

基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进DDA方法

赵 健¹, 肖 明¹, 杨 阳², 陈俊涛¹, 李冬冬¹

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 长江勘测规划设计研究有限责任公司, 湖北 武汉 430010)

摘 要: 针对非连续变形分析中开合迭代难以收敛的难题, 基于块体接触约束状态和块体位移之间的关系, 提出了基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法。采用双曲正切函数来逼近阶跃函数, 利用阶跃函数将块体接触约束状态用块体位移来表达, 以此来替代开合迭代, 避免了开合迭代难以收敛的难题。利用拉格朗日插值原理, 推导得到只含有块体位移为未知量的块体系统势能函数, 并利用变尺度法来求解总体势能函数的极值以得到块体位移。分别结合滑块模型和地下洞室模型, 分析了改进 DDA 方法的计算精度和计算速度, 验证了文中提出的改进 DDA 方法的正确性和稳定性。研究表明: 基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法具有较高的精度, 且相比较传统 DDA 方法而言, 具有更为稳定的和更为强健的计算收敛性。因此, 基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法是一种稳定有效的数值计算方法, 为解决非连续变形中开合迭代难以收敛的问题提供了新思路。

关 键 词: 开合迭代; 接触约束; 块体位移; 势能函数; 变尺度法

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 07-2103-10

Improved DDA method based on approximated step function and Lagrange interpolation

ZHAO Jian¹, XIAO Ming¹, YANG Yang², CHEN Jun-tao¹, LI Dong-dong¹

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. Changjiang Institute of Survey, Planning, Design and Research, Wuhan, Hubei 430010, China)

Abstract: To resolve problem of poor convergence in open-close iteration of discontinuous deformation analysis, an improved DDA method based on approximated step function and Lagrange interpolation is developed based on the relationship between the state of contact constraints within blocks and the block displacement. Hyperbolic tangent function is used to approximate the step function. The state of contact constraints within blocks is represented by block displacement using step function, which replaces the function of open-close iteration and avoids the problem of poor convergence in open-close iteration. The potential energy function of block system only containing the block displacement as unknown variable is derived with the principle of Lagrange interpolation. The extremum of general potential energy function is analyzed to obtain the block displacement. With the model of sliding block and underground chamber respectively, computational accuracy and computational speed of the improved DDA method are analyzed, and the correctness and the iterative stability of the improved DDA method is verified. Research shows that the improved DDA method based on approximated step function and Lagrange interpolation produces high precision, and it has a more stable and more robust computing convergence compared with the traditional DDA. Therefore, the improved DDA method based on approximated step function and Lagrange interpolation is a stable and effective numerical method and it provides a new approach for solving the problem of poor convergence in open-close iteration of discontinuous deformation.

Keywords: open-close iteration; contact constraint; block displacement; potential energy function; variable metric method

1 引 言

由石根华提出的块体系统不连续变形分析^[1]

(discontinuous deformation analysis, DDA)方法是针对不连续岩体而发展起来的一种新的高效数值分析方法。DDA 方法能高效地模拟块体之间的相互接

收稿日期: 2016-01-04

基金项目: 国家重点基础研究计划(973)项目(No. 2015CB057904); 国家自然科学基金(No. 51579191)。

This work was supported by the National Key Basic Research and Development Program (973 Program) (2015CB057904) and the National Natural Science Foundation of China (51579191).

第一作者简介: 赵健, 男, 1991 年生, 博士研究生, 主要从事地下工程和管道结构方面的研究工作。E-mail: slzj@whu.edu.cn

通讯作者: 肖明, 男, 1957 年生, 博士, 现任武汉大学水利水电学院教授, 主要从事地下洞室施工开挖及锚固支护研究。E-mail: mxiao@whu.edu.cn

