

# 基于强度折减法确定边坡临界滑面的小波变换法

聂治豹, 郑 宏, 张 谭

(北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100124)

**摘 要:** 临界滑面的确定一直是岩土工程界研究的热点问题。利用有限元-强度折减法对二维边坡进行稳定性分析时, 对于进入极限平衡状态的边坡而言, 沿边坡深度方向的等效塑性应变最大值点一般也就是临界滑面上的点。然后通过预设一组相互平行且与坡面近似垂直的直线, 找出各直线上等效塑性应变的最大点, 可得到一系列呈波动状分布的点, 这些点构成了一组一维的信号函数; 再利用小波分析对数据进行平滑处理就可得到边坡的临界滑面。通过经典算例分析与 Spencer 法等前人的研究成果比较, 结果表明该方法是合理有效的, 可以用于边坡临界滑面的确定。

**关 键 词:** 边坡稳定性分析; 强度折减法; 临界滑面; 小波分析

中图分类号: TU 42

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2017)06-1827-05

## Determination of slope critical slip surfaces using strength reduction method and wavelet transform

NIE Zhi-bao, ZHENG Hong, ZHANG Tan

(College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** The determination of positions of critical slip surfaces is a hot spot of research on geotechnical engineering. In two-dimensional slope stability analysis applied with finite element-strength reduction, the points with the maximum equivalent plastic strain along depth are mostly on the critical slip surface for a slope at limit equilibrium state. One set of wavy signal function consisting of points with the maximum equivalent strain can be constructed by deploying a series of parallel lines approximately perpendicular to the slope surface. The wavelet analysis smoothens these points on the critical slip surface. Through the classic example analysis and comparisons with Spencer's method and other previous research, the results show that the method in this paper is reasonable and effective, and can be used to locate the critical slip surface.

**Keywords:** slope stability analysis; strength reduction method; critical slip surface; wavelet analysis

## 1 引 言

有限元-强度折减法是边坡稳定性分析中的一种常用方法, 它克服了极限平衡方法中需要提前假定滑面的位置和形状, 以及将土条假定为刚体的缺点。最早由 Zienkiewicz 等<sup>[1]</sup>应用于边坡稳定分析, 但由于受到当时计算条件的限制, 此法一直没有流行起来。Wong<sup>[2]</sup>给出了有限元方法在分析边坡稳定性中误差产生的原因。Duncan<sup>[3]</sup>提出将边坡的安全系数定义为边坡土体实际剪切强度与边坡刚好达到临界破坏时剪切强度比值, 该安全系数特别适合用

有限元方法求解。随着计算机技术和有限元软件的发展, 强度折减法在边坡稳定性分析中得到了越来越广泛的应用。Griffiths 等<sup>[4]</sup>对国外的研究进展作了系统的总结。郑颖人等<sup>[5]</sup>对边坡的失稳判据以及计算精度等进行了深入的研究。郑宏等<sup>[6]</sup>证明了, 对于满足 Mohr-Coulomb (简称 M-C) 强度准则的岩土材料, 在进行强度参数折减的同时, 对泊松比  $\nu$  也必须进行相应的调整。

安全系数的求解及其对应的临界滑面的确定是边坡稳定性分析中的两个关键问题。通过对岩土体强度参数的不断折减, 将边坡代入极限平衡状态,

收稿日期: 2015-09-08

基金项目: 国家自然科学基金 (No.11572009) 和国家重点基础研究发展计划项目 (973 计划) (No.2011CB013505, No.2014CB047100)。

This work was supported by the National Science Foundation of China (11572009) and the National Program on Key Basic Research Project (2011CB013505, 2014CB047100).

第一作者简介: 聂治豹, 男, 1991 年生, 硕士, 主要从事边坡稳定性分析方面的研究。E-mail: yohohonzb@163.com

可以很容易地得到与极限平衡方法相差很小的边坡安全系数。然而对于临界滑面的确定,一般根据极限状态的塑性区、变形图或其他可视化技术来大致估计临界滑面的位置。如文献[7]利用广义塑性剪应变的等值线来确定临界滑面;文献[8]建议采用位移增量等值线确定临界滑面;文献[9]则采用应变增量来确定临界滑面的位置。文献[10]通过搜索极限平衡状态时沿竖直方向的等效塑性应变最大值点,并对搜索到的点进行平滑处理,认为得到的曲线就是临界滑面的位置,取得了很好的效果。在文献[10]的研究基础上,结合小波分析,本文提出一种新的临界滑面确定方法。

