

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.04.029

弹性半空间夹杂群对平面 SH 波散射的快速多极多域边界元法模拟

刘中宪^{1,2}, 武凤娇¹, 王冬¹, 张海^{1,2}

(1. 天津城建大学 天津市土木建筑结构防护与加固重点实验室, 天津 300384; 2. 天津城建大学 天津市地震工程研究所, 天津 300384)

摘要: 结合快速多极子展开技术, 发展一种高精度快速多域间接边界元方法, 用于求解弹性半空间大规模夹杂群对平面 SH 波的二维散射。数值检验表明, 该方法能够高效精确地求解大规模多域散射问题, 同时可大幅度降低计算存储量, 据此在普通电脑上可实现数百万自由度二维多域出平面散射问题快速求解, 进而分别针对半空间中均匀分布和随机分布的夹杂群, 探讨了夹杂群刚度、形状对其周围平面 SH 波散射的影响规律。研究表明: 由于弹性波的多次散射相干, 使得夹杂群对平面 SH 波的散射与单夹杂体存在显著差异, 总波场空间分布特征和位移频谱特征更为复杂; 平面 SH 波散射特性主要取决于夹杂体的材料软硬程度、几何形状特征和入射波的角度、频率。另外, 研究方法和分析结论可为半空间复杂不均质体对 SH 波散射正、反演分析提供新的技术手段和理论依据。

关键词: 多域散射; 平面 SH 波; 快速多极子展开; 间接边界元法; 夹杂群

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017)04-1154-10

Multi-domain FMM-IBEM simulation of plane SH wave scattering by inclusions in elastic half-space

LIU Zhong-xian^{1,2}, WU Feng-jiao¹, WANG Dong¹, ZHANG Hai^{1,2}

(1. Tianjin Key Laboratory of Civil Structure Protection and Reinforcement, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China;

2. Tianjin Institution of Earthquake Engineering, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China)

Abstract: By combining with the fast multipole expansion method (FMM), a fast and high precision multi-domain indirect boundary element method (IBEM) is developed for solving plane SH wave two-dimensional (2D) scattering by large-scale inclusions in the elastic half-space. Numerical results show that the FMM-IBEM can solve the problems of large-scale multi-domain scattering efficiently and accurately, and the storage capacity is also dramatically reduced. Then the rapid solution of millions degree-of-freedom (DOFs) of plane SH wave scattering problem in the multi-domain is achieved on a personal computer. Finally, in the case of SH wave multiple scattering by inclusions with uniform distribution and random distribution in the half-space, the effects of stiffness and inclusion shape on plane SH wave scattering are investigated. Due to the multiple coherence scattering of elastic wave, the plane SH wave scattering by inclusion group is significantly different from that by single inclusion, and the characteristics of spatial distribution and displacement spectrum of the total wave field become complicated. The scattering properties of plane SH waves mainly depend on material hardness, geometric characteristics, the angle and frequency of incident wave. In addition, this study to some extent provides new techniques and theoretical basis for forward and inversion analysis of elastic wave scattering by complex inclusions in the half-space.

Keywords: multi-domain scattering; plane SH wave; fast multipole expansion; indirect boundary element method; inclusions

1 引言

天然岩土体及人工复合材料中均存在着不同层级、尺度的不均匀性。半空间中夹杂体对弹性波的散射分析可广泛应用于地震(爆炸)波场计算、

地球物理勘探以及无损检测等领域。理论分析方法整体上可分为解析法和数值法。

解析法方面, 袁晓铭^[1]首次采用波函数展开法给出了半空间中圆形夹杂物对平面 SH 波散射的封闭解析解; 史文谱等^[2]利用复变函数法研究了直角

收稿日期: 2015-05-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 51278327); 天津市应用基础与前沿基础研究计划项目(No. 14JCYBJC21900, No. 13JCQNJC07400)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51278327), the Plan of Application Foundation and Research in Cutting-edge Technologies in Tianjin (14JCYBJC21900, 13JCQNJC07400).

第一作者简介: 刘中宪, 男, 1982 年生, 博士, 教授, 研究生导师, 主要从事地震工程、岩土工程方面的研究工作。E-mail: zhongxian1212@163.com

通讯作者: 王冬, 男, 1988 年生, 硕士, 主要从事动力边界元法方面的研究工作。E-mail: wang_dong_0832@163.com

平面区域内含有固定圆形夹杂时波的散射；杨在林等^[3]利用复变函数以及多极坐标法给出了椭圆夹杂和裂纹对平面 SH 波散射问题的理论解；齐辉等^[4]利用复变函数法和 Green 函数法给出了 SH 波对垂直界面附近椭圆形夹杂散射问题的解析解答。

数值法方面, Dravinski 分别采用间接边界积分方程法^[5]和直接边界积分方程法^[6]求解了半空间中夹杂物周围弹性波的散射；梁建文等^[7]采用有限单元法求解了透镜体对地震波的散射, 探讨了透镜体对地震动的非线性放大作用；Heymsfield^[8]采用直接边界元法求解了土层中岩石夹杂物对 SH 波的散射；Tong 等^[9]采用 Nyström 方法求解了三维夹杂对弹性波的散射；刘中宪等^[10]基于 Biot 理论, 采用间接边界积分方程法研究了流体饱和半空间中夹杂物对平面 SV 波的二维散射；Castro 等^[11]采用 BEM 与 MFS 耦合方法求解了夹杂和裂纹对弹性波的二维散射；Kanaun 等^[12]基于体积分方程法结合高斯近似函数研究了任意形状三维夹杂对弹性波的散射。

需要指出的是, 上述研究主要针对小规模夹杂体散射问题求解, 对于现实中存在的大规模夹杂群散射问题, 现有计算方法的计算效率和精度尚有待提高。各类方法中, 边界元法具有高精度、降维、便于处理高梯度变化及无限域问题等优点, 但该方法在实际应用中一个显著弱点在于待求解方程系数矩阵为非稀疏满阵, 对大规模运算其计算效率将大大降低。

本文针对半空间中大规模夹杂群对平面 SH 波的散射问题, 结合快速多极子展开技术, 建立一种新的快速多极子多域间接边界元法 (FMM-IBEM)。其中 FMM 通过中间点策略和影响函数的展开、传递和转移, 将单粒相互作用转换为粒组之间的计算, 由此大幅度降低大规模多体相互作用运算所需的计算量和存储量。目前 FMM-IBEM 在热学^[13]、固体力学^[14]、声学^[15]、电磁学^[16]以及势问题^[17]等领域已得到广泛应用, 在固体中弹性波散射领域也已有少量报道^[18-20]。对于半空间多域散射问题, 由于散射波场构造的复杂性及不同域内多极子展开的差异性, 目前研究成果十分有限。本文将基于 FMM-IBEM 给出详细的求解步骤, 进而尝试利用该方法求解并探讨关键参数对夹杂群周围平面 SH 波散射的影响规律。

