

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.02.038

裂纹扩展和连接过程的近场动力学数值模拟

谷新保^{1,2}, 周小平¹

(1.重庆大学 土木工程学院, 重庆 400015; 2.四川理工学院 土木工程学院, 四川 自贡 643000)

摘 要: 利用传统应变能密度与近场动力学的应变能密度相等以及近场动力学的基本方程, 推导了以状态为基础的近场动力学基本方程。引入损伤理论, 对以状态为基础的近场动力学基本方程进行离散化, 编制了近场动力学数值分析程序。利用近场动力学理论对经典的带孔单侧拉伸板破裂过程及双向拉伸状态下岩石裂纹扩展和连接过程进行了数值模拟, 并与 RFPA^{2D} 数值结果进行了对比分析。结果表明, 以状态为基础的近场动力学理论不仅突破了以键为基础的近场动力学理论恒定泊松比的限制, 而且不需要借助任何外部断裂准则就能很好地模拟裂纹的扩展和连接过程, 相对于其他的数值模拟方法具有很大的优势, 同时也给裂纹的扩展和连接的数值模拟提供了更好的思路。

关 键 词: 近场动力学理论; 裂纹扩展和连接; 数值模拟

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2017)02-0610-07

Numerical simulation of propagation and coalescence of cracks using peridynamic theory

GU Xin-bao^{1,2}, ZHOU Xiao-ping¹

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400015, China;

2. School of Civil Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong, Sichuan 643000, China)

Abstract: A fundamental equation of state-based peridynamic theory is derived firstly from equating the traditional strain energy density to peridynamic ones and using the peridynamic fundamental equation. This paper introduces the damage theory to the fundamental equation of state-based peridynamic theory, and discretizes the fundamental equation, and then develops a corresponding peridynamic numerical program. Then classical fracture process of a single side tensional plate with a circle hole and the propagation and coalescence of cracks in rock under biaxial tensile stress are simulated using the theory. Numerical results from state-based peridynamic theory are in good agreement with those from RFPA^{2D}. The results indicate that the state-based peridynamic theory not only breaks through the limitation of constant Poisson's ratio on bond-based peridynamic theory, but also efficiently simulates the propagation and coalescence of cracks without any external fracture criterion. Therefore, the state-based peridynamic theory has great advantage over other numerical methods, and it can also provide a better understanding of propagation and coalescence of cracks.

Keywords: peridynamic theory; propagation and coalescence of cracks; numerical simulation

1 引 言

固体材料的破裂问题一直是研究的热点^[1-2], 而裂纹的起裂、扩展和连接是研究的难点。很多方法可以研究裂纹的扩展和连接问题, 传统的有限元方法首先被用来分析裂纹问题^[3], 但由于裂纹尖端应

力的奇异性, 裂纹起裂和扩展必须通过引入外部断裂准则来判断, 而且裂纹的成核问题一直未得到解决^[4]。为了解决上述困难, 在传统有限元基础上, 提出了扩展有限元理论^[5], 它允许裂纹沿着单元内部的任何位置起裂, 而不仅仅在单元的边界起裂, 因此, 扩展有限元已经成功解决了许多裂纹问题。

收稿日期: 2015-01-11

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(973计划)(No. 2014CB046903); 国家自然科学基金资助项目(No. 51325903, No. 51279218); 重庆市自然科学基金院士专项(No. cstc2013jcyjys30002); 四川理工学院人才引进项目(No. 2016RCL19); 桥梁无损检测与工程计算四川省高校重点实验室2016年度开放基金项目(No. 2016QYJ02)。

This work was supported by the National program on key Basic Research Project of China(973 Program) (2014CB046903), the National Natural Science Foundation of China(51325903, 51279218), the Academician Special Item in Chongqing Natural Science Foundation (cstc2013jcyjys30002), the Program in Hit-haunting for Talents in Sichuan University of Science & Engineering(2016RCL19) and the Open Foundation Item in Key Laboratory about Nondestructive Testing and Engineering Calculation in University in 2016(2016QYJ02).

