

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.07.015

基于状态相关本构模型的砂土非共轴特性模拟

陈洲泉^{1,2}, 黄茂松^{1,2}

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 基于屈服面角点非共轴理论中采用 Gram-Schmit 正交化方法, 提出了一种新的非共轴本构模型。模型修正了原有的流动法则, 其中非共轴流动方向被定义为将单位应力增量方向在参考主应力正交方向上的投影, 同时与塑性标量因子相关联。另外, 根据广义应力的状态下的剪胀方程推导了一种新的塑性函数形式。以状态相关砂土模型为基本模型, 分别采用新的非共轴模型和未修正的模型模拟了 Toyoura 砂的空心圆柱单剪试验和空心圆柱扭剪试验, 将模型模拟的结果与试验数据进行对比, 结果表明, 新非共轴模型能更为合理地反映试验中非共轴现象及其变化规律, 特别是固定主应力轴方向的单调剪切试验。

关键词: 砂土; 非共轴; 状态相关本构模型; 空心圆柱剪切试验

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2017)07-1959-08

Simulation of non-coaxial characteristics of sandy soil based on state-dependent constitutive model

CHEN Zhou-quan^{1,2}, HUANG Mao-song^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A non-coaxial constitutive model is proposed based on the Gram-Schmidt orthogonalization process employed in the yield vertex non-coaxial theory. The flow rule is revised in this model. The model corrects the original flow rule, where the non-coaxial flow direction is defined as the projection of the unit stress increment direction in the orthogonal direction of the reference principal stress, and is associated with the plastic scalar factor. In addition, a new form of plastic function is derived according to the dilatancy equation in the generalized stress state. Based on the state-related sand model, the new non-coaxial model and the uncorrected model are used to simulate the hollow cylindrical single shear test and the hollow cylindrical torsional shear test on Toyoura sand. The simulation results are compared with the experimental data, and the results show that new non-coaxial model can more reasonably reflect the non-coaxial phenomenon and its variation in the test, especially for the monotonic shear test in the direction of the fixed principal stress axis.

Keywords: sandy soil; non-coaxiality; state-dependent constitutive model; hollow cylindrical shear tests

1 引 言

在包含应力主轴旋转的加载条件下, 岩土材料会出现非共轴现象, 即材料当前的主应力方向与塑性主应变率方向不一致, 尤其在单剪^[1-2]和空心圆柱环剪试验^[3-5]中, 材料的非共轴现象更为明显。但根据传统的塑性理论, 决定塑性应变率方向的流动法则是由当前的应力状态决定的, 包含了应力与塑性应变率共轴的条件。

为了调和传统理论与试验现象的矛盾, 考虑应力率对流动法则的影响, 建立了一类将塑性应变率划分为共轴项和非共轴项的弹塑性模型。这类模型基于 Rudnicki 等^[6]早期的在光滑屈服面上增加角点结构的理论, 而所谓的非共轴塑性应变率便是由文中角点结构的塑性应变率来定义。由于该理论局限于二维应力空间, 钱建固等^[7]以及 Qian 等^[8]考虑了第三应力不变量的影响, 将该非共轴塑性本构模型推广到了三维应力空间。

收稿日期: 2016-07-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 11372228); 国家 973 计划课题(No. 2012CE719803)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (11372228) and the National Key Basic Research Project of China (973 Program) (2012CE719803).

第一作者简介: 陈洲泉, 男, 1988 年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方面的研究工作。E-mail: 294629613@qq.com

通讯作者: 黄茂松, 男, 1965 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程方面的科研和教学工作。E-mail: mshuang@tongji.edu.cn

基于传统的非共轴理论^[6], Yang 等^[9-10]结合 Drucker-Prager 和临界土力学模型 CASM 分别模拟了单剪试验中材料的非共轴行为。扈萍等^[11]采用三维广义 Mohr-Coulomb 非共轴模型模拟了单剪和空心圆柱环剪试验, 结果表明, 该非共轴模型能够模拟岩土材料的非共轴现象。但文献^[11]采用的与六分量形式对应的六阶非共轴张量矩阵, 因而其模拟结果存在一些问题。

但对于固定主应力轴的单调剪切试验, 如 Miura 等^[3]和 Gutierrez 等^[12]的固定主应力轴方向上的空心圆柱试验以及 Arthur 等^[13-14]的一系列方向剪切盒试验, 其中所展现出来的非共轴行为却不能被上述模型所描述, 其原因在于这种加载模式当前应力状态与应力增量方向共轴, 使得角点理论的 Gram-Schmit 正交分解方法失效。然而, Lashkari 等^[15]提出的非共轴模型为处理此类问题提供了很好的思路。该模型根据 Gutierrez 等^[12]总结的主应力旋转试验规律, 在 X - Y ($X = (\sigma_x - \sigma_\theta) / 2$, $Y = \sigma_\theta$) 应力空间内建立一套流动法则, 给出了新型的非共轴流动关系, 并较好地模拟砂土的非共轴变形特征。由于该模型是在 X - Y 应力空间建立的, 对于更为一般的情况, 该非共轴流动法则应该如何描述还需探讨。