2 半空间出平面散射问题多域传统边界元法

计算模型如图 1 所示, 弹性半空间 D_0 中包含大量夹杂体 D_n ($n=1, 2, 3, \dots, N_s$, N_s 为夹杂总数), 假

设均为弹性均匀各向同性介质, D_0 中介质剪切模量为 μ_0 , 密度为 ρ_0 。SH 波在介质 D_0 中的传播速度为 β_0 , $\beta_0^2 = \mu_0 / \rho_0$, 第 n 个夹杂 D_n 中介质剪切模量为 μ_n , 密度为 ρ_n 。SH 波在 D_n 中传播速度为 β_n , $\beta_n^2 = \mu_n / \rho_n$ 。夹杂体与弹性半空间交界面为 B (包括所有夹杂与半空间的交界面), 假定平面 SH 波入射, 待求解问题为夹杂群对平面 SH 波的二维散射。

该问题需分别构造半空间散射波场和夹杂域内散射波场, 半空间中各个夹杂向外辐射的散射波场相互影响, 而不同夹杂域内散射波场仅作用于自身。在交界面 B 和半空间表面 L (波源面记为 S_L) 施加虚拟荷载, 以构造弹性半空间 D_0 的散射波场, 同时, 在第 n 个夹杂面 S_n 上施加虚拟荷载, 以构造该夹杂体的散射波场。然后由半空间表面 L 上应力为 0、交界面 B 上位移和应力连续条件建立方程求解得到虚拟荷载密度。弹性半空间 D_0 中的总波场由散射波场和自由波场叠加得到, 夹杂体 D_n 内总波场仅由 S_n 上散射波场得到。

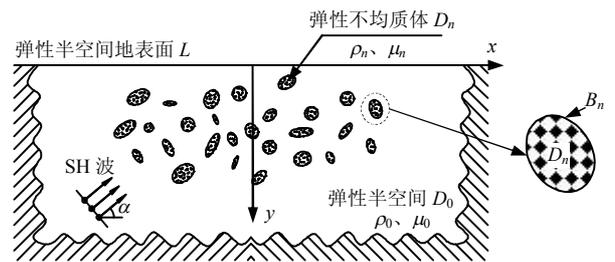


图 1 半空间中夹杂群对平面 SH 波散射计算模型
Fig.1 Calculation model SH waves scattering by inclusions in the half space

夹杂体 D_n 和弹性半空间 D_0 中的总位移可分别表示为

$$u_n^t(\mathbf{x}) = u_n^s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_n \quad (1)$$

$$u_0^t(\mathbf{x}) = u_0^f(\mathbf{x}) + u_0^s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_0 \quad (2)$$

式中: $u_n^t(\mathbf{x})$ 为第 n 个夹杂体内总位移; $u_n^s(\mathbf{x})$ 为第 n 个夹杂体内散射场位移; $u_0^t(\mathbf{x})$ 为弹性半空间中的总位移; $u_0^f(\mathbf{x})$ 为弹性半空间中自由场位移; $u_0^s(\mathbf{x})$ 为弹性半空间中散射场位移。位移场 u 满足下列运动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

各场中的应力为

$$\sigma_n^t = \mu_n \frac{\partial}{\partial l} u_n^t \quad (4)$$

式中: $\partial/\partial l$ 为该点法线方向导数。

消除体力的影响下, 弹性半空间的散射位移和应力可表达为

$$u_0^s(\mathbf{x}) = \int_{S_0} \phi^{(0)}(\mathbf{y})G^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y \quad (5)$$

$$\sigma_0^s(\mathbf{x}) = c\phi^{(0)}(\mathbf{x}) + \int_{S_0} \phi^{(0)}(\mathbf{y})T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y \quad (6)$$

式中: $S_0 = S_L + S_1 + S_2 + \dots + S_{N_s}$ 可看作边界单元上施加的虚拟均布荷载密度; (0)对应区域 D_0 , 当 \mathbf{x} 由内部趋近于 S_0 时, $c=0.5$, 反之由外部趋近于 S_0 时 $c=-0.5$, 而当 $\mathbf{x} \notin S_y$ 时 $c=0$. 其中半空间平面外线源格林函数表达式为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4\mu} H_0^{(2)}(kr) \quad (7)$$

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_1^{(2)}(kr)(\gamma_x n_x + \gamma_y n_y) \quad (8)$$

式中: i 为复数, $i = \sqrt{-1}$; $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 分别为场点和源点; $H_n^{(2)}(\square)$ 表示 n 阶第 2 类 Hankel 函数; n_x 、 n_y 分别为 \mathbf{x} 处边界单元法向量在 x 、 y 方向的分量; 符号 $\gamma_x = (\mathbf{x} - \mathbf{y})_x / r$, $\gamma_y = (\mathbf{x} - \mathbf{y})_y / r$. k 为剪切波波数, $k = \omega / \beta_0$, ω 为 SH 波圆频率.

同理, 根据单层位势理论, 弹性半空间中第 n 个夹杂的散射场位移和应力可分别表达为

$$u_n^s(\mathbf{x}) = \int_{S_n} \phi^{(n)}(\mathbf{y})G_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y \quad (9)$$

$$\sigma_n^s(\mathbf{x}) = c\phi^{(n)}(\mathbf{x}) + \int_{S_n} \phi^{(n)}(\mathbf{y})T^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y \quad (10)$$

式中: $\mathbf{x} \in D_n$; $G_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $T_{ij}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示第 n 个夹杂的位移和应力格林函数.

求解该问题的边界条件为: 弹性半空间表面 L 上的应力为 0、内外介质在交界面 B 上产生的位移和应力相等, 即

$$\sigma_0^s(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in L \quad (11)$$

$$u_0^t(\mathbf{x}) = u_n^t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_n \quad (12)$$

$$\sigma_0^t(\mathbf{x}) = \sigma_n^t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_n \quad (13)$$

式中: B_n 为第 n 个夹杂 D_n 与半空间 D_0 的交界面.

由上述边界条件建立方程组为

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_0} \phi^{(0)}(\mathbf{y})T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y &= 0, \quad \mathbf{x} \in L \\ \int_{S_0} \phi^{(0)}(\mathbf{y})G^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y - \\ \int_{S_n} \phi^{(n)}(\mathbf{y})G^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y &= -u_0^f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_n \\ 0.5[\phi^{(0)}(\mathbf{x}_n) + \phi^{(n)}(\mathbf{x}_n)] + \int_{S_0} \phi^{(0)}(\mathbf{y})T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y - \\ \int_{S_n} \phi^{(n)}(\mathbf{y})T^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y &= -\sigma_0^f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (14) 即为包含奇异性的第 2 类 Fredholm 积

分方程. 求解时需离散边界, 并在每个单元上施加虚拟均布荷载. 假定 $\phi^{(0)}(\mathbf{y})$ 和 $\phi^{(n)}(\mathbf{y})$ 为边界单元上的常量, 离散半空间表面 L 为 N'_1 个单元, 交界面 B 离散为 N_1 个单元 (半空间中夹杂群边界离散总数), 每一个夹杂体边界离散为 N_2 个单元, 虚拟波源离散与边界离散相同并重合, 则存在线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l_1=1}^{N'_1+N_1} \phi^{(0)}(\mathbf{y}_{l_1})t_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_1}) &= 0 \\ \sum_{l_1=1}^{N'_1+N_1} \phi^{(0)}(\mathbf{y}_{l_1})g^{(0)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_1}) - \\ \sum_{l_2=1}^{N_2} \phi^{(n)}(\mathbf{y}_{l_2})g^{(n)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_2}) &= -u_0^f(\mathbf{x}_n) \\ 0.5[\phi^{(0)}(\mathbf{x}_n) + \phi^{(n)}(\mathbf{x}_n)] + \sum_{l_1=1}^{N'_1+N_1} \phi^{(0)}(\mathbf{y}_{l_1})t^{(0)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_1}) - \\ \sum_{l_2=1}^{N_2} \phi^{(n)}(\mathbf{y}_{l_2})t^{(n)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_2}) &= -\sigma_0^f(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$t_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_1}) = \int_{y_{l_1} - \frac{\Delta S}{2}}^{y_{l_1} + \frac{\Delta S}{2}} T_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y})dS_y \quad (16)$$

$$g_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{l_1}) = \int_{y_{l_1} - \frac{\Delta S}{2}}^{y_{l_1} + \frac{\Delta S}{2}} G_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y})dS_y \quad (17)$$

