

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.03.034

# 一种模拟堆石料的二维多边形离散单元法及程序

罗 滔<sup>1,2</sup>, OOI E T<sup>2</sup>, CHAN A H C<sup>3</sup>, 傅少君<sup>1</sup>

(1. 武汉大学 土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072; 2. 澳大利亚联邦大学 工程与计算机信息学院, 澳大利亚 巴拉腊特 3350;  
3. 塔斯马尼亚大学 工程、信息与计算机技术学院, 澳大利亚 霍巴特 7000)

**摘 要:** 在考虑堆石料真实颗粒形状的基础上, 将每个颗粒用一个多边形离散单元表示, 基于一种线性搜索算法对多边形-多边形之间的接触详情进行检索计算, 引入基于势能原理的法向多边形-多边形接触模型及切向库仑摩擦模型, 形成了一种多边形离散单元计算方法, 并开发了相应的 PDEM 程序。可以从颗粒尺度层面展示颗粒之间的相互作用以及每个颗粒的位移和转动, 帮助进一步揭示颗粒的细观特性(形状、大小、材料特性等)对堆石料的宏观强度和变形的影响。最后采用 PDEM 程序对某粗粒料的二维模型试验进行了数值模拟, 得到了与室内试验一致的应力变形规律, 展现了其方法和程序用于研究堆石料的有效性。

**关 键 词:** 堆石料; 离散单元法; 接触检索; 接触模型; PDEM; 双轴试验

中图分类号: O 158

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2017)03-0883-10

## A 2-D polygon discrete element method and program for simulating rockfill materials

LUO Tao<sup>1,2</sup>, OOI E T<sup>2</sup>, CHAN A H C<sup>3</sup>, FU Shao-jun<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China; 2. School of Engineering & IT, Federation University Australia, Ballarat 3350, Australia; 3. School of Engineering and ICT, University of Tasmania, Hobart 7000, Australia)

**Abstract:** Every single particle is simulated by a polygon discrete element to capture the realistic shape of rockfill materials. A polygon discrete element method (PDEM) is developed by adopting a simple contact detection program and a polygon/polygon contact model. A linear program is adopted to detect the contact details between polygons. Then the normal contact force is calculated by a potential energy based polygon/polygon normal contact model, and a polygon discrete element calculation method is formed. Based on this method, a program called PDEM is developed to study the interaction between particles and both the translational and rotational motion of every particle from the microscopic view. The effect of micro-properties (e.g. particle shape, size, material properties et al.) on the macro-strength and deformation is enabled. A two-dimensional model test of a coarse aggregate was carried out by PDEM program. The stress and deformation laws consistent with the lab experiment were obtained, and the method and procedure were used to study the effectiveness of the rockfill.

**Keywords:** rockfill materials; discrete element method; contact detection; contact model; PDEM; biaxial test

## 1 引 言

对于具有超大粒径及粒径差异显著的堆石料, 由于室内试验的局限性, 难以从堆石料的颗粒实际几何特征及级配组成等方面研究堆石料的物理力学特性及力学行为, 且试样不具备可重复性; 而数值模拟在这些方面具有极大的优越性, 其中离散单元方法为研究单个颗粒对颗粒集合体的行为影响提供

了很好的途径。

比较有代表性的非连续介质数值分析方法有文献[1]提出的离散单元方法(PFC)和文献[2]提出的非连续变形分析方法(DDA)。这两种方法都被广泛应用于岩土工程相关问题的研究, 其中对于颗粒岩土材料方面的研究, PFC 被很多学者采用, 取得了诸多研究成果<sup>[3-9]</sup>; 由于 PFC 方法采用的是单一圆形颗粒, 在模拟颗粒的结构特性问题上存在缺

收稿日期: 2016-01-12

第一作者简介: 罗滔, 男, 1987 年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方法方面的研究工作。E-mail: luotao19870426@126.com

通讯作者: 傅少君, 男, 1969 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事工程数值计算与分析方面的教学与研究工作。E-mail: shaofu69@vip.sina.com

陷<sup>[10]</sup>。堆石料的颗粒粒径较大且形状复杂,其强度主要取决于颗粒间的摩擦力和咬合力,目前常用的离散单元法因采用球形、椭球形或者三角形颗粒对此不能得到很好的模拟效果<sup>[11]</sup>;刘洋等<sup>[12]</sup>采用 6 种颗粒簇讨论了振动碾压下不同形状对颗粒破碎的影响,指出纯圆形颗粒及单一的非圆颗粒不能反映堆石料真实的物理力学特性;张国新等<sup>[13]</sup>曾采用 DDA 方法模拟土的平面应变问题,取得了与物理试验相近的结果,但与真实情况仍存在较大差距。

为了模拟堆石料的真实形状,一些学者常常采用颗粒簇<sup>[8, 12, 14-16]</sup>,即将若干个颗粒绑在一起形成近似堆石料的大颗粒,取得了较好的效果,但依然不能完全揭示任意形状颗粒之间的相互作用机制。很多学者指出,颗粒形状对颗粒集合体的强度和变形特性具有重要影响<sup>[17-19]</sup>。因此,围绕堆石料颗粒真实形状的模拟算法、接触检索及接触模型等方面的研究对提高离散元的适用性及计算精度都具有十分重要的理论意义。

## 2 基本原理

### 2.1 控制方程

同所有离散单元法一样,通过循环计算的方式,跟踪计算颗粒移动状态。根据动态过程中每一时步各颗粒间的相互作用和牛顿运动定律的交替迭代来预测离散群体的行为。每一个循环过程主要包括以下两个主要步骤:

(1) 由作用力和反作用力原理及多边形/多边形接触模型算出当前位置下颗粒间的相互作用力和力矩;

(2) 由牛顿第二定律计算颗粒的平动和转动,更新颗粒的位置,直至达到所要求的循环次数或者颗粒运动趋于稳定或者颗粒受力趋于平衡。

每个颗粒的运动包括颗粒的平动及绕其形心的转动,由牛顿运动定律得颗粒平动和转动方程为

$$\left. \begin{aligned} F_i - C\dot{x}_i &= m\ddot{x}_i \\ M - C^*\dot{\theta} &= I\ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $m$  为颗粒的质量;  $F_i$  为颗粒所受的合力,  $i=1, 2$ ; 包括周围颗粒对其作用力及外力(如重力),  $F_i = (F_e)_i + (F_D)_i + (F_{ex})_i$ ,  $(F_e)_i$  为接触弹性力,来自接触模型;  $(F_D)_i = DV_i$  为接触阻尼力,  $D$  为黏性阻尼,  $V_i$  为颗粒间相对速度;  $(F_{ex})_i$  为其他外力。本文仅考虑重力,即  $i=1$  时  $F_{ex}=0$ ,  $i=2$  时  $F_{ex}=-mg$  ( $g$  为重力加速度);  $I$  为颗粒相对于过其形心轴的转动惯量;  $M$  为颗粒所受合力矩;  $C$  和  $C^*$