针对上述模型所存在的问题, 以考虑状态相关的砂土模型为基础, 本文将在更为一般的情况下讨论模型流动法则的形式。仍然沿用角点理论中采用的 Gram-Schmit 正交分解方法, 但定义单位应力增量方向沿与参考主应力正交方向的分解量作为非共轴流动方向, 并且受塑性加载因子影响。同时, 根据广义应力状态下的剪胀方程, 推导了新的塑性势函数。然后, 对 Toyoura 砂的空心圆柱单剪试验及空心圆柱扭剪试验进行模拟, 并且与文献^[11]中的非共轴模型的结果进行对比, 以验证新的非共轴流动法则的有效性。这里需要指出的是, 与弹性刚度张量矩阵 D_{ijkl}^e 不同, 文献^[8]中的非共轴柔度张量 C_{ijkl}^{np} 所对应的矩阵的耦合项不全为 0, 这样采用九阶张量矩阵得到的结果与采用六阶张量矩阵得到的结果存在差异, 因此, 本文所有模拟结果都是在应力、应变全量 (即九分量) 形式下进行的, 同时修正了文献^[11]存在此类数值问题的结果。

2 材料状态相关砂土本构模型

2.1 状态参数与弹性常数

根据材料状态相关临界状态理论, 砂土的松密程度可采用 Been 等^[16]提出的状态参数 ψ 来表征,

该参数与砂土的密实度和有效平均压力相关, 能够将不同密实度的砂土看成为一种材料, 常用形式为

$$\psi = e - e_c \quad (1)$$

式中: e 为当前孔隙比; e_c 为相同压力下的临界孔隙比。对于 Toyoura 砂, 采用了 Li 等^[17]提出的状态参数的数学形式为

$$e_c = e_T - \lambda_c (p/p_a)^\xi \quad (2)$$

式中: e_T 、 λ_c 和 ξ 均为材料参数; p_a 为大气压强。

描述砂土的弹性行为的弹性剪切模量, 其表达式为

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{p/p_a} \quad (3)$$

式中: G_0 为材料参数; 相应的弹性体积模量为

$$K = G \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (4)$$

式中: ν 为泊松比。

2.2 屈服函数与硬化法则

模型中的屈服函数采用广义 Mohr-Coulomb 准则, 即:

$$f = q - Mg(\theta)p = 0 \quad (5)$$

式中: $p = \sigma_{kk} / 3$ 为平均主应力; $q = \sqrt{3J_2}$ 为广义剪应力, 而 $J_2 = s_{ij}s_{ij} / 2$ 为第二应力不变量; $\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1}(\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^3})$ 为应力 Lode 角; $J_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki} / 3$ 为第三应力不变量; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij} / 3$ 为应力偏量; M 作为硬化参数, 表征的是三轴压缩状态下的应力比。那么其他 Lode 角对应的屈服应力比由椭圆形状函数 $g(\theta)$ 插值得到形式参考 Papadimitriou 等^[18]提出的形式:

$$g(\theta) = \frac{4c}{1 + c + (1 - c)\sin(3\theta)} - \frac{1 + c - (1 - c)\sin(3\theta)}{2} \quad (6)$$

式中: c 为三轴拉伸与三轴压缩状态下的应力比比值, 且符号规定为以压为正。需要指出的是, 式 (6) 与 Li^[19]所采用的形状函数在描述 Toyoura 砂的强度特性上具有相当好的一致性, 并且此形式更为简洁。

硬化法则参考黄茂松等^[20]采用的增量双曲线形式:

$$d\varepsilon_s^p = \frac{pM}{hG(M_{cs}e^{-n\psi} - M)} dM \quad (7)$$

式中： M_{cs} 为临界应力比； n 为材料常数； e 为孔隙比； $h = h_1 - h_2 e$ ， h_1 和 h_2 为材料常数。

2.3 修正的塑性势函数

根据 Li 等^[17]提出的三轴压缩状态下的剪胀方程，塑性体应变率 $d\varepsilon_v^p$ 与等效塑性偏应变率 $d\varepsilon_s^p$ 满足关系

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d_o}{M_{cs}}(M_d - M) \quad (8)$$

式中： $M_d = M_{cs} e^{m\theta}$ 为状态转换应力比； m 、 d_o 为材料参数。考虑到广义应力状态下屈服应力满足 $q/p = Mg(\theta)$ ，那么广义形式下的方程便可以写为

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d_o}{M_{cs}} \left(M_d - \frac{q}{pg(\theta)} \right) \quad (9)$$

该形式与 Li 等^[21]提出的广义形式等效。对于一般情况，塑性体应变率 $d\varepsilon_v^p$ 与等效塑性偏应变率 $d\varepsilon_s^p$ 之间的比值与塑性势函数的关系为