第一作者简介: 谷新保, 男, 1980年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究。E-mail: 15823405952@163.com

然而, 当位移不连续时, 扩展有限元仍然需要引入外部准则, 而且在解决三维裂纹问题时遇到了一系列困难。为了解决三维裂纹问题, 研究者们提出了无网格法^[6], 例如光滑粒子流体动力学能模拟裂纹扩展问题, 但它遇到了拉伸不稳定性问题^[7]; 分子动力学也被应用于模拟裂纹问题, 但它存在计算时间长, 计算效率低的问题^[8]。为了克服以上缺点, 近场动力学理论(peridynamic)被引入模拟裂纹问题, 它是一种基于非局部思想建立的数值计算模型, 不需要对位移进行微分, 通过求解空间积分方程来描述物质点力的一种数值方法^[9], 因此, 它既适用于连续性问题也适用于不连续问题^[10], 同时不需要借助外部准则, 突破了传统数值方法在模拟裂纹时存在裂纹尖端奇异性问题。近场动力学兼有无网格法和分子动力学的优点, 但又避免了分子动力学方法计算尺度上的局限, 因此, 该方法在模拟裂纹扩展问题时具有很大的优势。

近场动力学模型基本表达式为

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \int_H f(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, x' - x) dH + b(x,t) \quad (1)$$

式中: H 为 x 的邻域; \mathbf{u}' 为物质点 x' 的位移矢量; \mathbf{u} 为物质点 x 的位移矢量; b 为被施加的外力体密度; ρ 为物质点密度; f 为邻域内两个物质点的对点力。

近场动力学理论又分为以键为基础的近场动力学和状态为基础的近场动力学; 但以键为基础的近场动力学理论由于过度简化, 存在泊松比必须等于 $1/3$, 这使它的应用受到限制; 而以普通状态为基础的近场动力学则克服了这个限制。本文主要介绍以普通状态为基础的近场动力学线弹性理论(LPS), 推导了平面应变的近场动力学理论, 并对推导出的基本方程进行了离散化, 然后通过程序实现该算法, 最后通过实例分析证明了状态为基础的近场动力学线弹性理论能很好地模拟裂纹。

2 以普通状态为基础的近场动力学理论

2.1 传统的应变能密度理论

在传统的连续介质力学里, 线弹性能量密度被分为两部分, 一部分为体积能量密度, 一部分为变形能量密度, 其表达式为^[11]

$$W = \frac{k}{2} \left(\frac{dV}{V} \right)^2 + G \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \quad (2)$$

式中: k 、 G 分别为体积模量和剪切模量; $\frac{dV}{V}$ 为

体积膨胀率; ε_{ij}^d 为偏应变张量的分量; W 为应变能密度。

根据连续介质力学可知, 平面应变条件下 z 轴方向的应变为 0 , 即 $\varepsilon_{zz} = 0$, 应力、应变表达式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

平面应变的体积膨胀率表达式为

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \left(\frac{dV}{V} \right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^d & \varepsilon_{xy}^d & 0 \\ \varepsilon_{yx}^d & \varepsilon_{yy}^d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^d \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: \mathbf{I} 为单位张量。

$$\varepsilon_{xx}^d = \frac{1}{3} (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xy}^d = \varepsilon_{yx}^d = \varepsilon_{xy} - \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{zz}^d = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^i = 0 - \frac{1}{3} \left(\frac{dV}{V} \right) = -\frac{1}{3} \frac{dV}{V} \quad (9)$$

将式(9)代入式(2), 可得

$$W = \left(\frac{k}{2} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{dV}{V} \right)^2 + G \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \quad (10)$$

2.2 近场动力学应变能密度理论

对于近场动力学理论, 其应变能表达式为^[12]

$$W(\theta, \underline{e}^d) = \frac{k'\theta^2}{2} + \frac{\alpha}{2} (\omega \underline{e}^d) \cdot \underline{e}^d \quad (11)$$

式中: α 、 k' 为待求参数; ω 为影响函数, 其表达式为

$$\omega = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \quad (12)$$

式中: $\boldsymbol{\xi} = x - x'$ 为点 x 和 x' 的相对位置矢量。

\underline{e}^d 为伸长状态的偏张量, 其表达式为

$$\underline{e}^d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \varepsilon_{ij}^d \xi_i \xi_j = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \sum_{i,j=1,2} \varepsilon_{ij}^d \xi_i \xi_j \quad (13)$$

θ 为体积膨胀率, 其表达式为

$$\theta = 2 \frac{\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{m} \quad (14)$$

式中: x 为参考位置标量状态场; e 为键的伸长状

态; m 为加权体积标量, 其表达式为

$$m = \underline{\omega x} \cdot \underline{x} = \int_H \omega \langle r \rangle r^2 dV = 2\pi h \int_0^\delta \omega \langle r \rangle r^3 dr \quad (15)$$