为整体阻尼,分别与质量和转动惯量呈正比,即  $C=\alpha m$ ,  $C^*=\alpha I$ ,  $\alpha$  为整体阻尼比例系数;  $x_i$  为颗粒的平动位移;  $\theta$  为颗粒的转动位移。

采用中心差分法对式(1)进行积分得

$$\left. \begin{aligned} (\dot{x}_i)_{N+\frac{1}{2}} &= \left\{ (\dot{x}_i)_{N-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} \right] + (F_i)_N \frac{\Delta t}{m} \right\} / \left\{ 1 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right\} \\ (\dot{\theta})_{N+\frac{1}{2}} &= \left\{ (\dot{\theta})_{N-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} \right] + (M)_N \frac{\Delta t}{I} \right\} / \left\{ 1 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

任意颗粒的新位置为

$$\left. \begin{aligned} (x_i)_{N+1} &= (x_i)_N + (\dot{x}_i)_{N+\frac{1}{2}} \Delta t \\ (\theta)_{N+1} &= (\theta)_N + (\dot{\theta})_{N+\frac{1}{2}} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

当颗粒得到新的位置后,根据接触检索和判断以及接触模型可以得到新的接触力和力矩,返回式(1)迭代,遍历整个颗粒集合,直至满足循环结束条件。

### 2.2 转动惯量

采用基于比例边界有限元<sup>[20-21]</sup>的半解析方法求解任意多边形的转动惯量。

对于图 1 所示任意多边形,绕过其中心点(形心)的轴转动的转动惯量定义为

$$I = \int r^2 dm \quad (4)$$

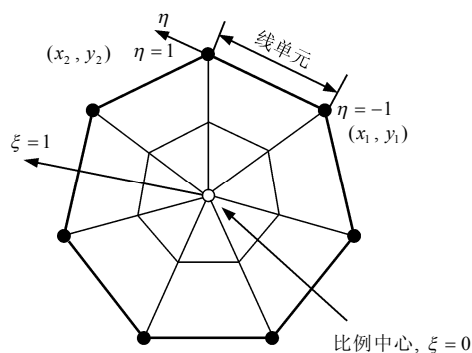


图 1 多边形比例边界有限元坐标系

Fig.1 Coordinate system for polygon scaled boundary finite element method

设多边形内部为均质各向同性材料,即其几何中心与重心重合,则质量  $dm$  可表示为

$$dm = \rho dV = \rho \xi J d\xi d\eta \quad (5)$$

式中： $\rho$  为密度， $J=J(\eta)$  是整体坐标与局部坐标转换的雅克比矩阵的行列式（坐标系如图 1 所示）。其中

$$r = \xi \sqrt{x^2(\eta) + y^2(\eta)} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} x(\eta) \\ y(\eta) \end{Bmatrix} = N(\eta) \mathbf{x}_b \quad (7)$$

$$N(\eta) = \begin{bmatrix} N_1(\eta) & 0 & \dots & N_n(\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\eta) & \dots & 0 & N_n(\eta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中： $N(\eta)$  为形函数， $\mathbf{x}_b = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n]^T$  为节点坐标向量， $n$  为节点总数。

将式 (5)、(6) 代入式 (4) 可得

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^1 \xi^2 (x^2(\eta) + y^2(\eta)) \rho \xi J d\eta d\xi = \int_0^1 \rho \xi^3 \int_{-1}^1 (x^2(\eta) + y^2(\eta)) J d\eta d\xi \quad (9)$$

式 (9) 对  $\xi$  的积分可直接得到解析解，即

$$I = \frac{\rho}{4} \xi^4 \int_{-1}^1 (x^2(\eta) + y^2(\eta)) J d\eta \quad (10)$$

对式 (10) 采用高斯积分可求得转动惯量  $I$ 。

### 2.3 计算控制

对于离散单元方法，时间步长及阻尼的选取直接影响计算结果的稳定性和精度<sup>[22]</sup>。

对于多边形离散单元，时间步长的选取存在几何和物理两个方面的限制。几何限制不允许两个单元在一个时步内沿它们的中心轴线相互贯穿对方；而物理限制要求在一个时步内所产生的动量转移不应超过整个碰撞过程中全部的动量转移。临界时间步长  $\Delta t$  取决于系统中研究对象的最大刚度  $K$  和最小质量  $m$ ，即

$$\Delta t_{cr} = \lambda \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (11)$$

式中： $\lambda$  为保险系数，参考文献[23]取  $\lambda = 0.1$ 。

经验表明，要达到足够的计算精度，对每次碰撞过程的模拟大约要经历 10~50 个计算时步。由于颗粒间接触时间极其短暂，这就要求计算时间步长取得很小 ( $10^{-3} \sim 10^{-6} \text{s}$ )；但如时间步长过小，则会出现振荡并使计算时间延长<sup>[20]</sup>。

黏性阻尼系数参考文[23]选取，即

$$D = \gamma \sqrt{2mK}, \quad \gamma = \frac{\ln(e)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(e)}} \quad (12)$$

式中： $e$  为颗粒碰撞的恢复系数。

## 3 接触检索

为解决圆形或椭圆形颗粒不能描述颗粒间内摩擦角的缺陷，本文采用接近颗粒形状的多边形单元。多边形颗粒间的接触判则、接触状态（接触嵌入面积及接触线的长度）是接触检索算法的关键问题，是计算颗粒间接触力和力矩的基础。为了提高接触检索算法的效率，本文提出，首先近似接触判断，然后据此进行真实接触判断。

### 3.1 近似接触判断

假设某一试样中共有  $N$  个多边形，为了提高检索的效率，首先将所有多边形按照特征半径（即单元上每个顶点至其形心的最大距离）从大到小依次排序；然后选择最大特征半径的多边形为当前目标多边形，在所有剩下的  $N-1$  个多边形中找出与其近似接触的多边形，如果某个多边形与当前目标多边形形心之间的距离小于目标多边形特征半径的 2 倍，则视为近似接触，如图 2 所示；其后以第二大特征半径的多边形为目标多边形，在剩下的没有当作目标多边形的  $N-2$  个多边形中找出其近似接触的多边形，如此重复，直至遍历所有的多边形。