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^2}} \quad (10)$$

式中： Q 为塑性函数。

参考 Nova 等^[22]在三轴压缩状态下构造塑性势函数的方法，不妨将广义应力空间的塑性势函数定义为

$$Q = q + q(p, \theta) \quad (11)$$

当 p 为常数时，塑性势函数在 $q-\theta$ 表征的 π 平面内具有同屈服面类似的曲面。联立式(8)~(11)，有

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial \theta}\right)^2}} = \frac{d_o}{M_{cs}} \left(M_d - \frac{q}{pg(\theta)} \right) \quad (12)$$

此式为一阶偏微分方程，包含了 2 个变量，解析较为困难。考虑到塑性势面在 π 平面内要保持凸性，且实际加载过程中 q 值往往较大，因此，假定 $\left(\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial \theta}\right)^2 \gg 1$ ，从而将式(12)简化为

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{d_o}{M_{cs}} \left(M_d - \frac{q}{pg(\theta)} \right) \quad (13)$$

显然式(13)为一阶常微分方程，解析得到的塑性势函数形式为

$$Q = q + \frac{Ag(\theta)}{g(\theta) - A} M_d p \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{A}{g(\theta)} - 1} \right] = 0 \quad (14)$$

式中： $A = d_o / M_{cs}$ ； p_o 为塑性势面的尺寸参数，由定义势面的应力状态决定，而不同应力状态塑性势面同屈服面的关系如图 1 所示。

从图可以看出，塑性势面都是相似的，在定义塑性势面的应力点处与屈服面相交，且势面的曲率比屈服面的曲率更小，即满足 $\frac{\partial Q}{\partial \theta} < \frac{\partial f}{\partial \theta}$ 。这种新形式的势面表明流动法则在 π 平面也是非关联的。而 Manzari 等^[23]以及 Li^[19]则将 π 平面的流动法则直接定义为屈服面法向，这就意味屈服面与塑性势面相关联。

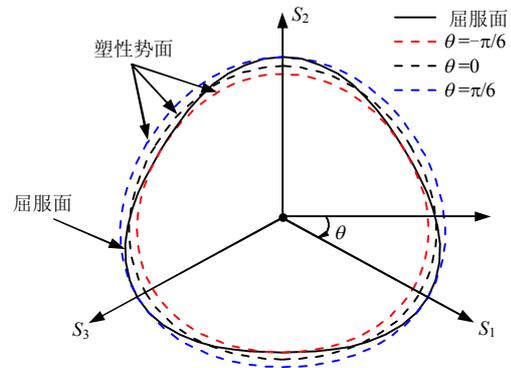


图 1 $q-\theta$ 空间内的塑性势面与屈服面
Fig.1 Plastic potential surface and yield surface in $q-\theta$ space

3 非共轴流动法则的改进

根据 Rudnicki 和 Rice 的“角点结构”理论建立的非共轴流动理论，塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 被分解为共轴项 $d\varepsilon_{ij}^{pc}$ 和非共轴项 $d\varepsilon_{ij}^{pn}$ ，形式如下：

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^{pc} + d\varepsilon_{ij}^{pn} \quad (15)$$

式中：共轴塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{pc}$ 由传统弹塑性理论定义，即

$$d\varepsilon_{ij}^{pc} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

式中： $d\lambda$ 为塑性标量因子。

而非共轴塑性应变增量流动方向不仅与当前应力状态相关，而且还取决于当前的应力增量，其方向与非共轴应力增量 $d\sigma_{ij}^n$ 方向一致。采用 Gram-Schmit 正交化理论，Qian 等^[8]给出了广义应力空间内的分解方法，形式为

$$ds_{ij}^n = ds_{ij} - \frac{ds_{kl} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} - \frac{ds_{kl} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} S_{ij} \quad (17)$$

式中： $S_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{J_3}{J_2} s_{ij}$ 。那么非共轴塑性应变可定义为

$$d\varepsilon_{ij}^{pn} = \frac{1}{H_t} ds_{ij}^n \quad (18)$$

式中： H_t 为非共轴塑性模量，此形式还被改写为

$$d\varepsilon_{ij}^{pn} = C_{ijkl}^{np} d\sigma_{kl} \quad (19)$$

式中： C_{ijkl}^{np} 为非共轴柔度张量，形式为

$$C_{ijkl}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} \right) \quad (20)$$