式中: h 为厚度。

由式 (15) 可得

$$h \int_0^\delta \omega \langle r \rangle r^3 dr = \frac{m}{2\pi} \quad (16)$$

由式 (11) 中等式右边的第 2 项可得

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{e}^d &= \frac{\alpha}{2} \int_H \omega \langle \varepsilon \rangle \left(\frac{1}{|\xi|} \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \xi_i \xi_j \right) \cdot \\ &\left(\frac{1}{|\xi|} \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \xi_i \xi_j \right) dV = \frac{\alpha}{2} \int_H \frac{\omega \langle \varepsilon \rangle}{|\xi|^2} \left[(\varepsilon_{xx}^d)^2 (\xi_x)^4 + \right. \\ &(\varepsilon_{xx}^d)^2 (\xi_x)^4 + 4(\varepsilon_{xy}^d)^2 (\xi_x)^2 (\xi_y)^2 + 2\varepsilon_{xx}^d \varepsilon_{yy}^d (\xi_x)^2 \cdot \\ &(\xi_y)^2 + 4\varepsilon_{xx}^d \varepsilon_{xy}^d (\xi_x)^3 \xi_y + 4\varepsilon_{yy}^d \varepsilon_{xy}^d (\xi_y)^3 \xi_x \left. \right] dV \end{aligned} \quad (17)$$

对式 (17) 进行极坐标变换, 可得 $\xi_x = r \cos \varphi$, $\xi_y = r \sin \varphi$ 。由于积分域的对称性, 可得式 (17) 中 ξ 的奇次项为 0, 仅剩下偶次项。根据式 (17) 可知:

$$\begin{aligned} \int_H \frac{\omega \langle \varepsilon \rangle}{|\xi|^2} (\xi_x)^4 dV &= \int_H \frac{\omega \langle \varepsilon \rangle}{|\xi|^2} (\xi_y)^4 dV = \\ \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{\omega \langle \varepsilon \rangle}{r^2} r^4 \cos^4 \varphi h r dr d\varphi &= \\ h \int_0^\delta \omega \langle r \rangle r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi &= \frac{3}{8} m \\ \int_H \frac{\omega \langle \varepsilon \rangle}{|\xi|^2} (\xi_x)^2 (\xi_y)^2 dV &= \\ \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{\omega \langle r \rangle}{r^2} r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi h r dr d\varphi &= \\ h \int_0^\delta \omega \langle r \rangle r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{1}{8} m \end{aligned} \quad (18) \quad (19)$$

式中: δ 为物质点 x 影响域的域半径。

将式 (18)、(19) 代入式 (13), 可得

$$\frac{\alpha}{2} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{e}^d = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{m}{4} \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d + \frac{m}{8} \left(\sum_{i=x,y} \varepsilon_{ii}^d \right)^2 \right] \quad (20)$$

根据 $\varepsilon_{xx}^d + \varepsilon_{yy}^d + \varepsilon_{zz}^d = 0$, 由式 (20) 可得

$$\frac{\alpha}{2} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{e}^d = \frac{m\alpha}{16} (\varepsilon_{zz}^d)^2 + \frac{\alpha m}{8} \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (11), 可得

$$W(\theta, \underline{e}^d) = \frac{k'}{2} \left(\frac{dV}{V} \right)^2 + \frac{\alpha m}{16} (\varepsilon_{zz}^d)^2 + \frac{\alpha m}{8} \sum_{i,j=x,y} \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \quad (22)$$

根据式 (22) 等于式 (10), 可得

$$\alpha = \frac{8G}{m}, \quad k' = k + \frac{G}{9} \quad (23)$$

2.3 以状态为基础的近场动力学基本方程

根据以普通状态为基础近场动力学的模型^[13], 可知普通状态为基础的近场动力学的对点力矢量可表示为

$$\underline{T} = \underline{t}^0 \underline{M} \quad (24)$$

式中: \underline{M} 为沿着变形键方向的单位矢量; \underline{T} 为力矢量状态; \underline{t} 为标量力状态。对于普通状态为基础的近场动力学模型, 力矢量平行于键矢量。

能量密度 W 关于伸长状态量 e 的佛汝德导数为^[14]

$$\Delta W = k' \theta (\nabla_{\underline{e}} \theta) \cdot \Delta e + \alpha (\underline{\omega e}^d) \cdot \Delta \underline{e}^d \quad (25)$$