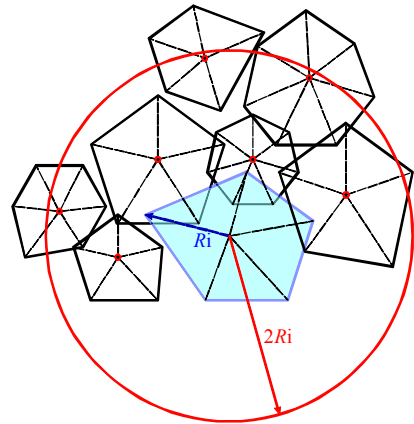


图 2 近似接触判断

Fig.2 Detection of potential contact

### 3.2 真实接触判断

假设两个多边形  $P$  和  $Q$  分别有  $P_n$  和  $Q_n$  条边（角），而且满足 3.1 节的近似接触条件，需进一步判断它们到底有没有接触以及接触状态。本文采用 O'Rourke 等<sup>[24]</sup>提出的线性程序进行多边形的接触判断，该程序采用两个特殊的指针来表示每个多边形上的边，按照一条边追踪另一条边的原则，绕着多边形更新指针，搜索相交点，绕多边形循环两次以内就可以找到所有的相交点，此检索程序的判断

次数仅为  $2(P_n + Q_n)$ 。

从每个多边形中任选一条边开始判断, 如  $p \in P$ ,  $q \in Q$ 。为了判断边与边是否相交, 将多边形的边  $p$  和  $q$  用参数形式表示为

$$\begin{cases} p(s) = p_s + (p_e - p_s)s \\ q(t) = q_s + (q_e - q_s)t \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $s$  和  $t$  为参数;  $p_s$ 、 $q_s$  和  $p_e$ 、 $q_e$  分别是两条边的起点和终点。

当要求  $p(s) = q(t)$  时, 可以得到一组  $(s, t)$  的值, 代表这两条边所在的直线的交点。只有当  $0 \leq s \leq 1$  且  $0 \leq t \leq 1$  时才表示两条边相交。表 1 给出了基于  $s$  和  $t$  的值进行更新的准则,  $p$  代表更新多边形  $P$  的下一条边,  $q$  代表更新多边形  $Q$  的下一条边,  $c$  表示检查两条边的相对位置: 如果  $q_e$  在  $p$  的右边则更新  $q$ ; 如若不是, 则更新  $p$ , 如图 3 所示。

表 1 边与边检索更新准则  
Table 1 Edge and edge update rules

	$s < 0$	$s = 0$	$0 < s < 1$	$s = 1$	$s > 1$
$t < 0$	$c$	$q$	$p$	$p$	$p$
$t = 0$	$p$	$c$	$c$	$p$	$p$
$0 < t < 1$	$q$	$c$	$c$	$p$	$p$
$t = 1$	$q$	$q$	$q$	$p, q$	$p$
$t > 1$	$q$	$q$	$q$	$q$	$c$

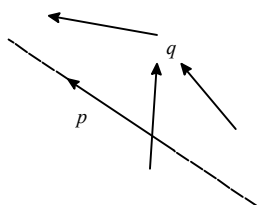


图 3 更新准则  
Fig.3 Update rules

由以上的线性接触检索程序可以找到任意两个相互接触的多边形的交点和嵌入点, 并且得到它们的坐标。这些交点 (通常情况下为两个交点, 除非有相互贯通现象) 和嵌入点构成一个新的多边形, 这个多边形就是两个多边形的叠合部分, 其面积为接触嵌入面积。

如图 4 所示, 对于图 2 中近似接触判断后将会得到目标单元与另外 3 个单元真实接触, 可以得到

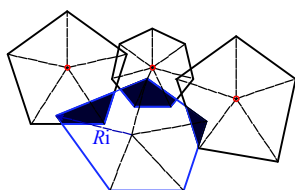


图 4 真实接触判断  
Fig.4 Detection of real contact

组成 3 个接触嵌入面的所有交点和嵌入点, 用于计算接触嵌入面积, 为接触力计算做准备。

### 3.3 接触检索程序流程图

根据 3.1 节和 3.2 节原理, 接触检索程序流程见图 5,  $i, j$  分别为从  $N$  个已按特征半径从大到小排序的多边形中选取的两个进行判断, 依次循环, 对所有多边形单元完成检索。

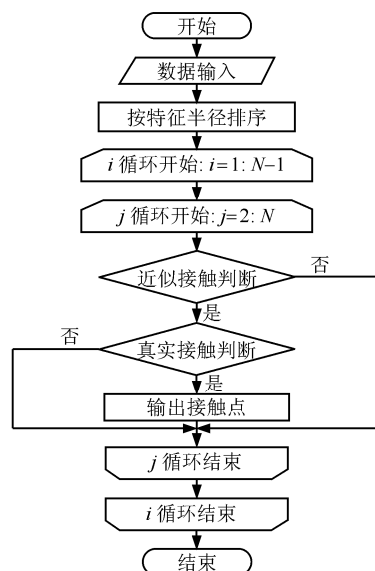


图 5 接触检索程序流程图

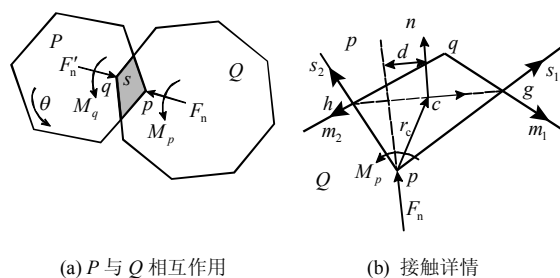
Fig.5 Diagram for contact detection

## 4 接触模型

多边形与多边形之间的接触是典型的角-角接触问题, 或是其特例, 如角-边接触, 其他更加复杂的形式都是它的扩展。本文中采用 Feng 等<sup>[25]</sup>提出的角-角接触模型作为多边形之间法向接触模型, 采用库仑摩擦定律作为切向力-位移准则。