当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 时, 式 (15) ~ (17) 可以直接利用高斯积分法计算, 下文计算中每个单元上采用三点高斯积分. 当 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 时, 则需利用格林函数展开式进行解析求解, 容易推得下式:

$$t_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = 1/2 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) &= \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} -\frac{i}{4\mu_i} H_0^{(2)}(k_i s) ds = \\ &= -\frac{i\Delta S}{4\mu_i} \left[1 + i\frac{2}{\pi} (1 - \gamma - \lg(\frac{k_i \Delta S}{4})) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式中: γ 为 Euler 常数 (可取为 0.577 2); ΔS 为单元长度.

在上述求解中, 积分方程系数矩阵为非对称满阵, 当计算规模较大时, 其运算量和存储量都是巨大的. 下面考虑结合广义极小余量法 (GMRES) [21] 及快速多极子展开技术, 突破常规边界元法求解大规模问题计算瓶颈.

3 半空间出平面散射问题多域 FMM-IBEM

在传统的边界元法中, 采用 GMRES 迭代算法求解大型方程组, 计算近似解的工作量相当大且需要存储大型系数矩阵. 快速多极子边界元法使用树结构作为主要存储和运算对象, 对核函数进行展开和传递, 借助 GMRES 迭代算法, 在每一次迭代中

以树结构取代系数矩阵，与迭代量相乘，通过迭代精度控制得出结果。下文给出格林函数通用展开表达，不同域内格林函数表达仅需改变介质参数即可。

本文采用 Graf 加法定理^[22]对式 (7) 中核心函数 $H_0^{(2)}(\square)$ 进行多极展开：

$$H_0^{(2)}(k_i r) = \sum_{n=-p}^p O_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}}) I_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) \quad (20)$$

式中： p 为展开截断数； y_c 为多极展开中心，且满足 $|\overline{y_c \mathbf{y}}| < |\overline{y_c \mathbf{x}}|$ ，如图 2 所示。函数 $O_n(\overline{y_c \mathbf{x}})$ 和 $I_n(\overline{y_c \mathbf{y}})$ 分别定义为

$$O_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}}) = H_0^{(2)}(k_i |\overline{y_c \mathbf{x}}|) e^{i n \varphi} \quad (21)$$

$$I_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) = J_n(k_i |\overline{y_c \mathbf{y}}|) e^{i n \varphi} \quad (22)$$

式中： $J_n(\square)$ 为第 1 类贝塞尔函数； φ 为对应向量极角。

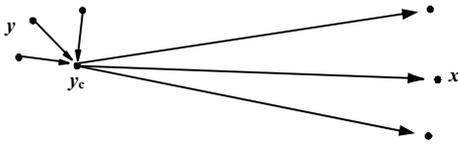


图 2 多极展开
Fig.2 Multipole expansion

将式 (20) 代入式 (5) 可得积分式的多极展开为

$$\int_{S_i} \phi_i(\mathbf{y}) G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = \frac{-i}{4\mu_i} \sum_{n=-p}^p O_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}}) M_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) \quad (23)$$

式中： $M_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}})$ 称为关于点 y_c 多极展开系数，即

$$M_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) = \int_{S_i} \phi_i(\mathbf{y}) I_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) dS_y \quad (24)$$

从式 (23) 可以看出，核函数已经被分离成 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 独立的两部分，从而 $M_n(k_i, y_c)$ 只需计算一次便可重复用于计算不同 \mathbf{x} 中，如图 2 所示。

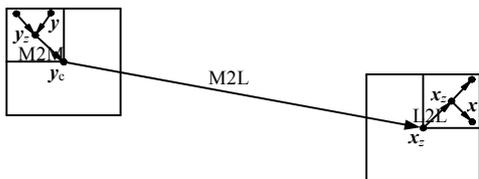


图 3 FMM-IBEM 展开相关点及传递
Fig.3 The related points for FMM-BEM and transfer

如图 3 所示，假设点 y_c 被移动到附近新的一点 y_z ，则式 (24) 通过 M2M 传递可表达为

$$M_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{n-m}(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}_z}) M_m(k_i, \overline{y_z \mathbf{y}}) \quad (25)$$

运用上述方法，能够单独运用多极展开计算积分式 (5) 和式 (6)。然而，为了更有效地计算该积分式，可在快速多极中引进局部展开。在此之前，需引进结点邻居和相互作用列表两个概念。

两结点互为邻居是指两结点位于同一层且至少共享一个角点；结点的相互作用列表是指它们的父结点是邻居关系，但它们本身不互为邻居。在二维二叉树结构中，一个结点至多存在 8 个邻居结点，相互作用列表结中至多存在 27 个结点。

如图 3 所示，设定一点 x_c 靠近场点 \mathbf{x} ，且满足 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| < |\mathbf{y}_c - \mathbf{x}_c|$ ，类似多极展开，对式 (23) 进行局部展开，可表达为

$$\int_{S_i} \phi_i(\mathbf{y}) G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = \frac{-i}{4\mu_i} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} L_n^{n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_c}) I_{n_1}(k_i, \overline{x_c \mathbf{x}}) \quad (26)$$

$$L_n^{n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_c}) = O_{-n-n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_c}) M_n(k_i, \overline{y_c \mathbf{y}}) \quad (27)$$

式 (27) 同时也给出了 M2L 传递关系。

进一步将点 x_c 移动到附近新的一点 x_z ，局部展开系数传递 L2L 的传递关系式为

$$L_n^{n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_c}) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} I_{n_1-m_1}(k_i, \overline{x_c \mathbf{x}_z}) L_n^{n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_z}) \quad (28)$$

利用上式可以逐一得到各层结点的局部展开系数。同理，由式 (4) 可得式 (6) 的最终展开式为

$$\int_{S_i} \phi_i(\mathbf{y}) T_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = \frac{-i}{4} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} L_n^{n_1}(k_i, \overline{y_c \mathbf{x}_c}) \frac{\partial I_{n_1}(k_i, \overline{x_c \mathbf{x}})}{\partial \bar{n}} \quad (29)$$

将展开式 (26) 和式 (29) 替换式 (5) 和式 (6)，采用 GMRES 迭代求解运算得出结果，至此完成本文方法的全部过程。求得虚拟均布荷载密度，则可利用式 (1)、(2) 和 (4) 即可求出边界 B 以及 B 内、外域任一点位移和应力。