## 2 有限元-强度折减法

强度折减法采用基于强度储备概念的安全系数,其定义为:当岩土体的抗剪强度参数分别用其临界强度参数所代替后,结构将处于极限平衡状态,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} c_c &= c/f_s \\ \tan \varphi_c &= (\tan \varphi)/f_s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $c$  和  $\varphi$  分别为岩土体的黏聚力和内摩擦角;  $c_c$  和  $\varphi_c$  分别为临界黏聚力和内摩擦角;强度折减系数  $f_s$  就是该边坡的安全系数。

文献[11]对3类典型的极限平衡状态判据进行了详细的讨论,认为3类边坡失稳判据具有理论上的一致性,并推荐使用有限元数值迭代不收敛作为判据。本文采用的是有限元数值迭代不收敛判据。

## 3 小波分析简介

### 3.1 小波函数

小波是一种特殊的具有震荡性、能够迅速衰减到0的一类函数,倾向于不规则和不对称<sup>[12]</sup>。 $\psi(t)$  为母小波或小波基,若其满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2)$$

对  $\psi(t)$  进行伸缩和平移变换得到的小波序列

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, a \neq 0 \quad (3)$$

式中:  $\psi_{a,b}(t)$  为小波函数;  $R$  为实数集;  $a$  为尺度因子;  $b$  为平移因子。

### 3.2 离散小波变换

小波函数  $\psi(t)$  的傅里叶变换为  $\hat{\psi}(\omega)$ , 若其满足允许条件

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty \quad (4)$$

则  $\psi(t)$  为允许小波。

任意函数  $f(t) \in L^2(R)$  ( $L^2(R)$  为平方可积函数空间), 可对其进行以  $\psi(t)$  为母小波的小波变换

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{\psi}_{a,b}(t) dt, \quad a > 0 \quad (5)$$

式中:  $W_f(a,b)$  是小波变换后的系数;  $\hat{\psi}_{a,b}(t)$  是  $\psi_{a,b}(t)$  的复共轭函数。

在实际应用中,尤其是在计算机上实现小波分析,必须对连续小波离散化。常用的二进小波,其表达式为

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (6)$$

式中:  $Z$  为整数集。

### 3.3 多尺度小波分解与重构

Mallat<sup>[13]</sup> 于1988年提出了多尺度分析的概念,并给出了小波分解和重构的快速算法。根据这一算法,若函数  $f(t) \in L^2(R)$ ,  $f_j(t)$  为在  $V_j$  空间对  $f(t)$  进行离散采样的结果,则  $f_j(t)$  的正交分解公式为

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \\ &= \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t) + \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $j$  为分解尺度,  $k=0,1,2,\dots,2^j-1$ ;  $c_k^j$  为尺度系数;  $d_k^j$  为小波系数;  $\phi_{j,k}$  为正交尺度函数;  $\psi_{j,k}$  为正交小波函数。

小波分解的系数计算公式为

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_{n \in Z} h_{n-2k} c_n^j \\ d_k^{j-1} = \sum_{n \in Z} g_{n-2k} c_n^j \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $h, g$  为一对正交小波滤波器,其中  $h$  为低通滤波器,因此,  $c_k^j$  也被称为近似系数;  $g$  为高通滤波器,  $d_k^j$  也被称为细节系数。

小波系数的重构过程是分解过程的逆运算,重构公式如下:

$$c_k^j = \sum_{n \in Z} c_n^{j-1} h_{k-2n} + \sum_{n \in Z} d_n^{j-1} g_{k-2n} \quad (9)$$

## 4 基于小波法的临界滑面搜索

利用有限元-强度折减法将边坡代入极限平衡状态,可以得到极限平衡状态边坡塑性区内的等效塑性应变分布,并可以将各积分点的等效塑性应变输出。设置1组与坡面垂直的平行线,通过插值可以搜索得到每条线上的等效塑性应变最大值点

$y_i(x_i)$ , 其构成了1组小波分析中的一维信号数据。

二进制小波的分解尺度限制在:  $N = 2^j$ ,  $N$  为采样数据的长度,  $j$  为分解尺度。本文数据采样长度 128, 即最多可进行尺度为 7 的小波分解。小波分解与重构如图 1 所示,  $S$  为输入数据,  $cA_i$  为尺度系数,  $cD_i$  为小波系数,  $i=1, \dots, j$ 。多尺度小波分解就是对数据进行不同尺度的小波分解, 将其分解为近似部分和多个不同带通的细节部分。