### 4.1 法向接触模型

假设有如图 6 所示的两个多边形  $P, Q$  相接触, 点  $p, q$  分别是侵入对方的顶点, 连接这两个顶点的两对边分别相交于点  $g$  和  $h$ , 它们的坐标分别为  $x_g = (x_g, y_g)$  和  $x_h = (x_h, y_h)$ 。每个多边形单元都有



(a)  $P$  与  $Q$  相互作用

(b) 接触详情

图 6 两个多边形法向接触几何模型

Fig.6 Polygon/polygon normal contact model

平动和转动。多边形  $P$  的位置完全可以由顶点  $p$  的坐标  $\bar{x}_p = (x_p, y_p)$  以及它相对于原始位置的转角  $\theta$  来描述。接触嵌入面积  $S$  由  $p$ 、 $h$ 、 $q$ 、 $g$  4 个点确定。假设  $Q$  完全固定，点  $g$  和  $h$  将完全由多边形  $P$  的位置确定，因而  $S$  是  $\bar{x}_p$  和  $\theta$  的函数，即为  $S = S(\bar{x}_p, \theta)$ 。文献[25]得出，作用在多边形  $P$  顶点  $p$  上的法向接触力和力矩分别为

$$\mathbf{F}_n = -\frac{\partial W(S)}{\partial \bar{x}_p} = -\nabla_{\bar{x}_p} W(S) = -\frac{dW(S)}{dS} \cdot \frac{\partial S(\bar{x}_p, \theta)}{\partial \bar{x}_p} = -W'(S) \cdot \nabla_{\bar{x}_p} S = \|\mathbf{F}_n\| \mathbf{n} \quad (14)$$

$$M_p = -\frac{\partial W(S)}{\partial \theta} = -\frac{dW(S)}{dS} \frac{\partial S(\bar{x}_p, \theta)}{\partial \theta} = -W'(S) S_{,\theta} \quad (15)$$

$\{\mathbf{F}_n, M_p\}$  组成了作用在顶点  $p$  的力-力矩系统，根据文献[25]的推导，这个力对可以被作用在  $\bar{gh}$  中点  $c$  上的一个力等价替换，其大小为

$$\|\mathbf{F}_n\| = b_w W'(S) \quad (16)$$

式中： $b_w$  为接触宽度，即  $\bar{gh}$  的长度。

因此，选择不同的能量方程  $W(S)$ ，更确切地说是它的导数  $W'(S)$ ，将得到不同的法向接触力大小，但不会改变接触力的方向。表 2 中列出了几种建议可以选择的  $W(S)$  及  $W'(S)$  形式，本文选择 Hertz 形式，有

$$\|\mathbf{F}_n\| = k_n S^{1/2} b_w \quad (17)$$

式中： $k_n$  为法向接触刚度，需要注意的是其单位为 Pa，并非 N/m。

表 2  $W(S)$  和  $\|\mathbf{F}_n\|$  的几种形式  
Table 2 Several forms of  $W(S)$  and  $\|\mathbf{F}_n\|$

形式	$W(S)$	$W'(S)$	$\ \mathbf{F}_n\ $
线性	$k_n S$	$k_n$	$k_n b_w$
Hertz 形式	$\frac{2}{3} k_n S^{3/2}$	$k_n S^{1/2}$	$k_n S^{1/2} b_w$
幂形式	$k_n S^m / m$	$k_n S^{m-1}$	$k_n S^{m-1} b_w$

根据作用力与反作用力可知，多边形  $Q$  受到的作用在接触点  $c$  的法相接触力与  $\mathbf{F}_n$  大小相等、方向相反。

#### 4.2 切向摩擦模型

多边形与多边形间切向相互作用采用库仑摩擦定律描述，首先根据上一时步算出的两个单元的相对切向速度试算一个切向力为

$$\mathbf{F}_t^0 = -k_s \mathbf{v}_t \Delta t \quad (18)$$

式中： $k_s$  为切向刚度； $\mathbf{v}_t$  为两个单元间相对切向速度。

当  $\|\mathbf{F}_t^0\|$  小于最大静摩擦力  $F_t^s = \mu_s \|\mathbf{F}_n\|$  时，单元之间的切向相互作用为静摩擦作用，切向力大小为  $\|\mathbf{F}_t^0\|$ ；当  $\|\mathbf{F}_t^0\|$  大于最大静摩擦力  $F_t^s = \mu_s \|\mathbf{F}_n\|$  时，单元之间的切向相互作用为滑动摩擦，切向力大小为  $F_t^d = \mu_d \|\mathbf{F}_n\|$ ， $\mu_s$  和  $\mu_d$  分别为最大静摩擦系数和滑动摩擦系数，本文中不考虑单元之间的粘结力。

#### 4.3 扩展情形

以上角-角接触模型可以扩展为更多常见的接触情况。图 7 给出了几种常见情况。

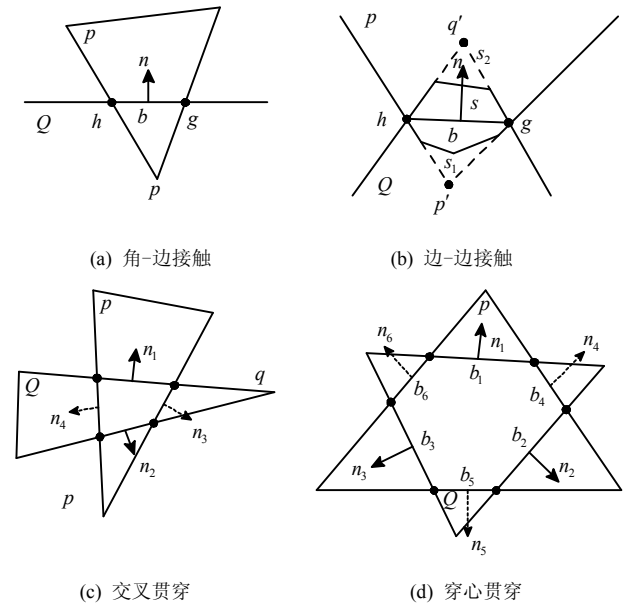


图 7 其他接触形式

Fig.7 Other contact situations

在图 7(a)中，多边形  $Q$  的两条嵌入边共线，这种角-边接触情况是角-角接触模型的特例，法向接触力方向垂直于多边形  $Q$  的接触边。

对于一个多边形有不止一个角嵌入另一个多边形的接触情况，如图 7(b)所示，接触嵌入面积为

$$S = \bar{S} - S_1 - S_2 \quad (19)$$

式中： $\bar{S}$  为多段线  $p'-g-q'-h-p'$  包裹的总面积。 $S_1$  和  $S_2$  与  $\bar{x}_{p'}$  与  $\theta$  无关，因此