该方法的具体实施过程表述如下：

第 1 步：建立模型，将所有夹杂体边界离散化，这与常规 BEM 一致，进而自动生成自适应树结构。

第 2 步：下行遍历计算多极展开系数，通过式 (24) 将源点 \mathbf{y} 信息传给叶子结点，进而通过式 (25) 得到各层结点多极展开系数。

第 3 步：上行遍历计算局部展开系数，将树结构各层结点的多极展开系数传递形成相应局部展开系数 (M2L)，式 (27) 构建此关系，相应即指边界父结点接收非邻居结点的多极展开系数，边界子结点接收相互作用列表的多极展开系数。通过式 (28) 得到各层结点局部展开系数。

第4步：将叶子结点处累加而来的所有局部展开系数通过局部展开传给边界点 \mathbf{x} ，完成整个展开以及传递过程。剩余近场源点，即叶子结点的邻居以及自身所包含的源点，直接采用常规 IBEM 计算。

4 半空间多域 FMM-IBEM 计算精度及效率

以半空间单夹杂对波的散射为例，检验快速多极子边界元法的计算精度及计算效率。引入无量纲频率的概念，定义为散射体等效直径与入射波波长之比，即 $\eta = 2a/\lambda = \omega a/\pi\beta$ ， a 为夹杂半径。分别利用快速多极子间接边界元法和解析法^[1]计算半空间圆形夹杂对平面 SH 波的散射。图 4 所示为半空间圆形夹杂散射下半空间表面位移幅值结果对比情况。图 4(a)为单频情况表面位移幅值，其计算参数为：夹杂内外密度比 $\rho_1/\rho_0 = 2/3$ ，剪切波速比 $\beta_1/\beta_0 = 1/2$ ，无量纲频率 $\eta = 0.5$ ，夹杂边界离散 200 个单元，地表离散 1 000 个单元（地表离散宽度为 $6a$ ）。图 4(b)为半空间表面夹杂正上方点位位移幅值谱计算结果，计算参数见图 4(b)。容易看出，本文所发展的快速多极子多域间接边界元法同精确解析解结果吻合良好。

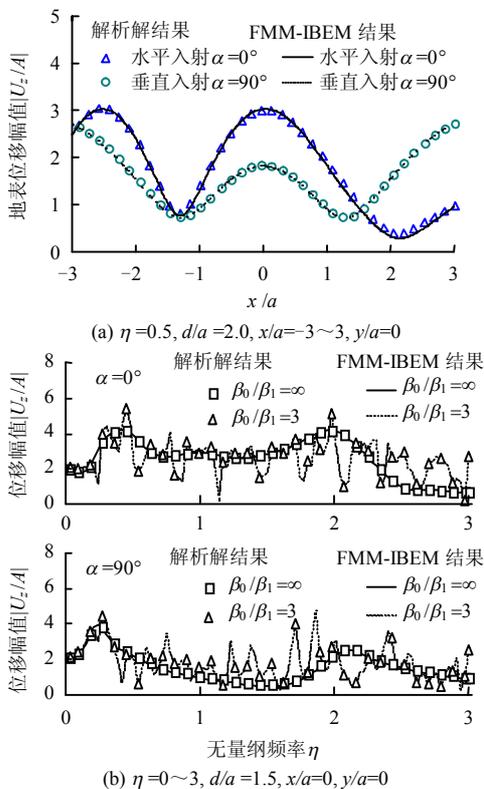


图 4 半空间中含夹杂物表面位移幅值(谱) FMM-IBEM 和解析解结果比较

Fig.4 Comparisons between FMM-IBEM and analytical solution for the surface displacement amplitude (spectrum) in the half-space

在精度检验基础上，以半空间圆形夹杂对平面 SH 波的散射为例，考察 FMM-IBEM 的计算效率，并与传统 IBEM 算法对比。图 5 给出了 CPU 计算时间与计算自由度之间的关系，考虑 SH 波垂直入射 ($\alpha = 90^\circ$)。 $D_{OF} = 300 \sim 1\,020\,000$ ，收敛残差 $\varepsilon = 10^{-3}$ ，夹杂内外密度比 $\rho_1/\rho_0 = 1.0$ ，剪切波速比 $\beta_1/\beta_0 = 1/2$ ，无量纲频率 $\eta = 1.0$ 。采用常规 IBEM 求解，CPU 计算时间随自由度呈 $O(N^2)$ 增长 (N 为计算自由度数)，当自由度达到 17 000 时计算时间已经超过 36 000 s。然而，若采用本文发展的 FMM-IBEM 方法，1 020 000 自由度问题计算时间不到 2 000 s，且计算时间随自由度近似呈线性增加 ($O(N)$ 量级)，充分证明了本文算法在计算效率上有数量级上的提高，突破了常规 IBEM 难以高效求解大规模问题的计算瓶颈。

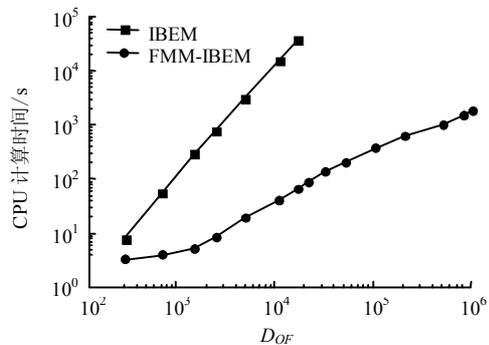


图 5 FMM-IBEM 和常规 IBEM 运算的 CPU 计算时间对比
Fig.5 Comparison of CPU time between FMM-IBEM and IBEM

需要指出的是，上述计算结果以及 CPU 计算时间统计，均是在 16G 内存、64 位 Win7 操作系统的个人电脑上 (Intel (E3) 3.2 GHz CPU)，使用 Matlab R2012a 进行编程运算得到，且为 GMRES 迭代收敛时所需计算时间。若采用 Fortran 编译器，计算效率还可进一步提高。

5 数值算例

本节采用 FMM-IBEM 研究半空间多域散射问题。首先，研究不同刚度圆形夹杂群对 SH 波多个入射角度下的散射情况；其次，分析 SH 波入射下，不同形状夹杂群附近的散射特性；最后，给出半空间中不同刚度随机夹杂群对 SH 波的散射，并得出了若干有益规律。

5.1 不同刚度圆形夹杂群对 SH 波的散射

首先考虑如图 1 半空间夹杂群模型，半空间表面以下定义坐标 $\{(x, y)|x = -14.5a \sim 14.5a, y = 5.5a \sim 21.5a\}$ 区域内建立 60 个整齐排列的圆形夹杂，夹杂