式中: $\nabla_{\underline{e}} \theta$ 为关于伸长状态量 e 的佛汝德导数, 其表达式为

$$\nabla_{\underline{e}} \theta = 2 \frac{\omega x}{m} \quad (26)$$

$\Delta \underline{e}^d$ 为关于偏伸长状态 \underline{e}^d 的佛汝德导数, 其表达式为

$$\underline{e}^d = e - \frac{\theta x}{3} \rightarrow \Delta \underline{e}^d = \Delta e - \frac{x}{3} (\nabla_{\underline{e}} \theta) \cdot \Delta \underline{e} \quad (27)$$

将式 (26)、(27) 代入式 (25), 可得

$$\begin{aligned} \Delta W &= \left[2 \left(k' \theta - \frac{\alpha}{3} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{x} \right) \frac{\omega x}{m} + \alpha (\underline{\omega e}^d) \right] \cdot \Delta e = \\ &\underline{t}^0 \cdot \Delta e \end{aligned} \quad (28)$$

由式 (28) 可得

$$\underline{t}^0 = 2 \left(k' \theta - \frac{\alpha}{3} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{x} \right) \frac{\omega x}{m} + \alpha (\underline{\omega e}^d) \quad (29)$$

由式 (27)、(15) 可得

$$\begin{aligned} (\underline{\omega e}^d) \cdot \underline{x} &= \left[\omega \left(e - \frac{\theta x}{3} \right) \right] \cdot \underline{x} = (\omega e) \cdot \underline{x} - \frac{\theta}{3} (\omega x) \cdot \underline{x} = \\ (\omega e) \cdot \underline{x} - \frac{\theta m}{3} &= \frac{\theta m}{2} - \frac{\theta m}{3} = \frac{\theta m}{6} \end{aligned} \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (29), 可得

$$\underline{t}^0 = \left(2k' - \frac{32}{9} G \right) \theta \frac{\omega x}{m} + \alpha (\omega e) \quad (31)$$

普通状态为基础的近场动力学的对点力可表示为

$$f_{(k)(j)} = t_{(k)(j)}^0(u_{(j)} - u_{(k)}, x_{(j)} - x_{(k)}, t) - t_{(j)(k)}^0(u_{(k)} - u_{(j)}, x_{(k)} - x_{(j)}, t) \quad (32)$$

式中： $t_{(k)(j)}^0(u_{(j)} - u_{(k)}, x_{(j)} - x_{(k)}, t)$ 和 $t_{(j)(k)}^0(u_{(k)} - u_{(j)}, x_{(k)} - x_{(j)}, t)$ 分别为物质点位置 $x_{(k)}$ 和 $x_{(j)}$ 的力密度矢量状态场； $f_{(k)(j)}(u_{(j)} - u_{(k)}, x_{(j)} - x_{(k)}, t)$ 为物质点 $x_{(k)}$ 和 $x_{(j)}$ 的对点力函数。

将式(23)、(31)代入式(32)，可得

$$f_{(k)(j)} = \left(2k - \frac{30G}{9}\right) \left(\frac{\theta_{(i)}}{m_{(i)}} \omega_+ + \frac{\theta_{(j)}}{m_{(j)}} \omega_-\right) + 8Ge \left(\frac{\omega_+}{m_{(i)}} + \frac{\omega_-}{m_{(j)}}\right) \quad (33)$$

将式(33)代入近场动力学基本方程，可得普通状态为基础的近场动力学基本方程表达式为

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \int_H \left[\left(2k - \frac{30G}{9}\right) \left(\frac{\theta_{(i)}}{m_{(i)}} \omega_+ + \frac{\theta_{(j)}}{m_{(j)}} \omega_-\right) x + 8Ge \left(\frac{\omega_+}{m_{(i)}} + \frac{\omega_-}{m_{(j)}}\right) \right] dH + b(x,t) \quad (34)$$

2.4 普通状态为基础的近场动力学损伤理论

为了模拟裂纹，引入变量 $\phi(\xi)$ ，它被称为任何键 ξ 的损伤标量态，它的取值范围为 $0 \leq \phi(\xi) \leq 1$ 。当它取0时表示无损伤的键，当它取1时表示完全破裂的键。 $\psi(e, \phi)$ 为损伤自由能函数，其表达式为^[15-16]

$$\psi(e, \phi) = W \left[(1 - \phi)e \right] \quad (35)$$

$t(e, \phi)$ 为由损伤自由能函数获得的力标量状态，其表达式为

$$t(e, \phi) = \psi_e(e, \phi) \quad (36)$$

式中： $\psi_e(e, \phi)$ 为 $\psi(e, \phi)$ 关于 e 的佛汝德导数。

由式(36)求解可得

$$t(e, \phi) = (1 - \phi)t^0 \left[(1 - \phi)e \right] \quad (37)$$

同理，由式(14)可得

$$\theta \left[(1 - \phi)e \right] = \frac{2\omega x \cdot \left[(1 - \phi)e \right]}{m} \quad (38)$$