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}_{p'}} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}_{p'}}, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial \theta} \quad (20)$$

角-角接触模型可以略加扩展就能处理这种接触情形。

如果一个多边形穿过另一个多边形如图 7(c)和图 7(d)所示，这时可以将其分解为多个角-角接触对，然后每个接触对可以通过角-角接触模型计算。

因此, 图 7(c)中作用在多边形  $P$  上的法向接触力由作用在两个不同接触点上的两个力组成, 合力为

$$\mathbf{F}_n = -W'(S)(b_1\mathbf{n}_1 + b_2\mathbf{n}_2) \quad (21)$$

同理可得作用在多边形  $Q$  上的总接触力为

$$\mathbf{F}'_n = -W'(S)(b_3\mathbf{n}_3 + b_4\mathbf{n}_4) \quad (22)$$

由式 (21)、(22) 可以看出,  $\mathbf{F}_n$  和  $\mathbf{F}'_n$  大小相等、方向相反且共线, 不对接触系统产生力矩作用, 图 7(d)中的接触情形可类似处理。

## 5 程序研制及算例验证

首先, 将堆石料中的每一颗粒用一个凸多边形单元(刚体)表示, 既可较好地再现颗粒形状, 又极大地减少了试样中单元的数量; 再根据式 (1) ~ (22) 及图 5, 在 Matlab 系统平台上开发出一套多边形离散元程序 (polygon discrete element method, PDEM), 先采用 PDEM 模拟一个小球自由落体并反弹起跳的运动, 再应用 PDEM 模拟姜景山等<sup>[23-24]</sup>进行的室内粗粒土二维模型试验, 同时采用 PFC 的 clump 技术生成多边形堆石块体并进行模拟, 比较

数值模拟与室内试验获得的应力变形规律, 以验证本文方法和程序的可靠性 (文中关于室内试验的图片和数据引自文献[26-27])。

### 5.1 小球弹跳模拟

如图 8 所示, 小球 (20 条边的内接多边形替代) 密度为  $2\,500\text{ kg/m}^3$ , 半径  $R=10\text{ mm}$ , 球心离地面高度  $h=20\text{ mm}$ , 在重力作用下自由下落, 碰到地面做弹跳运动。无接触阻尼与接触阻尼为 10 的两种情况运动过程中能量变化分别如图 9(a)和(b)所示, 图中  $E_k$ 、 $E_g$  和  $E_t$  分别为动能、重力势能和总能量,  $E_t = E_k + E_g$ 。从图中可以看出, 无阻尼时, 总能量是守恒的, 跳跃处为接触过程的能量吸收和释放, 考虑阻尼后带来明显的能量耗散。

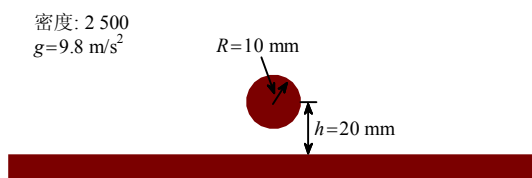


图 8 小球弹跳模型  
Fig.8 Bouncing ball model

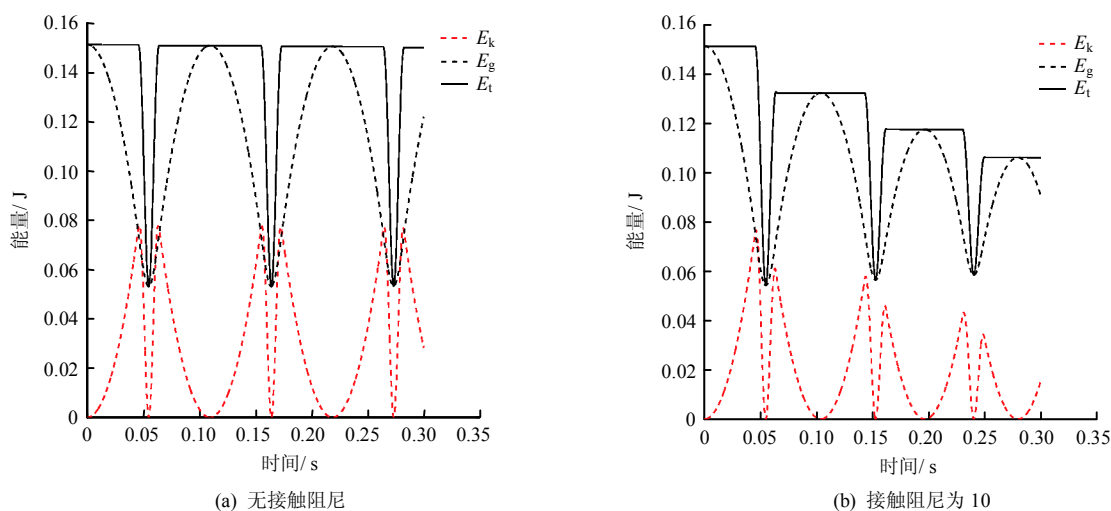


图 9 小球运动过程中的能量变化  
Fig.9 Transmission of energy during motion

### 5.2 双轴试验数值模型

试验装置如图 10(a)所示, PDEM 数值模型如图 10(b)所示, PFC 模型如图 10(c)所示。试样颗粒粒径分布如图 11 所示, PFC 中采用 clump 技术生成多边形大颗粒 (子颗粒半径介于  $0.75\sim 1.25\text{ mm}$ )。试样大小为  $300\text{ mm}\times 600\text{ mm}$ 。在围压  $\sigma_3$  分别为 0.2、0.4、0.6 MPa 下施加竖向力, 进行双轴压缩试验。侧面为刚性约束, 顶面和底面为加载面 (采用应变控制加载), 两侧施加围压。PDEM 应变加载速率为  $10\text{ mm/s}$ , 计算时间步长为  $1\times 10^{-6}\text{ s}$ , PFC 加载速

率为  $50\text{ mm/s}$ , 时间步长为  $4.5\times 10^{-7}\text{ s}$ , PDEM 和 PFC 数值模拟所用材料参数如表 3 所示。