圆形间距为 $3a$ ， a 为圆形夹杂半径，地表离散宽度 $L=40a$ 。采用本文 FMM-IBEM，模拟该夹杂群对 SH 波多个入射角度下的散射作用，图 6 给出了不同刚度（孔洞、软夹杂和硬夹杂）圆夹杂表面位移幅值结果。假定同一模型中每一个夹杂内部介质相同，具体计算参数为：夹杂内、外密度比 $\rho_n / \rho_0 = 1.0$ ，剪切波速比 $\beta_n / \beta_0 = 0.001$ （孔洞）、0.5、2.0，内外阻尼比 ζ 均为 1.0%。入射波换算无量纲频率，取 η 分别为 0.5、1.0、5.0，SH 波入射角度 α 分别为 0° 、 45° 、 90° 。每一个圆形夹杂边界离散数按入射频率不同分别取为 50、100、200、300、500，地表离散数均为 1 000，则相应的计算自由度 D_{OF} 分别为 13 000、25 000、61 000，CPU 计算时间分别约为 123、183、376 s。同一频率不同入射角度以及同一频率不同刚度计算时间相当，但与图 5 计算时间有所差异。这主要是由于本节算例为夹杂群（多域散射）散射问题，其网格划分以及迭代收敛速率不同。

数值结果表明：SH 波的入射频率和角度、夹杂群的刚度对半空间表面位移分布特征具有显著影

响：①如硬夹杂周围波水平入射情况，较低频入射时背波一侧位移放大更为明显，而高频波入射下则迎波一侧放大显著。随频率增加，夹杂群对波的散射特性更加复杂（较小区域内位移反应差别很大），且夹杂群附近半空间表面位移幅值均有一定的放大效应。②对同一入射频率、软夹杂群和孔洞群情况的表面位移反应特征较为接近，但与硬夹杂差异显著。③另外，考虑入射角度影响，同一入射频率，SH 波掠入射或斜入射下表面位移幅值明显大于垂直入射情况，例如 $\eta=1.0$ ， $\alpha=0^\circ$ 或 45° ，表面位移幅值超过 4.0。高频波 $\alpha=45^\circ$ 斜入射情况，夹杂或孔洞群右侧方表面位移降幅明显，波的屏障效应显著。但 $\alpha=0^\circ$ 掠入射情况，对本文模型，夹杂群屏障作用不明显。因此，在地震工程应用上，位于夹杂群附近的建筑物、构筑物地震响应分析需考虑夹杂群对地震波的散射放大效应以及地震动空间差动特征，若采用地震波一致输入则可能出现较大误差。另外，尤其需注意不同入射波频率和角度、不同夹杂刚度下，半空间表面波放大或屏障效应的空间分布差别。

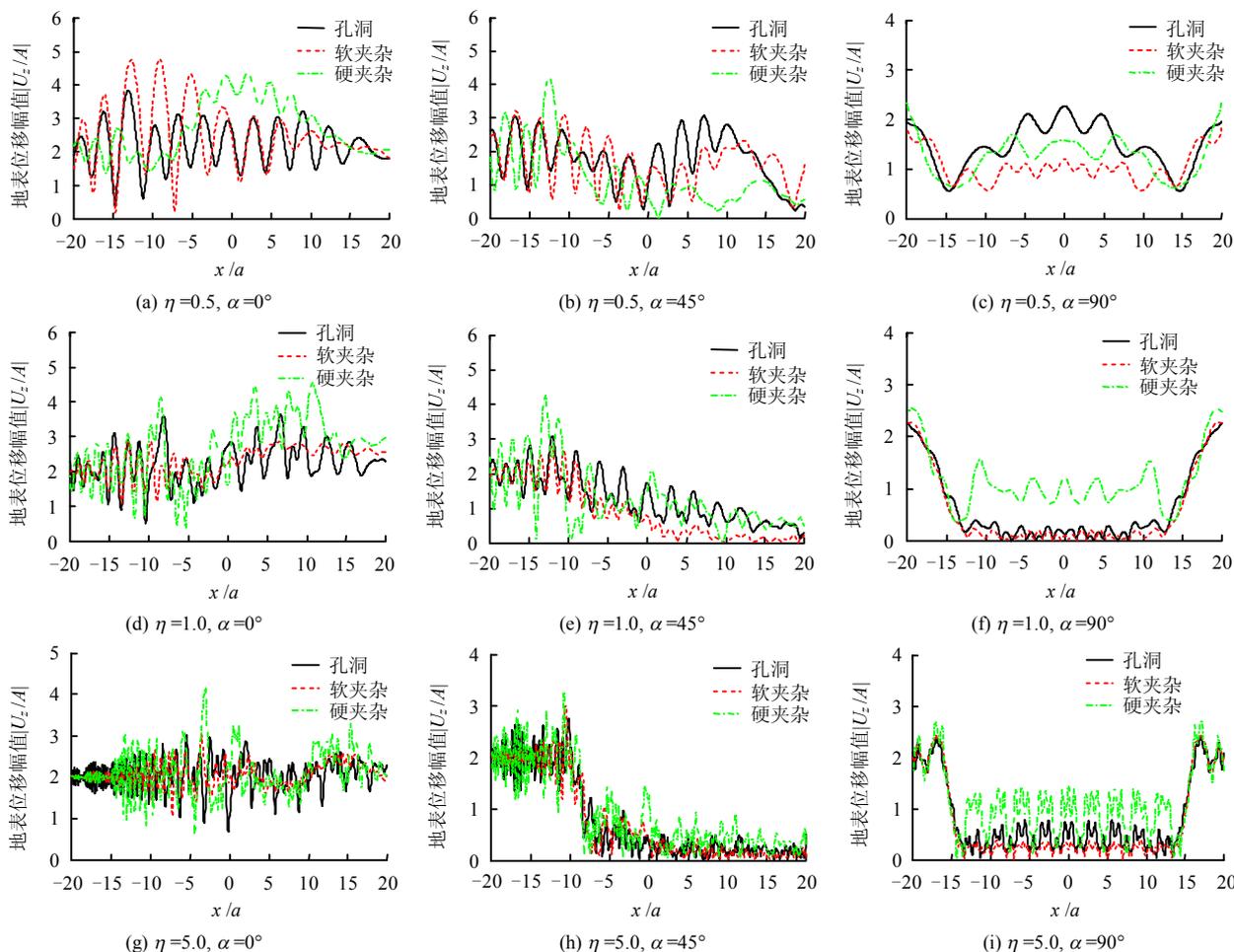


图 6 不同刚度圆形夹杂群对平面 SH 波散射的表面位移幅值

Fig.6 Surface displacement amplitudes of plane SH wave scattering on different stiffness circular inclusions

5.2 不同形状夹杂群在 SH 波入射下的位移云图

考虑实际当中夹杂形状的多变性, 图 7 给出了不同形状夹杂群对 SH 散射的位移幅值云图。计算参数: 夹杂内外密度比 $\rho_n / \rho_0 = 1.0$, 剪切波速比 $\beta_n / \beta_0 = 1/2$ (限于篇幅, 这里仅考虑软夹杂情况), 内外阻尼比 ζ 均为 1.0%。单个夹杂形状分别为 $b/a=0.2, 0.5, 1.0$ (圆夹杂), b 为椭圆夹杂短轴半径, 入射波换算无量纲频率 η 分别为 0.5、1.0、5.0, SH 波入射角度 $\alpha=90^\circ$ 。每一个椭圆形夹杂边界离散数按入射频率不同分别取为 100、200、500, 半空间表面离散数均为 1 000, 则相应的计算自由度 D_{OF} 分别为 13 000、25 000、61 000, 椭圆夹杂群 CPU 计算时间分别约为 123 (101、110 s)、183 (132、