从式 (17) 可以看出，非共轴塑性流动方向与当前应力状态方向正交，对于包含主应力轴旋转的加载条件，该定义形式能够合理反映非共轴特性。

然而对于 Miura 等^[3]和 Gutierrez 等^[12]进行的 Toyoura 砂空心圆柱剪切试验 (如图 2 所示)，在单调加载过程中始终保持主应力轴方向 α (大主应力与竖直方向或沉积方向的夹角) 不变，若采用式 (19) 的定义方式，总有

$$C_{ijkl}^{np} d\sigma_{kl} = 0 \quad (21)$$

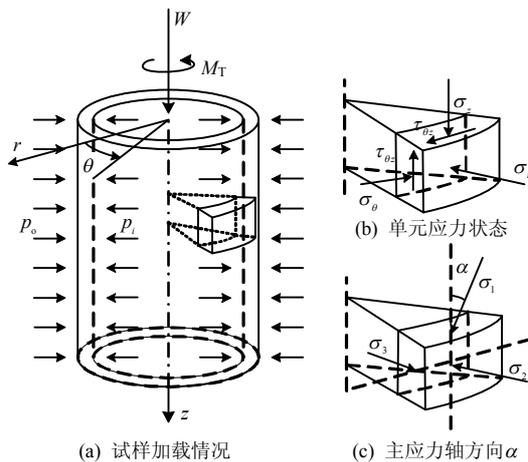


图 2 空心圆柱试样的加载方式及应力状态
Fig.2 Applied loads and stress components in a hollow cylindrical

此式说明，在固定主应力方向单调加载条件下无非共轴塑性应变产生，而这是与试验结果相矛盾的。而式 (21) 所得到的结论可用图 3 来进行直观地说明。考虑到 Gram-Schmit 正交化理论反映的是多维张量空间内的投影法则，如图 3 所示，不妨采

用向量的投影法则来类比张量的投影法则。需要注意的是，将张量 n_2 投影到张量 n_1 上时，若张量 n_1 与 n_2 在三维空间坐标系中夹角为 α ，那么在图示 3 中的空间中夹角关系为 2α 。于是，从图 3(a) 和图 3(b) 可以发现，当两张量空间夹角 α 为 0° 和 90° 时，两张量的共线， n_2 在 n_1 的正交 (垂直) 方向上无分解量，而对于其他 α 角，则有分解量。那么，式 (21) 所反映的关系正是图 3(a) 所表示的关系，即由于当前应力状态 (类比为 n_1) 与应力增量 (类比为 n_2) 共轴 (共线)，那么应力增量在当前应力状态正交方向上的分解为 0。

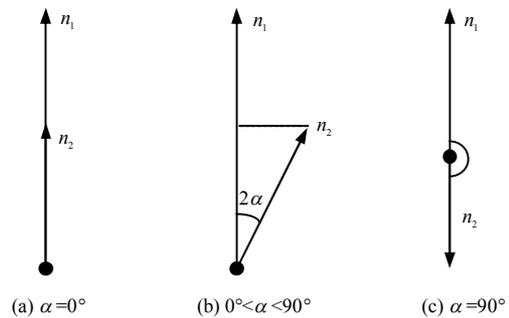


图 3 张量投影法则说明
Fig.3 Interpolation of tensor projection

基于上述认识，需要寻找特定的应力张量方向，使得应力增量方向在其正交方向上投影时，除 α 为 0° 和 90° 外，应力增量在该正交方向上都有分解量，这也就意味着存在非共轴流动，那么该方向不妨命名为参考方向。分析表明，选取与当前应力状态主应力张量数值一致，而基矢量与一般物理空间的基矢量一致的张量作为参考方向，能得到与试验现象相符合的结果。因此，将该张量定义为参考主应力张量，其形式为

$$s_{ij}^p = \frac{2}{3} q \begin{bmatrix} \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \quad (22)$$

可以看出，该张量为与当前应力状态具有相同 Lode 角的一类应力张量中 $\alpha = 0^\circ$ 的情况。

那么基于此分解方法的非共轴流动方向定义为

$$n_{ij}^{non} = n_{ij}^{d\sigma} - \frac{n_{kl}^{d\sigma} s_{kl}^p}{s_{mn}^p s_{mn}^p} s_{ij}^p - \frac{n_{kl}^{d\sigma} S_{kl}^p}{S_{mn}^p S_{mn}^p} S_{ij}^p \quad (23)$$

式中： $S_{ij}^p = s_{ik}^p s_{kj}^p - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{J_3}{J_2} s_{ij}^p$ ； $n_{ij}^{d\sigma} = \frac{d\sigma_{ij}}{\|d\sigma\|}$ 为单

位应力增量。

同时，考虑到试验中砂土越接近临界状态，变形的非共轴性越弱的现象，参考 Lashkari 等^[15]建立非共轴函数将共轴项和非共轴项耦合的方法，最终将非共轴塑性应变增量定义为

$$d\varepsilon_{ij}^{pn} = d\lambda \left(1 - \frac{M}{M_p} \right)^\chi k_n n_{ij}^{\text{non}} \quad (24)$$

式中： χ 、 k_n 为材料参数，用于控制非共轴应变的量级。

于是，总的流动法则为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} + \left(1 - \frac{M}{M_p} \right)^\chi k_n n_{ij}^{\text{non}} \right] \quad (25)$$

4 Toyoura 砂非共轴特性模拟

采用本文提出的各向同性基于材料状态相关非共轴本构模型，分别对属于非比例加载情况下 Toyoura 砂的单剪试验和空心圆柱剪切试验进行了数值模拟，同时文献[11]中的非共轴模型的对应模拟结果也将用于比较，以验证本文修正的非共轴流动法则的有效性。具体用于分析的模型参数如表 1 所示：