表 3 PDEM 及 PFC 所用材料参数表  
Table 3 Parameters for PDEM and PFC simulation

模型	堆石密度 $\rho/(\text{g/cm}^3)$	法向/切向刚度	颗粒间 摩擦系数	墙体刚度	颗粒与墙 体间摩擦 系数
PDEM	2.25	$1\times 10^9/3\times 10^8\text{ (Pa)}$	0.5	$1\times 10^{10}\text{ (Pa)}$	0
PFC	2.25	$5\times 10^7/3\times 10^7\text{ (N/m)}$	0.5	$1\times 10^9\text{ (N/m)}$	0



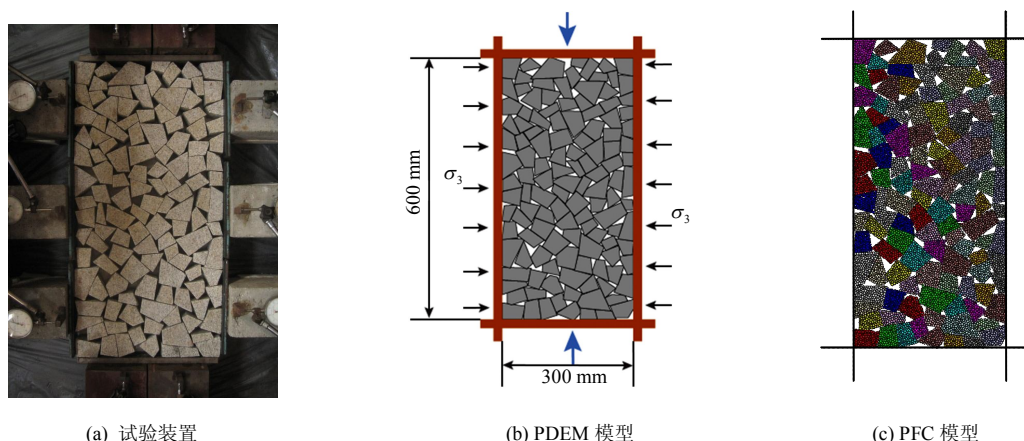


图 10 试验装置

Fig.10 Schematic diagrams of the biaxial test

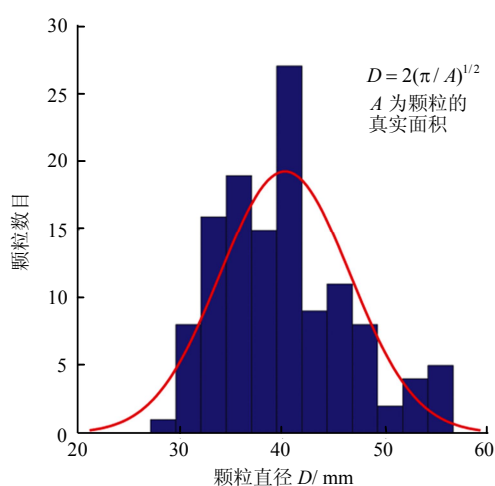


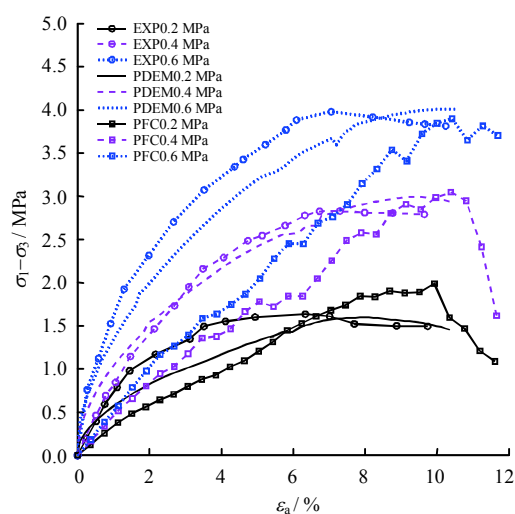
图 11 颗粒粒径分布

Fig.11 Particle size distributions

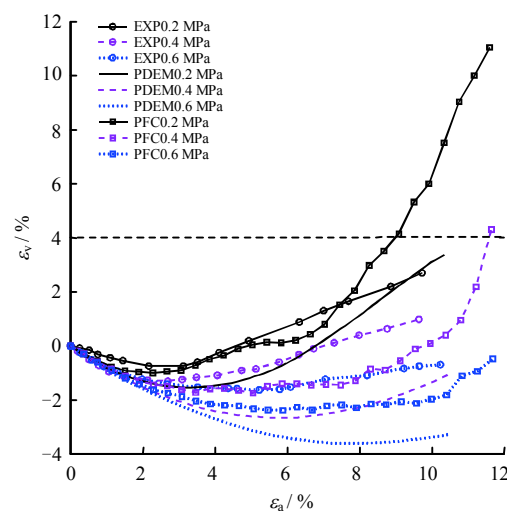
### 5.3 双轴数值模拟结果与分析

#### (1) 应力-应变特性

图 12 为室内试验 (EXP)、PDEM 模拟和 PFC 模拟不同围压 $\sigma_3$ 下试样的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 和 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ 关系曲线对比图。由图可以看出, 对于 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 关系曲线, PDEM 模拟与室内试验结果在数值和规律上都表现出良好的一致性, 峰值偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 随围压 $\sigma_3$ 的增大而增大, 且试样在峰值偏应力之后都表现出一定程度的应变软化特征, PFC 模拟结果的规律不是特别理想, 应该是大颗粒数太少所致。由图还可以看出, 对于 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ 关系, PDEM 模拟与室内试验结果在数值大小上有一定偏差, PFC 模拟更接近室内试验结果, 3 种手段的规律一致, 即 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ 关系曲线先表现为剪缩( $\varepsilon_v < 0$ ), 低围压下的试样继而发生显著地剪胀( $\varepsilon_v > 0$ ), 随着围压的增加, 剪胀性减弱。



(a) 应力-轴向应变关系



(b) 体应变-轴向应变关系

图 12 应力-体应变关系曲线

Fig.12 Stress-strain relationships

#### (2) 抗剪强度

图 13 是强度包线和摩尔圆, 从图中可以看出,

3 种手段的强度包线都具有有很好的线性关系, 符合常用的摩尔-库仑破坏准则;  $f_{cb}$  为咬合力, 室内试验值为 89.5 kPa, PDEM 模拟值为 84.4 kPa, PFC