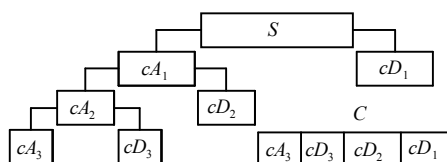


图1 小波分解与重构示意图

Fig.1 Wavelet decomposition and reconstruction

通过采用阈值的办法, 即把近似部分的尺度系数保留, 细节部分的小波系数大部分置零, 来达到滤波的效果。工程上一般采用软阈值量化处理。

$$d_k^{j-1} = \begin{cases} \text{sgn}(|d_k^{j-1}| - T_j) & |d_k^{j-1}| > T_j \\ 0 & |d_k^{j-1}| < T_j \end{cases} \quad (10)$$

$$T_j = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (11)$$

式中:  $T_j$  为分解水平  $j$  尺度上的阈值;  $\sigma$  为小波系数标准差, 一般取  $\sigma = \text{median}(|d_k^{j-1}|) / 0.6745$ 。

对信号数据  $y_i(x_i)$  按式(8)进行分解, 按式(10)对得到的小波系数进行处理后, 代入式(9)进行重构得到  $y_i(x_i)'$ 。对于本文来说, 输入的是呈波状的数据, 输出的就是近似光滑的数据, 也就是搜索到的临界滑面。

## 5 算例

岩土材料具有复杂的本构特性, 边坡的稳定性分析主要是力和强度问题, 而不是位移和变形问题, 因此, 在有限元强度折减法可采用理想弹塑性模型。本文中算例均采用 M-C 屈服准则; 用到的分析软件有 ABAQUS、STAB 和 MATLAB。另外, 本文算例在对强度参数进行折减的同时, 根据文献[6]的建议对弹性模量  $E$ 、泊松比  $\nu$  进行了调整, 使其满足  $\varphi$ - $\nu$  不等式:  $\sin \varphi \geq 1 - 2\nu$ , 调整后数值计算的收敛性更好、塑性区分布也更合理。剪胀角按文献[14]的建议选取。

### 5.1 算例 1

该算例取自文献[15], 为均质黏土边坡尺寸如图 2 所示, 材料的重度  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量  $E =$

200 MPa, 泊松比  $\nu = 0.4$ , 内摩擦角  $\varphi = 20^\circ$ , 粘聚力  $c = 10 \text{ kPa}$ 。

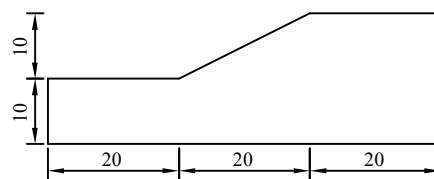


图2 算例1模型尺寸(单位: m)  
Fig.2 Dimension of model 1 (unit: m)

边坡达到极限平衡状态时, 在关联流动法则条件下得到的安全系数为 1.38; 在非关联流动法则条件下得到的安全系数为 1.36。图 3 为沿垂直边坡方向搜索到的等效塑性应变最大值  $y_i(x_i)$  点分布。

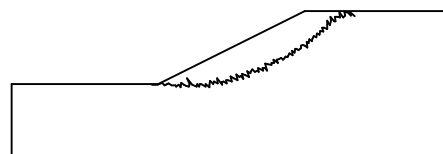


图3 垂直于坡面方向等效塑性应变最大值分布  
Fig.3 The distribution of the maximum equivalent plastic strains in direction perpendicular to slope surface

选择 Daubechies 小波<sup>[16]</sup> (dbN) 为小波基, 用 MATLAB 小波工具箱对  $y_i(x_i)$  进行小波分解, 可以明显观察到其高频部分主要集中在尺度 1~3 之间。因此, 对其进行 db6 尺度为 3 的分解。小波法搜索到的滑面如图 4 所示, 可以看出, 与文献[10]得到的结果非常接近。极限平衡方法中的 Spencer 法计算得到的安全系数为 1.39, 与强度折减法得到的安全系数相差很小。由图 5 可以看出, 小波法与 Spencer 方法得到的滑面位置也非常相近。

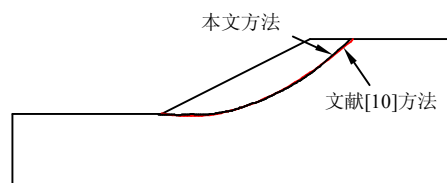


图4 小波法滑面与基于等效塑性应变法滑面  
Fig.4 Critical slip surfaces based on wavelet and equivalent plastic strain

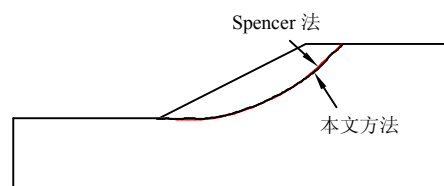


图5 本文方法滑面与 Spencer 法滑面  
Fig.5 Critical slip surfaces based on wavelet and Spencer