表 1 状态相关模型参数

Table 1 Parameters of state-dependent model

弹性参数	临界状态参数	剪胀参数	硬化参数	非共轴参数
$G_0 = 125$	$M_{cs} = 1.25$	$d_0 = 0.88$	$h_1 = 3.15$	$\chi = 0.5$
$\nu = 0.25$	$e_c = 0.934$	$m = 3.5$	$h_2 = 3.05$	$k_n = 2.0$
	$\lambda_c = 0.019$		$n = 1.1$	
	$\xi = 0.7$			

相较于 Li 等^[17]采用的临界状态模型参数，本模型增加了非共轴参数 χ 和 k_n 。基本的临界状态模型参数的标定方法在文献[19]已有了详细说明，而新增的两个非共轴参数 k_n 和 χ 则需通过两组 $\alpha \neq 0^\circ$ 和 $\alpha \neq 90^\circ$ 的固定主应力轴夹角的单调加载试验来标定，可利用式 (24) 得到

$$\chi = \ln \left(\frac{d\varepsilon_{z\theta}^{p1}}{d\varepsilon_{z\theta}^{p2}} \right) / \ln \left(\frac{1 - M / M_{p1}}{1 - M / M_{p2}} \right) \quad (26)$$

标定中需要两组 $\varepsilon_{z\theta} - M - \varepsilon_s^p$ 或 $(d\varepsilon_{z\theta}^p - M - \varepsilon_s^p)$ 曲线， k_n 可在 χ 确定后通过拟合其中一条 $d\varepsilon_{z\theta}^p - M - \varepsilon_s^p$ 曲线来标定。

4.1 空心圆柱单剪试验

Pradhan 等^[24]采用空心圆柱剪切仪，利用应变

控制的方法对 Toyoura 砂进行了排水与不排水的单剪试验，其中土单元试验的试样受载变形如图 4 所示。

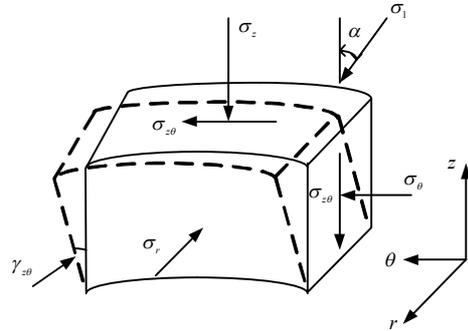


图 4 单剪试验中试样变形
Fig.4 Torsional simple shear deformation

在排水试验过程中，控制 $d\sigma_z = 0$ 、 $d\varepsilon_\theta = 0$ 、 $d\varepsilon_r = 0$ ；在不排水试验中，控制 $d\varepsilon_z = 0$ 、 $d\varepsilon_\theta = 0$ 、 $d\varepsilon_r = 0$ 。其中，竖向有效应力 $\sigma_z = 98.1$ kPa，侧向压力系数 $K_0 = 0.5$ ，在模拟过程中研究主应力方向夹角 α 、主应变增量方向夹角 ξ 、主应力增量方向夹角 χ 的变化规律，3 个夹角方向的定义一致，如图 4 所示，都为与 z 轴的夹角。

其定义分别为

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{z\theta}}{\sigma_z - \sigma_\theta} \quad (27)$$

$$\tan 2\xi = \frac{2d\varepsilon_{z\theta}}{d\varepsilon_z - d\varepsilon_\theta} \quad (28)$$

$$\tan 2\chi = \frac{2d\sigma_{z\theta}}{d\sigma_z - d\sigma_\theta} \quad (29)$$

文献[11]中的非共轴模型模拟与试验结果的对比如图 5 所示，本文模型的模拟结果与试验结果的对比如图 6 所示。图中的试验数据取自文献[24]中编号为 CTSS05 和 CTUDD2 两组试验。图 5 的结果显示文献[11]中的非共轴模型模拟的主应力夹角和主应变增量夹角的结果较好，而在预测排水过程的主应力增量夹角与试验结果存在较大偏差。图 6 的结果表明本文的非共轴模型对于排水的模拟结果有较好地改进，同时也能很好模拟其他条件的试验结果。总的来讲，改进的非共轴流动法则同原有的非共轴流动法则一样，同样能较好地模拟单剪试验中的非共轴行为。