偏伸长状态 e^d 可表达为

$$e^d = (1 - \phi)e - e^i \quad (39)$$

从式(37)可知，当 $\phi=1$ 时， $t(e, \phi)=0$ ，这与实际相符。从式(39)可知，对任何破裂键 ξ 都有 e^d 不为0。由式(24)、(31)、(37)可得

$$\underline{T} = t(e, \phi) \underline{M} \quad (40)$$

$$t(e, \phi) = (1 - \phi) \left\{ \left(2k - \frac{30G}{9}\right) \theta \frac{\omega x}{m} + \frac{8G\omega}{m} \left[(1 - \phi)e - \frac{\theta x}{3} \right] \right\} \quad (41)$$

为了模拟裂纹，引入键伸长率 s ，其表达式为

$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{|\xi|} = \frac{e}{|\xi|} \quad (42)$$

式中：当 $s > s_0$ 时，键的对点力为0，否则不为0， s_0 为材料破坏时的临界伸长率^[17]； η 为相对位移矢量，其表达式为

$$\eta = u' - u \quad (43)$$

3 数值方法

将结构离散成带有体积和质量的节点，然后由节点组成网格，因此，式(34)可离散成以下形式：

$$\rho(x)\ddot{u}_i^n = \sum_p \left[\left(2k - \frac{30G}{9}\right) \left(\frac{\theta_{(i)}}{m_{(i)}} \omega_+ + \frac{\theta_{(j)}}{m_{(j)}} \omega_-\right) x + 8Ge_{(i)}^n \left(\frac{\omega_+}{m_{(i)}} + \frac{\omega_-}{m_{(j)}}\right) \right] V_p + b(x,t) \quad (44)$$

式中：上标 n 为时间步，下标为节点号，故 u_i^n 代表第 n 时间步节点 x_i 的位移； V_p 为 p 节点的体积；加速度 \ddot{u}_i^n 可以表示为

$$\ddot{u}_i^n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (45)$$

式中： Δt 为常数。

4 程序算法流程图

由于近场动力学理论是一种无网格粒子法，它的主要思想是把物质离散为带有一定体积和质量的一系列粒子，然后以各个粒子为研究对象进行分析。为了更好地描述近场动力学模拟裂纹扩展和连接过程的程序实现，设计了近场动力学模拟裂纹的算法流程图如图1所示。