157 s)、376 s (267、328 s), 其中括号内对应 b/a 分别为 0.2、0.5 的情况。

数值结果表明: SH 波入射情况下, 随频率增加夹杂群附近波的散射特性更加复杂, 背波一侧阴影区越显著, 但位移峰值有所下降。同一入射频率下, SH 波入射下夹杂形状越扁散射越弱, 即位移幅值越小, 如 $\eta=1.0, b/a=1.0$ 时, 位移幅值接近 6, 超过 $b/a=0.2$ 情况的 30%。各情况位移峰值几乎集中在夹杂内部以及近地表层 (阴影区两侧), 这主要由于夹杂内部介质较软以及夹杂群对 SH 波的屏障作用所致。另外, 扁夹杂群对 SH 波的屏障作用明显低于圆夹杂, 这主要由于夹杂形状越扁, 对波的整体耗散效应越弱。

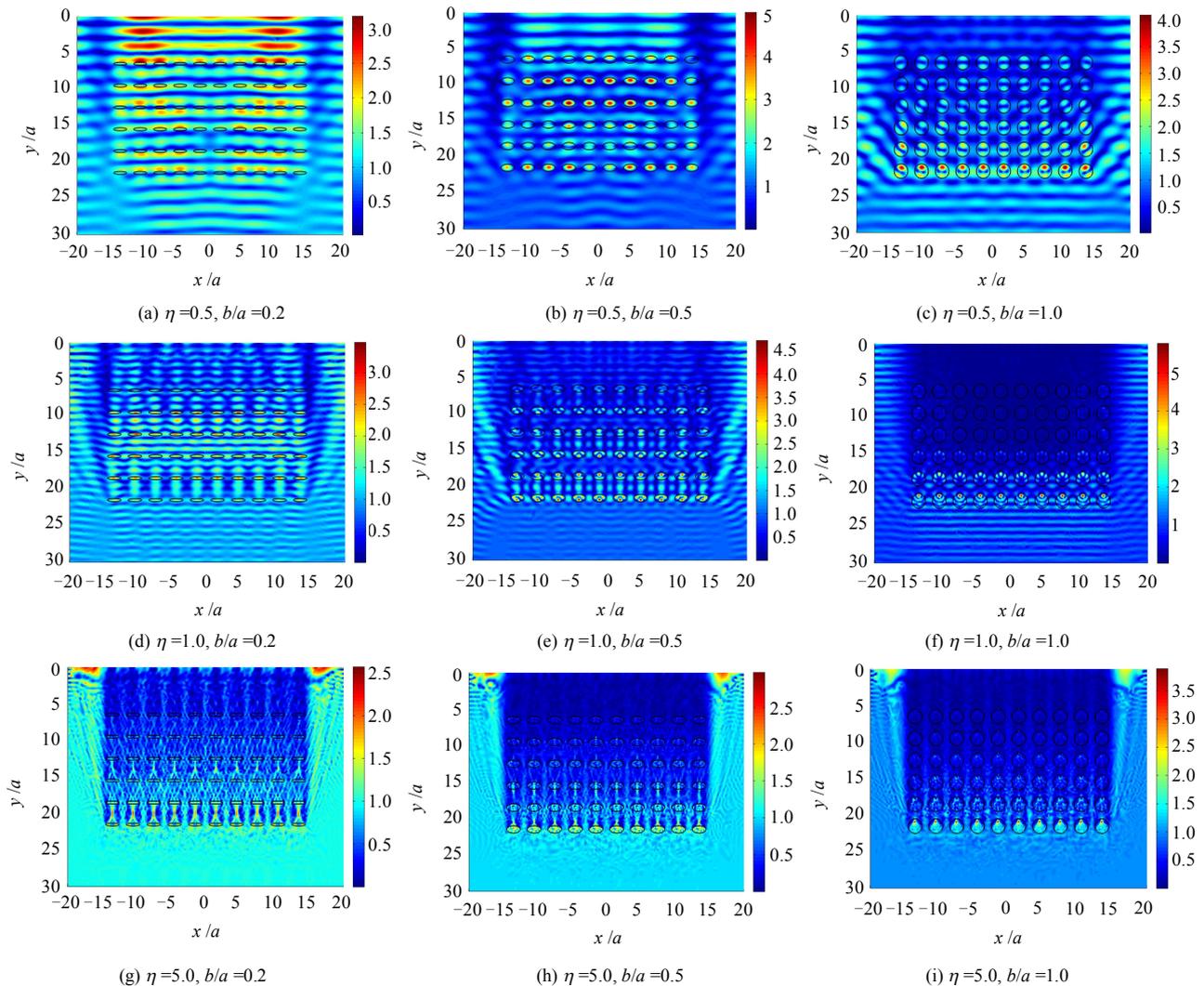


图 7 平面 SH 波入射下椭圆夹杂群附近位移云图

Fig.7 Displacement nephograms near the elliptic inclusions under incident plane SH wave

5.3 不同刚度随机夹杂群在 SH 波入射下的位移云图

考虑自然当中夹杂分布的随机性, 图 8 给出了半空间中随机夹杂群对 SH 波散射的位移幅值云

图。夹杂个数取为 60 个。为简化考虑, 取 $b/a=0.2$, 其他参数同上文整齐排列情况。扁夹杂群模型的 CPU 计算时间按频率不同分别约为 98、130、273 s,

不同刚度模型计算时间相当，不同频率计算时间有所差异是由于频率越高所需截断数越大所致。

数值结果表明：夹杂群刚度对空间域位移反应特征影响显著，且不同频率下刚度的影响规律有所差别。孔洞群对 SH 波的屏障作用明显强于软夹杂

群和硬夹杂群，且频率越高，屏障作用越显著。孔洞群位移峰值集中在迎波面一侧，软夹杂群峰值则主要集中在夹杂内部。对硬夹杂群情况，由于夹杂之间散射波能量较大，位移峰值集中于各夹杂体之间，在部分频段可能出现显著的位移放大效应。