模拟值为 192.5 kPa,  $\phi$  为内摩擦角, 室内试验值为  $48.2^\circ$ , PDEM 模拟值为  $48.7^\circ$ , PFC 模拟值为  $45.6^\circ$ 。相较而言, PDEM 值更为接近试验。

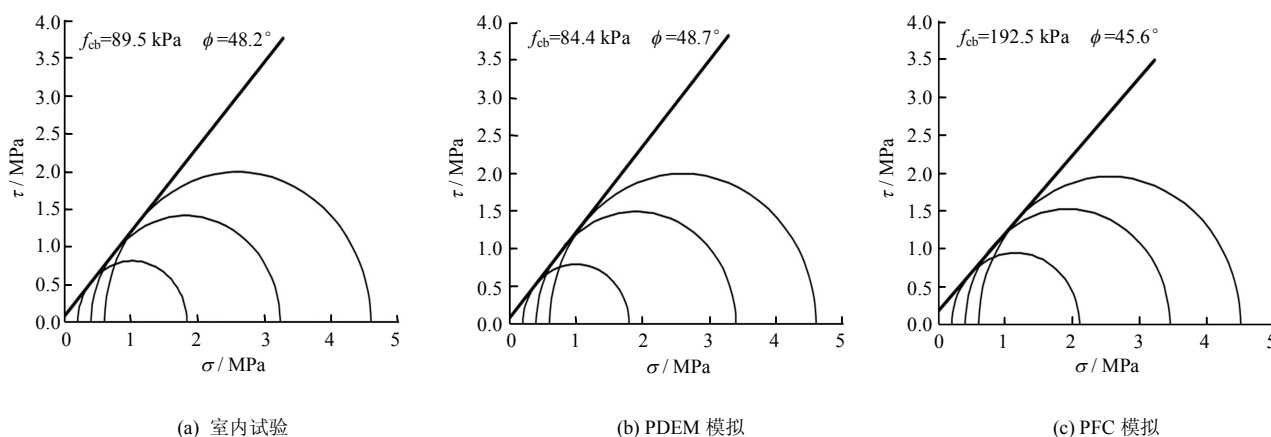


图 13 强度包线和摩尔圆

Fig.13 Mohr-Coulomb failure envelopes and Mohr circles

### (3) 变形特征

以围压  $\sigma_3 = 0.2$  MPa 为例, 图 14 中给出了室内试验和两种数值模拟情况下不同轴向应变时的试样变形, 可以看出, 两种数值模拟的结果与试验结果均具有很好的一致性, 颗粒之间的接触以点-边、边-边接触为主。在剪切过程中, 相邻颗粒位置发生调整, 轴向加载两端处的颗粒竖向位移最大, 中间颗粒的竖向位移较小。试样整体变形为轴向压缩, 横向膨胀。

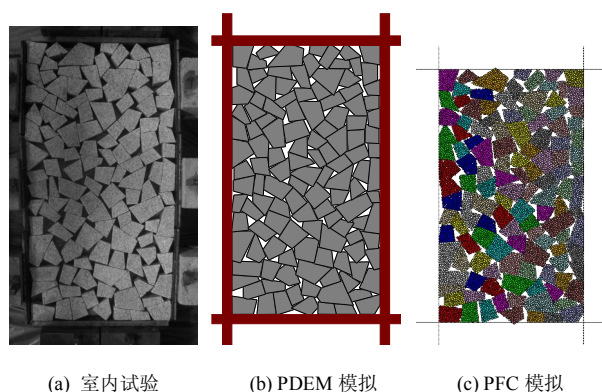


图 14 轴向应变为 6.3% 时的试样变形 ( $\sigma_3 = 0.2$  MPa)

Fig.14 Deformation of sample at  $\epsilon_a = 6.3\%$  ( $\sigma_3 = 0.2$  MPa)

## 6 结 论

(1) 推导了半解析方法计算任意多边形的转动惯量公式, 为牛顿运动定律求解任意多边形单元的转动问题提供了方便。

(2) 引入线性搜索算法实现了求解多边形间交点坐标, 求解任意两个多边形之间的交点最多只要  $2(P_n + Q_n)$  次, 且易于编程实现。

(3) 采用基于势能原理的法向接触模型, 推导了求解多边形-多边形法向接触力, 结合切向摩擦定律构成了一个完整的多边形-多边形接触模型, 为多边形颗粒之间的相互作用提供了理论依据。

(4) 基于以上理论, 开发了多边形离散元计算程序 PDEM, 并对姜景山等的粗粒料二维模型试验进行了数值模拟。通过与 PFC 模拟和试验结果的对比可以看出, 本文方法和程序是可行的, 计算结果能很好地展示堆石料的宏观应力变形规律, 虽然在定量上有一定偏差, 但仅仅用一个单元代表一个堆石颗粒, 总共 125 个单元模拟了二维模型试验并得到了规律相近的结果, 而如果采用 PFC 则需要大量小颗粒通过 clump 技术绑在一起才能得到多边形大颗粒的近似真实形状, 说明该方法和程序具有独特的价值。

由于颗粒破碎对堆石料结构的强度和变形特性都有很大的影响, 下一步将结合多边形比例边界有限元方法对每个多边形颗粒进行应力分析, 引入破裂准则, 以考虑颗粒破碎对堆石料宏观变形机制的影响, 以期从颗粒层面更好地揭示堆石料的强度和变形特性。