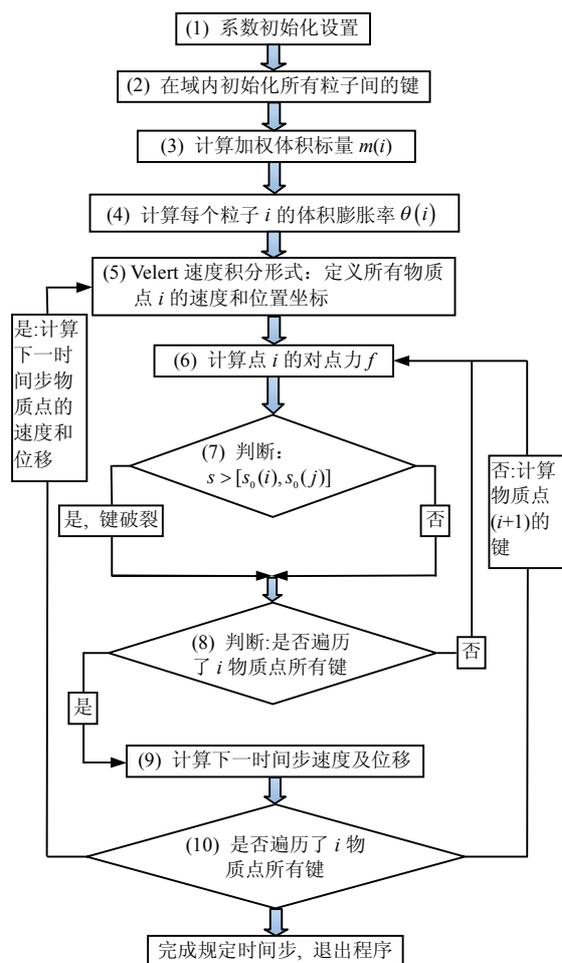


图1 近场动力学模拟裂纹算法

Fig.1 Peridynamic algorithm on modeling crack

5 算例与分析

5.1 算例 1

如图2所示,一长方形中心带孔岩板,其边长分别为 $80\text{ mm} \times 40\text{ mm}$,中心圆孔直径为 16 mm ,弹性模量 $E = 50\text{ GPa}$,密度 $\rho = 2.6\text{ g/cm}^3$,泊松比 $\nu = 0.23$,右侧固定,左侧受 20 MPa 的均布拉伸荷载;板被均匀离散为 200×100 个粒子,计算参数如下: $\Delta x = 4 \times 10^{-4}\text{ m}$, $\delta = 3\Delta x$, $dt = 1.3367 \times 10^{-8}\text{ s}$, $s_0 = 0.0012$ 。当运行1200时间步时数值模拟结果如图3所示。

如图3所示,当时间为 $0.013\text{ }\mu\text{s}$ 时,板未发生破裂;当时间为 $11.97\text{ }\mu\text{s}$ 时,圆孔尖端开始出现裂纹且裂纹扩展方向垂直于拉应力方向;当时间为 $13.3\text{ }\mu\text{s}$ 时,裂纹继续沿垂直于拉应力方向扩展;当时间为 $15.96\text{ }\mu\text{s}$ 时,板完全破裂。板的整个破裂过程的数值模拟结果与实际完全吻合。此经典算例的数值模拟不需要借助任何外在的破裂准则,显示出以普通的状态为基础的近场动力学在模拟破裂时具有巨大的优势。

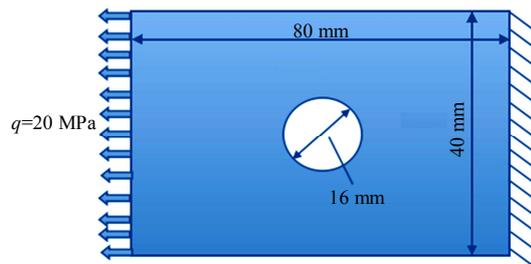


图2 带圆孔板拉伸破裂模型

Fig.2 Tensile fracture model of plate with a circle hole

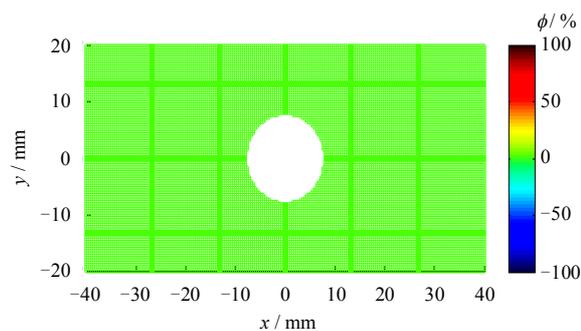
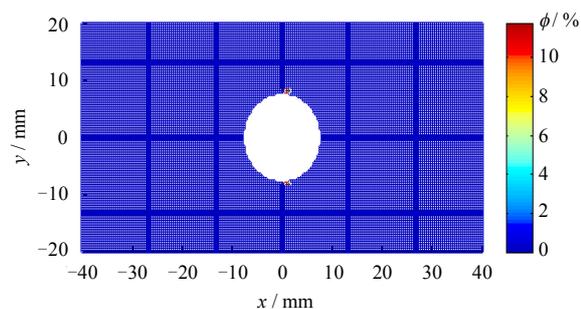
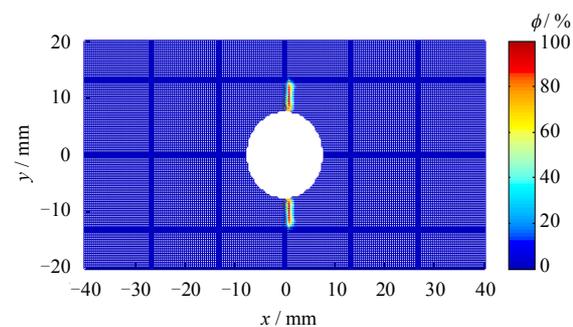
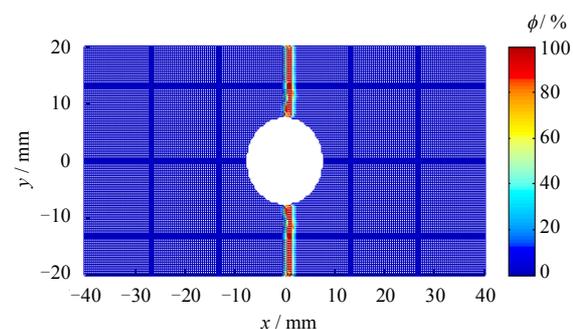
(a) $0.0133\text{ }\mu\text{s}$ (b) $11.97\text{ }\mu\text{s}$ (c) $13.3\text{ }\mu\text{s}$ (d) $15.96\text{ }\mu\text{s}$