## 5.2 算例 2

该算例取自文献[17]。图 6 为两层土的高速公路边坡尺寸示意图,表 1 为其模型土体的材料参数。采用关联流动法则计算得到的安全系数为 1.44,等效塑性应变分布如图 7 所示。

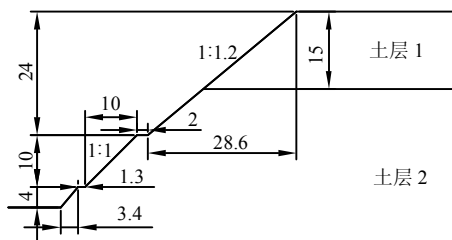


图 6 双层土坡模型尺寸(单位: m)  
Fig.6 Size of soil slope model with 2 layers (unit: m)

表 1 材料参数  
Table 1 Parameters for soils

土层	重度 / (kN/m <sup>3</sup> )	黏聚力 / kPa	内摩擦角 / (°)	弹性模量 / 10 GPa	泊松比
1	24.0	34.0	26	2.0	0.35
2	25.0	39.0	35	5.0	0.30

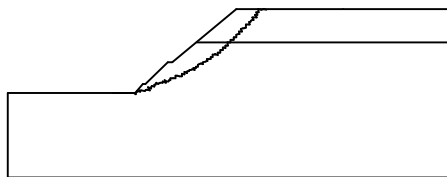


图 7 垂直于坡面方向等效塑性应变最大值分布  
Fig.7 Distribution of points with the maximum equivalent plastic strains in direction perpendicular to slope

对本算例数据进行的是 db8 尺度为 3 的小波分解,搜索到的滑面如图 8 所示。Spencer 法计算得到的安全系数为 1.42,可以看出,两种方法得到的结果十分相近,坡脚和坡顶也吻合得很好。两层土体的交界处,由于力学参数的不同,理论上滑面应出现拐点,由于本文对数据作了近似处理,两层土体的交界处拐点并不明显,但通过对交界线上搜索等效塑性应变最大值点,发现该点近似位于搜索到的滑面上,如图 9 所示。

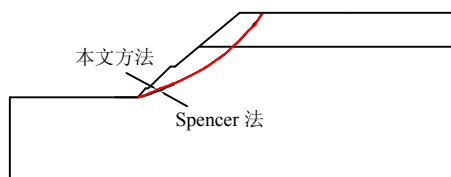


图 8 小波法滑面与 Spencer 法滑面  
Fig.8 Critical slip surfaces based on wavelet and Spencer

为验证本方法的可靠性,建立  $x$  轴与水平方向

按逆时针成  $10^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $30^\circ$  和  $40^\circ$  夹角的坐标系,分别按本文方法搜索滑面,搜索到的滑面如图 9 所示,可以看出不同坐标系中搜索到的滑面都十分接近。

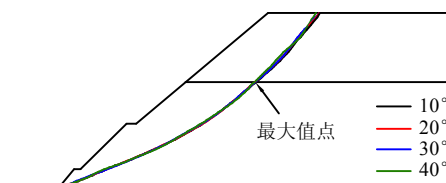


图 9 多坐标系搜索到的滑面  
Fig.9 Critical slip surfaces search in different coordinate systems

## 6 讨论

根据弹塑性理论,对于理想弹塑性模型其应力、应变等应为光滑连续的,而由图 3、7、10 可以看出,搜索到的等效塑性应变最大点的位置是呈波动状的,且这种波动性随着网格的加密振荡幅度在逐渐降低,这是采用等参元模拟理想弹塑性问题时所表现出来的网格依赖性的又一体现<sup>[18]</sup>。图 7 单元数为 12 059;图 10 所用单元数为 2 203,小波数据点为 64,对于这种波动剧烈的分布,采用本文方法仍可以得到差别很小的临界滑面。

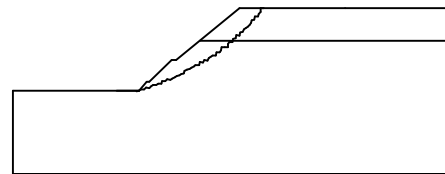


图 10 2 203 个单元搜索到的等效塑性应变点分布  
Fig.10 Distribution of points with the maximum equivalent plastic strains using 2 203 elements

小波数据点的分布波动越剧烈,小波分解后得到的细节部分小波系数的标准差就越大。由式(10)、式(11)可知,对小波系数进行软阈值量化处理时,各个尺度上阈值的大小与该尺度上细节部分的标准差成正比,这种自适应性是保证本算法稳定可靠的基础。图 11 为基于不同网格密度、不同小波数据点建立垂直于边坡方向的坐标系搜索到的临界滑面,两个滑面的差别很小。