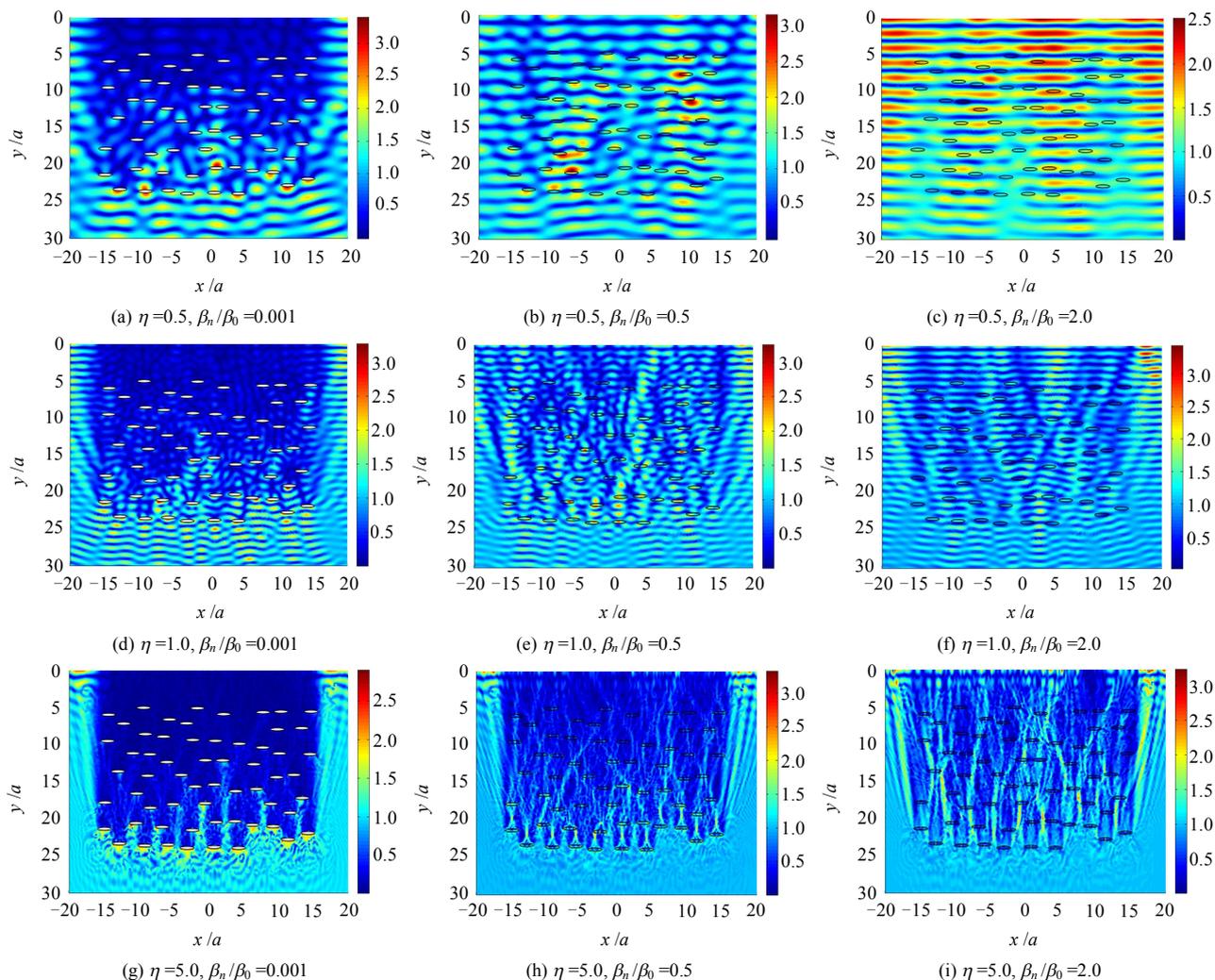


图 8 平面 SH 波入射下随机分布扁夹杂群附近位移云图

Fig.8 Displacement nephograms near random flat inclusions under incident plane SH wave

5.4 半空间表面位移谱分析

为更全面地反映大规模夹杂群对平面 SH 波散射的频谱特性，图 9 给出了 SH 波入射下不同刚度圆形夹杂半空间表面典型点上的位移幅值谱。对应上述分析，无量纲频率取为 0~5，考虑掠入射和垂直入射情况。

SH 波垂直入射时，以半空间表面 x/a 为 -20、-10 和 0 为观察点。如图所示，由于夹杂群对波的多次散射以及散射波的相干效应，表面位移幅值谱曲线振荡比较剧烈，单一夹杂情况差别十分显著（见图 4）。从空间分布看，夹杂群上方中间方位 ($x/a=0$)，波散射效应更为显著，低频段 ($\eta < 0.5$)

夹杂群主要表现为放大效应，高频段 ($\eta > 3.0$) 孔洞和软夹杂主要为屏障效应，而硬夹杂屏障效应较弱。对边缘部位 ($x/a=-20$)，散射波仅在个别频段作用明显。

SH 波掠入射情况，以半空间表面 $x/a=-10.0$ 和 10 为观察点。位移幅值谱整体大于垂直入射，且硬夹杂位移幅值较大，例如掠入射最大位移峰值在 4~6 之间，而垂直入射则在 3~5 之间。这主要是由于水平入射波易于在半空间表面和硬夹杂群之间形成能量汇聚。这也使得硬夹杂情况迎波一侧位移幅值散射特性更为复杂，位移谱对频率更为敏感，位移放大和缩减频带交替出现。软夹杂情况下，与

垂直入射相比,会出现多个放大更为显著的频率点(峰值约达到5.0),但对高频波段的屏障效应不明显。因此,在地震工程中,对于实际夹杂群场地

震动评估,对硬质夹杂群同样需慎重考虑其附近的地震波放大效应。另外,尚需注意SH波掠入射和垂直入射下位移频谱特性的显著差别。

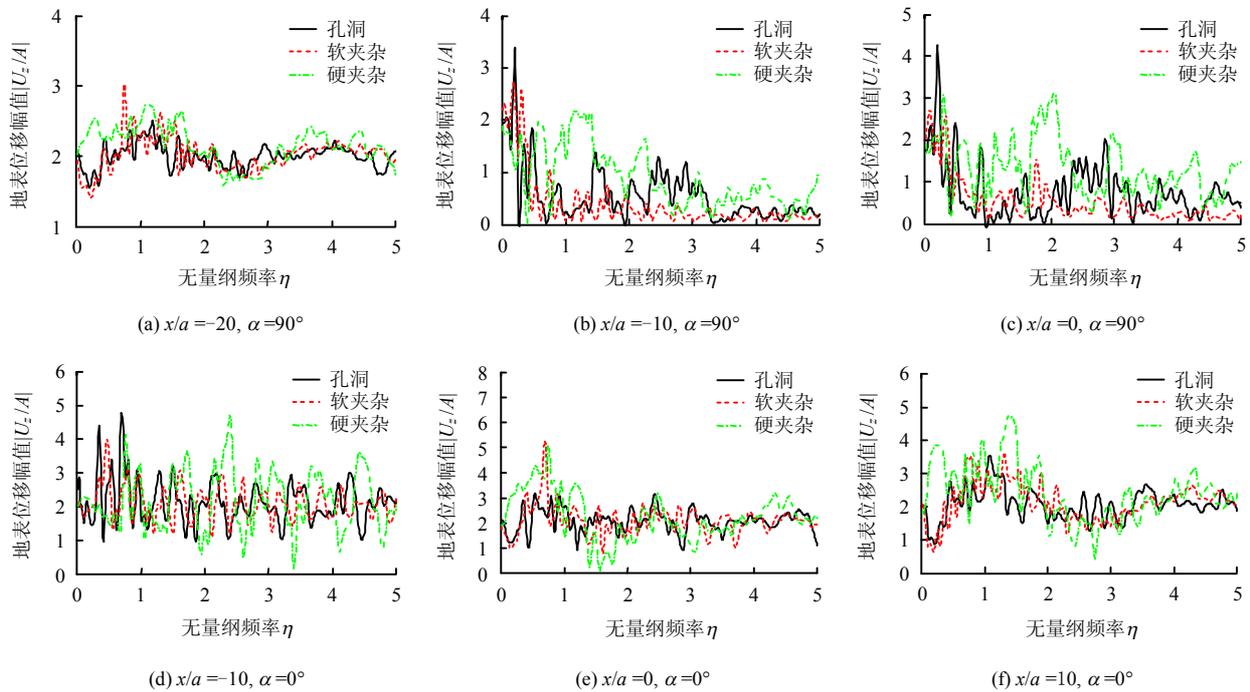


图9 不同刚度整齐排列圆形夹杂群对SH波的散射位移幅值谱图

Fig.9 Surface displacement amplitude spectra of plane SH wave scattering on different stiffness circular inclusions