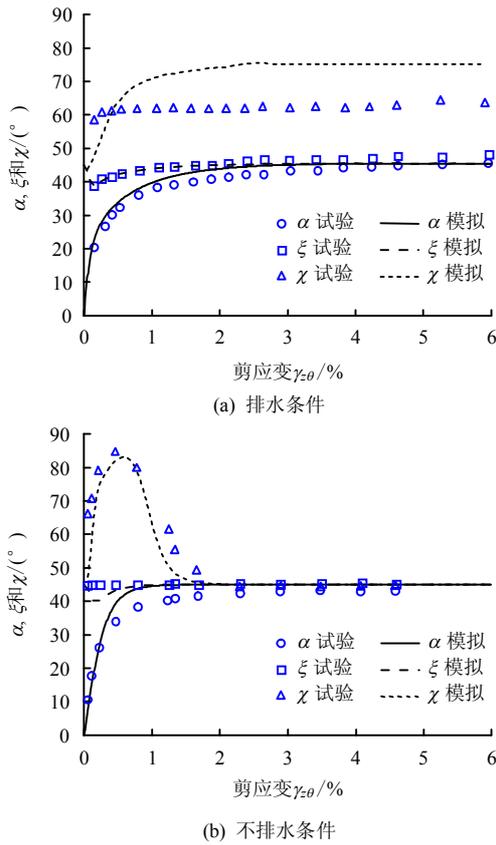


图5 夹角 α, ξ, χ 与剪应变 γ_{z0} 的关系 (文献[11]的模型)
 Fig.5 Relationships among α, ξ, χ and γ_{z0} (the model in reference [11])

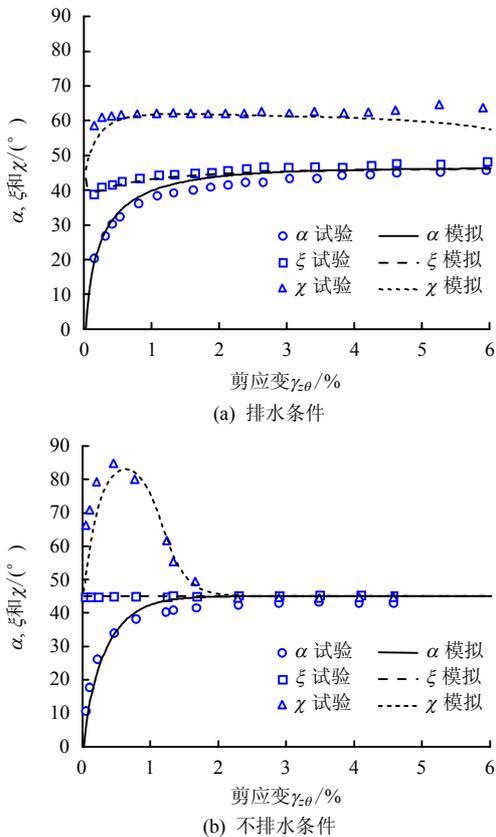


图6 夹角 α, ξ, χ 与剪应变 γ_{z0} 的关系 (本文模型)
 Fig.6 Relationships among α, ξ, χ and γ_{z0} (the model in this paper)

4.2 空心圆柱剪切试验

空心圆柱扭剪试验能够在加载过程中实现应力主轴的旋转，可以更为合理而准确地研究非比例加载情况下土体的响应。文献[3, 12]中的试验均采用应力控制的方法对 Toyoura 砂进行扭剪试验，就其试验加载条件可分为两类；分别为①保持平均主应力 p 和应力主轴方向不变，中主应力系数 $b=0.5$ ，增加应力比 $(\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 + \sigma_3) = \sin \phi_m$ ，直至破坏（式中 ϕ_m 为发挥摩擦角）；②保持平均主应力 p 和应力比不变，中主应力系数 $b=0.5$ ，改变应力主轴方向。

在固定的应力主轴方向下进行单调剪切，Gutierrez 等^[12]总结了不同应力主轴夹角 ($\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$) 的应力路径及其塑性应变增量方向分布情况，如图 7(a)所示。对于这种加载条件的试验，文献[11]模型的模拟结果如图 7(b)所示，本文模型的模拟结果如图 7(c)所示。

从图 7 的模拟结果来看，文献[11]中的非共轴模型无法模拟固定主应力轴方向单调加载试验的非共轴现象，而本文模型能够很好地描述这种非共轴现象，但由于这两种模型都是各向同性模型，所以图 7(a)和 7(b)中的峰值应力面都是过坐标原点的圆，而试验中由于存在各向异性，所以圆心偏离且不规则。在单调加载过程中，塑性应变增量方向随应力的变化规律如图 8 所示。对于 $\alpha=0^\circ$ 和 90° 的情况，塑性应变增量与应力状态方向一致，图中表现为两条竖直线，因为在这两种加载条件下，切应力 $\tau_{z\theta}$ 以及 $d\tau_{z\theta}$ 始终为 0，那么塑性应变 $d\epsilon_{z\theta}^p$ 也始终为 0，根据式 (28) 计算得到的塑性应变方向角也为 0。而 $\alpha=45^\circ$ 的整个加载过程中，应力状态和应力增量始终为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{z\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{z\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 及 } d\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d\tau_{z\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ d\tau_{z\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

