海鸿. 岩石的循环试验及本构关系的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1988, 7(3): 215—224.
MO Hai-hong. Investigation of cyclic loading tests and constitutive relation of rock[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1988, 7(3): 215—224.
- [10] 孙道远, 温丹, 施行觉. 岩石非弹性特性的内时理论模型[J]. 实验力学, 2004, 19(3): 292—300.
SUN Dao-yuan, WEN Dan, SHI Xing-jue. An endochronic model for anelasticity in rock[J]. **Journal of Experimental Mechanics**, 2004, 19(3): 292—300.
- [11] 易良坤, 席道瑛, 刘小燕. 孔隙介质热弛豫激活波动理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 803—806.
YI Liang-kun, XI Dao-ying, LIU Xiao-yan. Thermal attenuation reactivated wave theory in porous media[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(5): 803—806.
- [12] HASHIGUCHI K. Generalized plastic flow rule[J]. **International Journal of Plasticity**, 2005, 21: 321—351.
- [13] TSUTSUMIA S, HASHIGUCHI K. General non-proportional loading behavior of soils[J]. **International Journal of Plasticity**, 2005, 21: 1941—1969.
- [14] HASHIGUCHI K, OKAYASU T, SAITOH K. Rate-dependent inelastic constitutive equation: The extension of elastoplasticity[J]. **International Journal of Plasticity**, 2005, 21: 463—491.
- [15] 孔亮, 郑颖人, 姚仰平. 基于广义塑性力学的土体次加载面循环塑性模型(II): 理论与模型[J]. 岩土力学, 2003, 24(3): 349—354.
KONG Liang, ZHENG Ying-ren, YAO Yang-ping. Subloading surface cyclic plastic model for soil based on Generalized plasticity (II): Theory and model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2003, 24(3): 349—354.
- [16] 伍大鹏. 混凝土在循环荷载作用下的次加载面模型[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
WU Da-peng. The sub-loading surface model of concrete under cyclic loading[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012.
- [17] 汪斌, 朱杰兵, 邬爱清, 等. 高应力下岩石非线性强度特性的试验验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 542—548.
WANG Bin, ZHU Jie-bing, WU Ai-qing, et al. Experimental validation of nonlinear strength property of rock under high geostress[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(3): 542—548.
- [18] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Theory of generalized plastic mechanics: Geotechnical plastic mechanics theory[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002.
- [19] 周小平, 钱七虎, 杨海清. 深部岩体强度准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(1): 117—123.
ZHOU Xiao-ping, QIAN Qi-hu, YANG Hai-qing. Strength criteria of deep rock mass[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(1): 117—123.
- [20] 俞茂宏, 刘继民, ODA Yoshiya, 等. 论岩土材料屈服准则的基本特性和创新[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(9): 1745—1757.
YU Mao-hong, LIU Ji-ming, ODA Yoshiya, et al. On basic characteristics and innovation of yield criteria for geomaterials[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(9): 1745—1757.
- [21] JAEGER J C, COOK N G W. Fundamentals of rock mechanics[M]. London: Chapman and Hall, 1979.
- [22] GOODMAN R. Introduction to rock mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- [23] HOEK E, BROWN E T. Empirical strength criterion for rock masses[J]. **Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE**, 1980, 106: 1013—1035.
- [24] AUBERTIN M, LI L, SIMON R, et al. Formulation and application of a short-term strength criterion for isotropic rocks[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36(5): 947—960.
- [25] 朱子龙, 李建林, 王康平. 三峡工程岩石拉剪断裂试验研究[J]. 武汉水利电力大学(宜昌)学报, 1998, 20(1): 1—6.
ZHU Zi-long, LI Jian-lin, WANG Kang-ping. A study on rock tension-shear strength related to three-gorges project[J]. **Journal of University of Hydraulic and Electric Engineering (Yichang)**, 1998, 20(1): 1—6.
- [26] 周火明, 熊诗湖, 刘小红, 等. 三峡船闸边坡岩体拉剪试验及强度准则研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4418—4421.