6 结论

(1) FMM-IBEM能够高效精确地求解弹性半空间大规模夹杂群对平面SH波的散射问题,同时能够大幅度降低计算存储量,可在目前主流PC上实现数百万自由度散射分析。

(2) 由于多次散射波的相干效应,半空间中夹杂群对SH波的散射同单夹杂情况具有显著差别,总波场空间分布特征和位移频谱特征更为复杂。实际建模计算中需明确夹杂体的材料软硬程度、几何形状特征和入射波的角度、频率。

(3) SH波水平入射下,夹杂群上方半空间表面位移放大效应更为显著。特别是低频段,部分区域位移幅值达到5.0。

(4) 高频SH波垂直入射下,空洞群和软夹杂群表现出明显的屏障效应,而硬夹杂群上方半空间表面位移放大和缩减区域会交替出现。

本文研究方法可为弹性半空间大规模多域散射问题求解提供新的思路,数值结果可为复杂介质地震波动分析、地质勘探等工作提供理论依据。另外,本文方法对无损检测、声波、电磁波多体散射分析等同样具有一定的参考价值。

参考文献

- [1] 袁晓铭. 地表下圆形夹杂区出平面散射对地面运动的影响[J]. 地球物理学报, 1996, 39(3): 373-381.
YUAN Xiao-ming. Effect of a circular underground inclusion on surface motion under incident plane SH waves[J]. *Acta Geologica Sinica*, 1996, 39(3): 373-381.
- [2] 史文谱, 刘殿魁, 宋永涛. 直角平面区域内固定圆形刚性夹杂问题的Green函数解[J]. 固体力学学报, 2006, 27(2): 207-212.
SHI Wen-pu, LIU Dian-kui, SONG Yong-tao. The anti plane Green function solution of the problem of a fixed rigid circular inclusion in right-angle plane[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2006, 27(2): 207-212.
- [3] 杨在林, 许华南, 黑宝平. 半空间中椭圆夹杂与裂纹对SH波的散射[J]. 振动与冲击, 2013, 32(11): 56-61.
YANG Zai-lin, XU Hua-nan, HEI Bao-ping. Interaction of elliptical inclusion and crack under incident SH-wave in a half-space[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(11): 56-61.
- [4] 齐辉, 丁晓浩, 张洋. 垂直界面附近椭圆形夹杂对SH波的散射与地震动研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(8): 2151-2158.

- QI Hui, DING Xiao-hao, ZHANG Yang. Study of scattering of SH-waves by a buried elliptic inclusion near a vertical interface and ground surface vibration[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(8): 2151—2158.
- [5] DRAVINSKI M. Ground motion amplification due to elastic inclusion in a half-space[J]. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1983, 11: 313—335.
- [6] DRAVINSKI M, YU M C. The effect of impedance contrast upon surface motion due to scattering of plane harmonic P, SV, and Rayleigh waves by a randomly corrugated elastic inclusion[J]. **Journal of Seismology**, 2013, 17(2): 281—295.
- [7] 梁建文, 张炳政, 巴振宁. 层状场地中透透镜体对地震动影响的基本规律[J]. **地震工程工程振动**, 2009, 29(5): 1—12.
- LIANG Jian-wen, ZHANG Bing-zheng, BA Zhen-ning. On the effect of a lenticle in a layered site on ground motion[J]. **Earthquake Engineering and Engineering Dynamics**, 2009, 29(5): 1—12.
- [8] HEYMSFIELD E. Two-Dimensional scattering of SH waves due to a discontinuity in bedrock[J]. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1999, 28(8): 841—855.
- [9] TONG M S, CHEW W C. Nyström method for elastic wave scattering by three-dimensional obstacles[J]. **Journal of Computational Physics**, 2007, 226(2): 1845—1858.
- [10] 刘中宪, 梁建文, 李帆. 流体饱和半空间中夹杂物对平面 SV 波的散射[J]. **力学季刊**, 2012, 33(2): 256—268.
- LIU Zhong-xian, LIANG Jian-wen, LI Fan. Diffraction of plane SV waves by an inclusion in saturated poroelastic half-space[J]. **Chinese Quarterly of Mechanics**, 2012, 33(2): 256—268.
- [11] CASTRO I, TADEU A. Coupling of the BEM with the MFS for the numerical simulation of frequency domain 2-D elastic wave propagation in the presence of elastic inclusions and cracks[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2012, 36(2): 169—180.
- [12] KANAUN S, LEVIN V. Scattering of elastic waves on a heterogeneous inclusion of arbitrary shape: An efficient numerical method for 3D-problems[J]. **Wave Motion**, 2013, 50(4): 687—707.
- [13] 王海涛, 姚振汉. 快速多极边界元法在大规模传热分析中的应用[J]. **工程力学**, 2008, 25(9): 23—27.
- WANG Hai-tao, YAO Zhen-han. Application of fast multipole boundary element method on large scale thermal analysis[J]. **Engineering Mechanics**, 2008, 25(9): 23—27.
- [14] 雷霆, 姚振汉, 王海涛. 二维弹性力学快速多极边界元法的并行计算[J]. **工程力学**, 2004, 21: 305—308.
- LEI Ting, YAO Zhen-han, WANG Hai-tao. Parallel computation of 2-d elastic solid using fast multipole boundary element method[J]. **Engineering Mechanics**, 2004, 21: 305—308.
- [15] 崔晓兵, 季振林. 快速多极子边界元法在吸声材料声场计算中的应用[J]. **振动与冲击**, 2011, 30(8): 187—192.
- CUI Xiao-bing, JI Zhen-lin. Application of FMBEM to calculation of sound fields in sound-absorbing materials[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2011, 30(8): 187—192.
- [16] SONG J, LU C C, CHEW W C. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects[J]. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, 1997, 45(10): 1488—1493.
- [17] LIU Y J, NISHIMURA N, YAO Z H. A fast multipole accelerated method of fundamental solutions for potential problems[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2005, 29(11): 1016—1024.
- [18] FUJIWARA H. The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems[J]. **Geophysical Journal International**, 1998, 133(3): 773—782.
- [19] BONNET M, CHAILLAT S, SEMBLAT J F. Multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics[M]//Recent Advances in Boundary Element Methods. Netherlands: Springer, 2009: 15—27.
- [20] 刘中宪, 王少杰. 非连续群桩屏障对平面 P、SV 波的隔离效应: 二维宽频带间接边界积分方程法模拟[J]. **岩土力学**, 2016, 37(4): 1195—1207.
- LIU Zhong-xian, WANG Shao-jie. Isolation effect of discontinuous pile-group barriers on plane P and SV waves: Simulation based on 2D broadband indirect boundary integration equation method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(4): 1195—1207.
- [21] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, 1986, 7(3): 856—869.
- [22] UTSUNOMIYA T, WATANABE E, NISHIMURA N. Fast multipole algorithm for wave diffraction/ radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography[C]//Proceedings of 20th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. [S. l.]: [s. n.], 2001.