这就意味着计算得到的塑性应变只有 $d\epsilon_{z\theta}^p$ 不为 0，其他量都为 0，所以计算的方向角始终为 45° 。总的来讲，本文模型能合理描述塑性应变主方向角的偏离规律以及这种角度偏离随应力接近临界状态而减弱的现象。值得注意的是，这样的试验现象在 Cai 等^[25]试验中也被观察到。由此可以推断，非共轴行为在一定程度上是由切应力引起的。

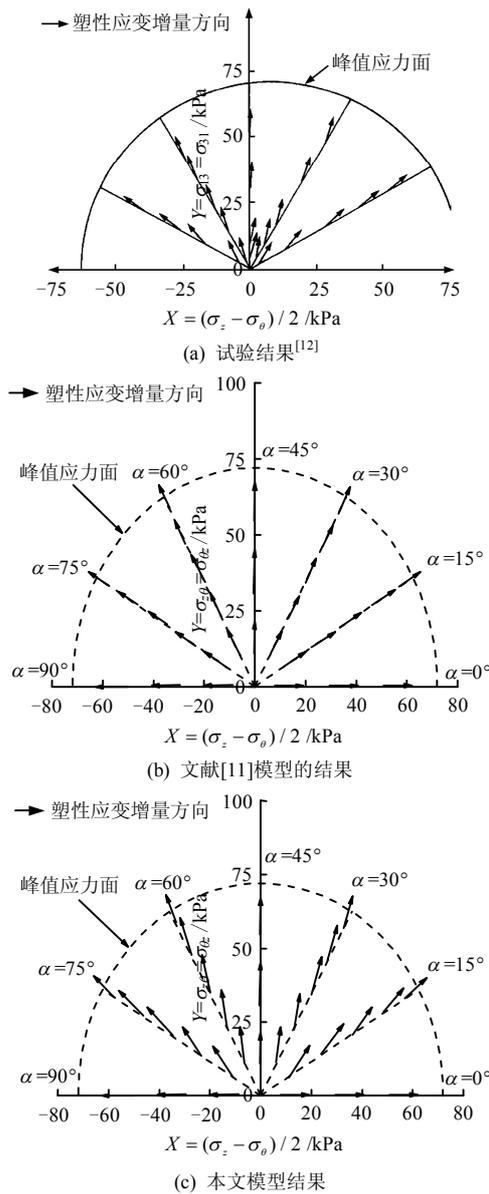


图 7 不同主应力方向应力路径塑性应变增量方向

Fig.7 Plastic strain increment in different stress paths with various principal stress directions

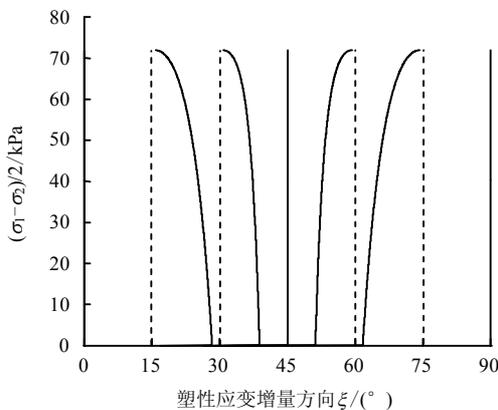


图 8 不同主应力方向应变路径塑性应变增量方向随应力的变化

Fig.8 Variation of plastic strain increment direction with stress in different stress paths with various principal stress directions

在纯应力主轴旋转剪切试验过程中，受载土体先单调剪切至某一应力比 $(\sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 + \sigma_3) = \sin \phi_m$ ，然后保持 p 和 q 值不变，只改变主应力轴方向。图 9 为不同应力比（对应于 $\phi_m = 20^\circ、30^\circ、40^\circ$ ）进行纯扭剪时，文献[11]模拟主应力方向夹角与应变增量方向夹角之间关系，并与 Gutierrez 等^[12]的试验结果进行对比。由于本文采用应力、应变 9 分量的形式进行计算，结果与文献[11]中对应结果不同。从图上可以看出，不同应力比得到的非共轴线重合，模拟的非共轴角要大于试验的结果，且不随 ϕ_m 的变化而变化。由于纯扭剪试验是接近于中性加载的卸载模式，按照传统的塑性理论，计算的塑性标量因子为 0，所以图中反映的是模型中非共轴塑性应变增量的变化规律。而对于本文模型，非共轴流动法则与塑性标量因子相关，导致计算的塑性应变增量始终为 0，则表明本文模型无法模拟这种试验。解决卸载中的塑性问题需要引入边界面的概念，不是本文的论述重点，将在另一篇文章中做详细讨论。