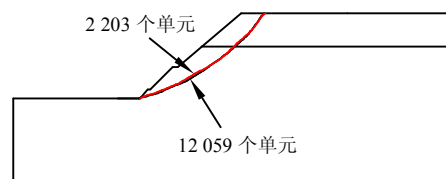


图 11 不同网格密度时搜索到的滑面  
Fig.11 The critical slip surfaces corresponding to distinct meshes

## 7 结 论

(1) 将小波分析和有限元-强度折减法结合起来, 提出了一种新的临界滑面定位方法。该方法具有特点简单易用、适用于各种屈服准则和能够克服有限元计算网格依赖性的特点。

(2) 不同算例的计算结果表明: 极限平衡状态时, 将等效塑性应变最大值点看作是临界滑面上的点是合理。极限平衡状态时, 最大等效塑性应变的搜索结果不依赖于坐标系的选择, 不同坐标系的搜索结果表现出了很好的一致性。

## 参 考 文 献

- [1] ZIENKIEWICZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. **Geotechnique**, 1975, 25: 671—689.
- [2] WONG F S. Uncertainties in FE modeling of slope stability[J]. **Computer & Structures**, 1984, 19: 777—791.
- [3] DUNCAN J M. State of the art: Limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, ASCE, 1996, 122(7): 577—596.
- [4] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. **Geotechnique**, 1999, 49(3): 387—403.
- [5] 郑颖人, 赵尚毅, 李安洪, 等. 有限元极限分析法及其在边坡中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011.  
ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, LI An-hong. FEM limit analysis and its application to slope engineering[M]. Beijing: China Communication Press, 2011.
- [6] 郑宏, 李春光, 葛修润, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626—628.  
ZHENG Hong, LI Chun-guang, GE Xiu-run, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(5): 626—628.
- [7] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 406—411.  
LIAN Zhen-ying, HAN Guo-cheng, KONG Xian-jing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(4): 406—411.
- [8] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程报, 1997, 19(1): 1—7.  
SONG Er-xiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1997, 19(1): 1—7.
- [9] 陈国庆, 黄润秋, 石豫川, 等. 基于动态和整体强度折减法的边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(2): 243—256.  
CHEN Guo-qing, HUANG Run-qiu, SHI Yu-chuan, et al. Stability analysis of slope based on dynamic and whole strength reduction methods[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(2): 243—256.
- [10] 孙冠华, 郑宏, 李春光. 基于等效塑性应变的边坡滑面搜索[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 1159—1163.  
SUN Guan-hua, ZHENG Hong, Li Chun-guang. Searching critical slip surface of slopes based on equivalent plastic strain[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(5): 1159—1163.
- [11] 裴利剑, 屈本宁, 钱闪光. 有限元强度折减法边坡失稳判据的统一性[J]. 岩土力学, 2010, 31(10): 3337—3341.  
PEI Li-jian, QU Ben-ning, QIAN Shan-guang. Uniformity of slope instability criteria of strength reduction with FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2010, 31(10): 3337—3341.
- [12] 孙延奎. 小波分析及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.  
SUN Yan-kui. Wavelet analysis and its application[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.
- [13] MALLAT S G. A theory of multi-resolution signal decomposition: The wavelet representation[J]. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, 1989, 11(7): 674—693.
- [14] 孔学位, 芮勇勤, 董宝弟. 岩土材料在非关联流动法则下剪胀角选取探讨[J]. 岩土力, 2009, 30(11): 3278—3282.  
KONG Wei-xue, RUI Yong-qin, DONG Bao-di. Determination of dilatancy angle for geomaterials under non-associated flow rule[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, (11): 3278—3282.
- [15] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.  
CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis: Principles, methods and procedures[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003.
- [16] BOGGESESS A, NARCOWICH F J. A first course in wavelets with fourier analysis[M]. New Jersey: John Wiley and Sons Ltd, 2009: 63.
- [17] ZHENG H, THAM L G, LIU D F. On two definitions of the factor of safety commonly used in the finite element slope stability analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2006, 33: 188—195.
- [18] 郑宏, 刘德富. 弹塑性矩阵 Dep 的特性和有限元边坡稳定性分析中的极限状态标准[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 25(7): 1099—1105.  
ZHENG Hong, LIU De-fu. Properties of elasto-plastic matrix dep and a criterion on limiting state of slope stability by FEM[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 25(7): 1099—1105.