**致谢:** 感谢中国国家留学基金对本文第一作者的资助, 使得其可以在澳大利亚从事相关研究。



## 参考文献

- [1] CUNDALL P A, STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. **Geotechnique**, 1979, 29(1): 47—65.
- [2] SHI G H. Discontinuous deformation analysis—a new numerical model for the static and dynamic of block systems[D]. Berkeley: Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1988.
- [3] 周健, 苏燕, 池永. 颗粒流模拟土的工程特性[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(3): 390—396.  
ZHOU Jian, SU Yan, CHI Yong. Simulation of soil properties by particle flow code[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(3): 390—396.
- [4] 蒋明镜, 王富周, 朱合华. 单粒组密砂剪切带的直剪试验离散元数值分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 253—257.  
JIANG Ming-jing, WANG Fu-zhou, ZHU He-hua. Shear band formation in ideal dense sand in direct shear test by discrete analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(1): 253—257.
- [5] 刘一鸣, 杨春和, 霍永胜, 等. 考虑转动阻抗的粗粒土离散元模拟[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 1): 486—493.  
LIU Yi-ming, YANG Chun-he, HUO Yong-sheng, et al. Discrete element modeling of behaviors of coarse grained soils considering rolling resistance[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Supp.1): 486—493.
- [6] 贾学明, 柴贺军, 郑颖人. 土石混合料大型直剪试验的颗粒离散元细观力学模拟研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(9): 2695—2703.  
JIA Xue-ming, CHAI He-jun, ZHENG Ying-ren. Mesomechanics research of large direct shear test on soil and rock aggregate mixture with particle flow code simulation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(9): 2695—2703.
- [7] 邵磊, 迟世春, 贾宇峰. 堆石料大三轴试验的细观模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(增刊): 239—243.  
SHAO Lei, CHI Shi-chun, JIA Yu-feng. Meso-mechanical simulation of a large scale triaxial test of rockfill materials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(Supp.): 239—243.
- [8] 张超, 展旭财, 杨春和. 粗粒料强度及变形特性的细观模拟[J]. 岩土力学, 2013, 34(7): 2077—2083.
- [9] ZHANG Chao, ZHAN Xu-cai, YANG Chun-he. Mesoscopic simulation of strength and deformation characteristics of coarse grained materials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(7): 2077—2083.
- [9] 童朝霞, 周敏, 张连卫, 等. 各向异性颗粒材料双轴压缩试验的离散元数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(增刊): 4227—4232.
- [9] TONG Zhao-xia, ZHOU Min, ZHANG Lian-wei, et al. Numerical modelling of biaxial compression tests for granular materials with inherent anisotropy using DEM[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(Supp.): 4227—4232.
- [10] 周建, 池永. 土的工程力学性质的颗粒流模拟[J]. 固体力学学报, 2004, 25(4): 377—382.  
ZHOU Jian, CHI Yong. Simulating soil properties by particle flow code[J]. **ACTA Mechanica Solida Sinica**, 2004, 25(4): 377—382.
- [11] 常晓林, 马刚, 周伟, 等. 颗粒形状及粒间摩擦对堆石体宏观力学行为的影响[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(4): 646—653.  
CHANG Xiao-lin, MA Gang, ZHOU Wei, et al. Influence of particle shape and inter-particle friction angle on macroscopic response of rockfill[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2012, 34(4): 646—653.
- [12] 刘洋, 李晓柱, 吴顺川. 多块体形状堆石料碾压颗粒破碎数值模拟[J]. 岩土力学, 2014, 35(11): 3269—3280.  
LIU Yang, LI Xiao-zhu, WU Shun-chuan. Numerical simulation of particle crushing for rockfill of different particles shape under rolling compaction[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(11): 3269—3280.
- [13] 张国新, 李广信, 郭瑞平. 不连续变形分析与土的应力应变关系[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2000, 40(8): 102—105.  
ZHANG Guo-xin, LI Guang-xin, GUO Rui-ping. Stress-strain relationship for soil using discontinuous deformation analysis[J]. **J. Tsinghua Univ. (Sci.&Tech.)**, 2000, 40(8): 102—105.
- [14] 刘君, 刘福海, 孔宪京. 考虑破碎的堆石料颗粒流数值模拟[J]. 岩土力学, 2008, 29(增刊): 107—112.  
LIU Jun, LIU Fu-hai, KONG Xian-jing. Particle flow code numerical simulation of particle breakage of

- rockfill[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(Supp.): 107—112.
- [15] CHENG Y P, NAKATA Y, BOLTON M D. Discrete element simulation of crushable soil[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(7): 633—641.
- [16] LOBO-GUERRERO S, VALLEJO L E, VEGA L F. Visualization of crushing evolution in granular under compression using DEM[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2006, 6(3): 195—200.
- [17] TING J M, MEECHUM L R, ROWELL J D. Effect of particle shape on the strength and deformation mechanisms of ellipse-shaped granular assemblages[J]. **Eng. Comput.**, 1995, 12: 99—108.
- [18] HOSSEININIA E S, MIRGHASEMI A A. Numerical simulation of breakage of two-dimensional polygon-shaped particles using discrete element method[J]. **Powder Technol.**, 2006, 166(2): 100—112.
- [19] SAWADA S, PRADHAN T B S. Analysis of anisotropy and particle shape by distinct element method[C]//Proc. 8th Int. Conf. on Computer Methods and Advancements in Geomechanics. Rotterdam: Balkema, 1994: 665—670.
- [20] SONG C, WOLF J P. The scaled boundary finite element method – alias consistent infinitesimal finite-element cell method – for elastodynamics[J]. **Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.**, 1997, 147: 329—355.
- [21] OOI E T, SONG C, TIN-LOI F, et al. Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modeling[J]. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 2012, 91: 319—342.
- [22] 李世海, 汪远年. 三维离散元计算参数选取方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(21): 3642—3651.
- LI Shi-hai, WANG Yuan-nian. Selection study of computational parameters for DEM in geomechanics[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(21): 3642—3651.
- [23] 焦红光, 李靖如, 赵继芬, 等. 关于离散元计算参数的探讨[J]. 河南理工大学学报, 2007, 26(1): 88—93.
- JIAO Hong-guang, LI Jin-ru, ZHAO Ji-fen, et al. Discussion on the calculation parameters of discrete element method[J]. **Journal of Henan Polytechnic University(Natural Science)**, 2007, 26(1): 88—93.
- [24] O'ROURKE J, CHIEN C B, OLSON T, et al. A new linear algorithm for intersecting convex polygons[J]. **Computer Graphics and Image Processing**, 1982, 19: 384—391.
- [25] FENG Y T, HAN K, OWEN D R J. An energy based polyhedron-to-polyhedron to contact model[C]//Proceedings of 3rd MIT Conference Computational Fluid and Solid Mechanics. Cambridge, USA: [s. n.], 14—17. 2005: 210—215.
- [26] 姜景山, 程展林, 姜小兰. 粗粒土二维模型试验研究[J]. 长江科学院院报, 2008, 25(2): 38—41.
- JIANG Jin-shan, CHENG Zhan-lin, JIANG Xiao-lan. Two-dimensional model test for coarse-grained soil[J]. **Journal of Yangze River Scientific Research Institute**, 2008, 25(2): 38—41.
- [27] 姜景山, 程展林, 刘汉龙, 等. 粗粒土二维模型试验的组构分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(5): 811—816.
- JIANG Jin-shan, CHENG Zhan-lin, LIU Han-long, et al. Fabric analysis of two-dimensional tests for coarse-grained soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(5): 811—816.