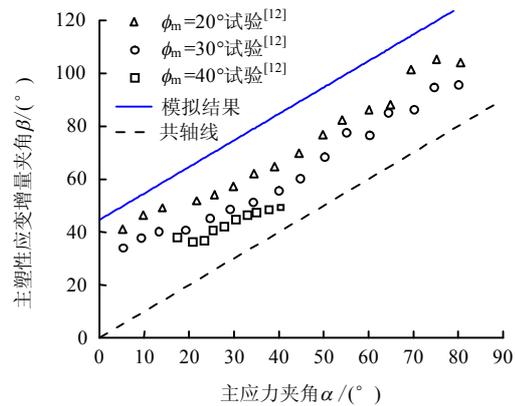


图 9 主应力方向夹角和塑性主应变夹角

Fig.9 Rotational angles of principal stress and plastic principal strain rate

5 结 语

(1) 新的模型能够合理的模拟空心圆柱单剪试验模拟中砂土的非共轴行为。另外，新模型中改进的非共轴流动法则能够合理描述主应力方向固定的空心圆柱扭剪试验中的非共轴行为，而这是原有非共轴模型无法实现的。

(2) 对于纯扭剪试验，由于新模型仍然基于传统的塑性理论，对于卸载和中性加载情况，无塑性变形产生。而未修正的模型由于非共轴塑性应变与共轴塑性应变相独立，不受塑性加载因子影响，能够得到非共轴现象中主应力方向夹角与主塑性应变增量方向夹角的关系。但只能反映两夹角的不一致

性, 不能反映非共轴线随应力比的变化趋势。

总的来讲, 新提出的非共轴流动法则以及与之对应非共轴模型是合理而有效的, 能够描述试验中主要的非共轴现象。但此各向同性模型还需要扩展用以考虑砂土变形中的各向异性以及卸载中的塑性问题。

参 考 文 献

- [1] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 1970, 20(2): 129—170.
- [2] ODA M, KONISHI J. Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear[J]. *Soils and Foundations*, 1974, 14(4): 25—38.
- [3] MIURA K, MIURA K, TOKI S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation[J]. *Soils and Foundations*, 1986, 26(1): 36—52.
- [4] PRADEL D, ISHIHARA K, GUTIERREZ M. Yielding and flow of sand under principal axes rotation[J]. *Soils and Foundations*, 1990, 30(1): 87—99.
- [5] NAKATA Y, HYODO M, MURATA H, et al. Flow deformation of sands subjected to principal stress rotation[J]. *Soils and Foundations*, 1998, 38(2): 115—128.
- [6] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1975, 23: 371—394.
- [7] 钱建固, 黄茂松. 复杂应力状态下岩土体的非共轴塑性流动理论[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25(6): 1259—1264.
QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Non-coaxial plastic flow theory in multi-dimensional stress state[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(6): 1259—1264.
- [8] QIAN J G, YANG J, HUANG M S. Three-dimensional noncoaxial plasticity modeling of shear band formation in Geomaterials[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, 134: 322—329.
- [9] YANG Y, YU H S. Numerical simulations of simple shear with non-coaxial soil models[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, 30: 1—19.
- [10] YANG Y, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulations[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, 30: 1369—1390.
- [11] 扈萍, 黄茂松, 钱建固, 等. 砂土非共轴特性的本构模拟[J]. *岩土工程学报*, 2009, 31(5): 793—798.
HU Ping, Huang Mao-song, QIAN Jian-gu, et al. Non-coaxial plasticity constitutive modeling of sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(5): 793—798.
- [12] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. *Soils and Foundations*, 1996, 31(4): 121—132.
- [13] ARTHUR J R F, MENZIES B K. Inherent anisotropy in a sand[J]. *Geotechnique*, 1972, 22(1): 115—128.
- [14] ARTHUR J R F, CHUA K S, DUNSTAN T. Induced anisotropy in a sand[J]. *Geotechnique*, 1977, 27(1): 13—30.
- [15] LASHKARI A, LATIFI M. A simple plasticity model for prediction of non-coaxial flow of sand[J]. *Mechanics Research Communications*, 2007, 34(2): 191—200.
- [16] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Geotechnique*, 1985, 35(2): 99—112.
- [17] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. *Geotechnique*, 2000, 50(4): 449—460.
- [18] PAPANITRIOU A G, BOUCKOVALAS G D. Plasticity model for sand under small and large cyclic strains: A multi-axial formulation[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2002, 22: 194—204.
- [19] LI X S. A sand model with state-dependent dilatancy[J]. *Geotechnique*, 2002, 52(3): 173—186.
- [20] 黄茂松, 扈萍, 钱建固. 基于材料状态相关砂土临界状态理论的应变局部化分析[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(8): 1133—1139.
HUANG Mao-song, HU Pin, QIAN Jian-gu. Strain localization of sand based on a state-dependent critical state model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(8): 1133—1139.
- [21] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behaviour[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, 128: 868—880.
- [22] NOVA R, WOOD D M. A constitutive model for sand in triaxial compression[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics*, 1979, 3: 255—278.
- [23] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands[J]. *Geotechnique*, 1997, 47(2): 255—272.
- [24] PRADHAN T B S, TATSUOKA F, HORII N. Simple shear testing on sand in a torsional shear apparatus[J]. *Soils and Foundations*, 1988, 28(2): 95—112.
- [25] CAI Y, YU H S, WANATOWSKI D, et al. Noncoaxial behavior of sand under various stress paths[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2013, 139(8): 1381—1395.