图3 拉伸破裂过程

Fig.3 Tensional fracture process

5.2 算例 2

如图 4 所示，正方形岩石试样含有一条裂纹，裂纹的倾角 45° ，裂纹的长度 $0.004\sqrt{2} \text{ m} = 5.6 \text{ mm}$ ，其边长为 $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ 。将该岩样划分为 $200 \times 200 = 40\,000$ 个离散的物质点，相邻两点之间的间距为 $\Delta x = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ 。计算参数如下： $\delta = 3\Delta x$ ， $dt = 1.3367 \times 10^{-8} \text{ s}$ ， s_0 取 0.007 2；与文献[18]一样，岩石弹性模量为 $E = 50 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 2.5 \text{ g/cm}^3$ ，泊松比 $\nu = 0.25$ ，四边加均布荷载，其中 $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 67 \text{ MPa}$ ， $B = \sigma_x / \sigma_y = 1.2$ ，模拟结果如图 5 所示。

从图 5 可以看出，在 $3.99 \mu\text{s}$ 裂纹开始起裂；在 $9.31 \mu\text{s}$ 裂纹继续扩展，并且裂纹的下部开始出现分叉；在 $10.64 \mu\text{s}$ 时，裂纹完全贯通，岩样断裂，且裂纹的下部出现明显的分叉，裂纹基本沿 45° 方向断裂。如图 6 所示，本文的数值模拟结果与 PFPA^{2D}

方法模拟裂纹结果^[18]基本一致。这表明以普通状态为基础的近场动力学方法能够很好地模拟裂纹的扩展和分叉现象，且不需要任何外部准则，突破了键为基础的近场动力学在模拟平面裂纹时泊松比必须为 1/3 的限制，极大地拓宽了近场动力学的应用范围。

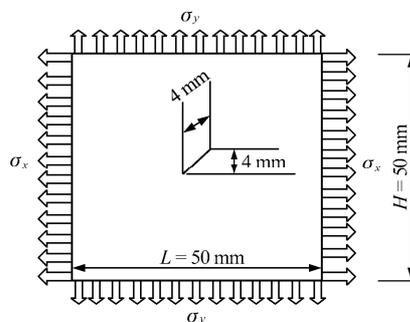


图 4 平面裂纹布置图
Fig.4 Layout of a planar crack

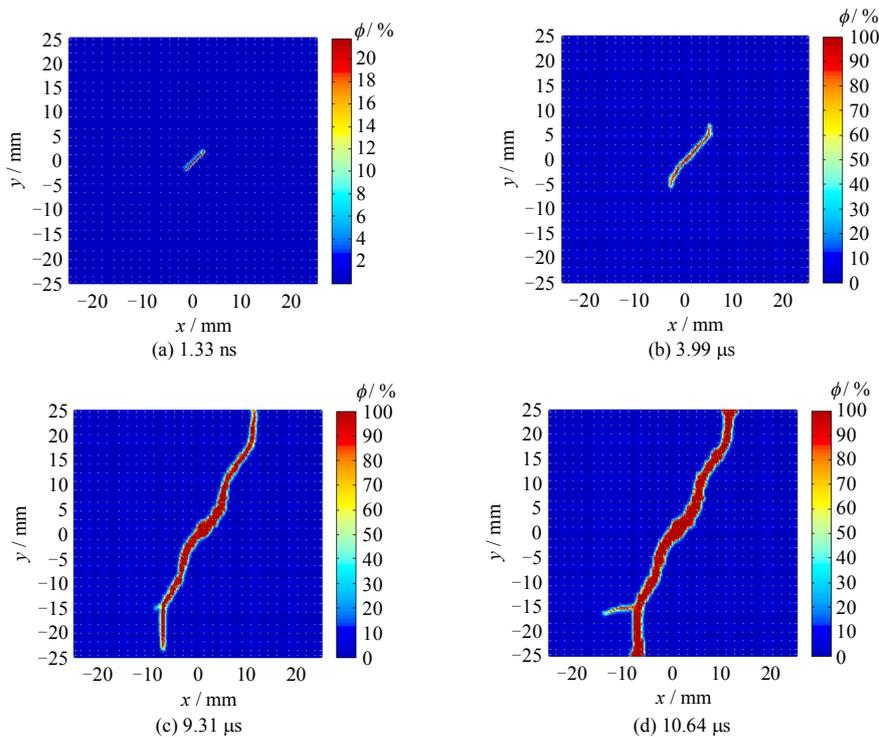


图 5 裂纹的扩展和连接
Fig.5 Propagation and coalescence of cracks

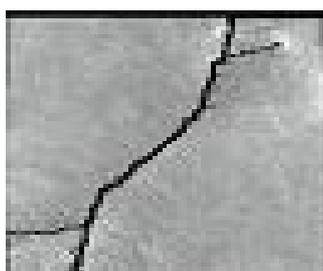


图 6 RFP 动力方法模拟裂纹示意图^[18]
Fig.6 Schematic diagram of modeling crack by RFP method^[18]

6 结 论

(1) 本文首先推导了以普通状态为基础的近场动力学理论，同时加入损伤理论使近场动力学能模拟平面裂纹的扩展和连接过程。

(2) 该方法不需要借助任何外在的断裂准则就能很好地模拟裂纹的扩展和分叉现象，与其他数值方法相比，近场动力学数值方法模拟裂纹扩展效果很好，因此，该方法相对于其他数值方法有很大的

优势。

(3) 以普通状态为基础的近场动力学理论突破了传统的以键为基础的近场动力学模拟平面裂纹时泊松比必须等于 1/3 的限制, 极大地拓宽了近场动力学的应用范围。因此, 以普通状态为基础的近场动力学方法给裂纹的扩展和连接的数值模拟提供了更好的思路。

参 考 文 献

- [1] 黄丹, 章青, 乔丕忠, 等. 近场动力学方法及其应用[J]. 力学进展, 2010, 4(2): 448—459.
HUANG Dan, ZHANG Qing, QIAO Pei-zhong, et al. peridynamic methods and application[J]. **Advances in Mechanics**, 2010, 4(2): 448—459.
- [2] 沈峰, 章青, 黄丹, 等. 冲击荷载作用下混凝土结构破坏过程的近场动力学模拟[J]. 工程力学, 2012, 29(增刊 1): 12—15.
SHEN Feng, ZHANG Qing, HUANG Dan, et al. Peridynamics modeling of failure process of concrete Structure subjected to impact loading[J]. **Engineering Mechanics**, 2012, 29(Supp. 1): 12—15.
- [3] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46: 131—150.
- [4] BELYTSCHKO T B. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 45: 601—620.
- [5] WAGNER G J, MOES N, LIU W K, et al. The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 51: 293—313.
- [6] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering**, 1996, 139: 3—47.
- [7] LIBERSKY L D, PETSEHEK A G. Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials[J]. **Advances in the Free Lagrange Method Lecture Notes in Physics**, 1990, 26: 248—257.
- [8] IZUMI S, KATAKE S. Molecular dynamics study of solid deformation[J]. **Transactions of JSME**, 1993, 59: 263—267.
- [9] SILLING S A, BOBARU F. Peridynamic modeling of membranes and fibers[J]. **International Journal of Nonlinear Mechanics**, 2005, 40: 395—409.
- [10] SILLING S A. Dynamic fracture modeling with a meshfree peridynamic code[M]//BATHE K J. Computational Fluid and Solid Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 2003: 641—644.
- [11] RUBIN D, KREML E, LAI W M. Introduction to continuum mechanics[M]. Boston: Elsevier Science, 1994.
- [12] PARKS M L, SELESON P, PLIMPTON S J, et al. Peridynamics with LAMMPS: A user guide v0.2 Beta[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2010.
- [13] SILLING S A, LEHOUCQ R B. Peridynamic theory of solid mechanics[J]. **Advances in Applied Mechanics**, 2010, 44: 73—168.
- [14] BOBARU F, HA Y D. Adaptive refinement and multiscale modeling in 2D peridynamics[J]. **Journal for Multiscale Computational Engineering**, 2011, 9(6): 635—659.
- [15] SILLING S A, EPTON M, WECKNER O, et al. Peridynamics states and constitutive modeling[J]. **Journal of Elasticity**, 2007, 88: 151—184.
- [16] SILLING S A, ASKARI E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. **Computers & Structures**, 2005, 83: 1526—1535.
- [17] SONG J, AREIAS P M A, BELYTSCHKO T. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2006, 67: 868—893.
- [18] YANG Y F, TANG C A, XIA K W. Study on crack curving and branching mechanism in quasi-brittle materials under dynamic biaxial loading[J]. **International Journal of Fracture**, 2012, 177: 53—72.