触, 充分考虑到不连续面对于块体运动的影响, 从而计算出岩体的位移和变形。

是否考虑接触问题是区别 DDA 方法和有限元方法的主要特征之一^[2], 由于 DDA 方法所考虑的都是被结构面所切割而成的不连续块体, 因此, 块体之间的相互接触问题是 DDA 分析的主要任务之一。传统 DDA 方法通过引入罚函数法^[3], 用弹簧模拟块体之间的相互接触力, 允许块体之间有一定的嵌入, 通过罚因子控制嵌入距离, 从而影响计算精度。Amadei 等^[4]引入增广 Lagrange 乘子法来满足相邻块体之间的接触约束, 该算法能精确满足所设定的等式接触条件。上述两种比较常见的方法都存在的一个共同难题是不能事先预知块体之间的接触约束状态, 不能直接计算出确定的接触矩阵, 只能反复进行开合迭代, 反复修改块体之间的接触约束状态和系统的接触矩阵, 并通过试算求得块体之间的真实接触约束状态。同时开合迭代的收敛性不稳定, 对计算时步的要求非常高, 要达到迭代稳定状态比较难, 反复进行开合迭代所消耗的时间也较长。且当块体模型较为复杂时, 接触判断也更为不易得到, 开合迭代所消耗的时间随着接触对的增加而大幅增加, 计算效率较低。

目前针对开合迭代的改进研究的文献比较少, 大部分文献仍然集中在对接触力和接触判断的研究上。江巍^[5]、李小凯等^[6]、郑宏等^[7]提出了基于线性互补的非连续变形分析, 该方法从块体动量守恒变分方程出发, 用线性互补关系对法向和切向接触约束条件进行描述, 避免了开合迭代, 但在确定角-角接触有效进入线时仍然需要进行迭代试算。冯细霞等^[8]、邬爱清等^[9]推导了静力条件下块体的接触位移理论, 剖析了 DDA 方法中开合迭代的完整实现过程, 证明了开合迭代的合理性, 但没有从根本上解决开合迭代难以收敛的问题。

本文针对开合迭代难以收敛的难题, 提出了基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法。传统 DDA 方法可以看成是块体在接触约束状态下的系统势能求极值问题, 在该问题中所有的接触约束状态和块体位移是两组未知量, 相当于是存在两组待求量。但块体系统中的接触约束状态和块体位移并不是两组完全独立互不相关的变量, 块体系统的接触约束状态可以通过块体位移来表示, 两者相互关联。本文通过对块体系统的接触约束状态和块体位移之间的关系进行研究, 将接触约束状态用块体位移来表达, 推导得到只含有块体位移为未知量的块体系统总体势能函数, 无需进行开合迭代求解

接触约束。同时利用 DFP 变尺度法求得块体系统势能的最小极值, 从而得到块体系统的最终稳定状态。

2 采用块体位移显示接触约束状态

为了便于改进 DDA 方法的块体系统势能函数的推导, 本文将块体进行内部划分并离散成三角形单元^[10-11], 如图 1 所示。

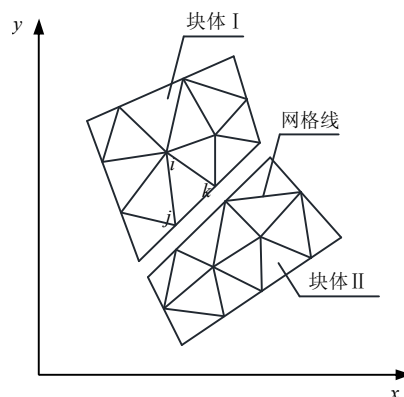


图 1 改进 DDA 方法分析模型中的网格划分
Fig.1 Meshing in analysis model of improved DDA method

块体系统中采用块体节点位移 $(u_i, v_i) (i=1, \dots, Np)$ 作为未知量进行求解, 其中 Np 为模型中所有节点的总数, 那么总体块体势能函数中的未知量可以表示为 $\{D\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{Np}, v_{Np}\}^T$ 。

求解块体系统的运动位移实际上是对块体系统势能函数求极值的过程^[3], 传统 DDA 方法中块体位移和块体之间的接触约束状态都是未知的, 在时步 t 时的块体系统总体势能函数可以表示成以下函数:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_e} \Pi_{e-i}(\{D\}, t) + \sum_{j=1}^{N_c} \Pi_{c-j}(\{D\}, \{C\}, t) \quad (1)$$

式中: Π_{e-i} 和 Π_{c-j} 分别为块体系统势能函数中的单元势能和接触势能; N_e 和 N_c 分别为块体系统中块体单元数量和接触对数量; $\{D\}$ 代表块体系统的位移; $\{C\}$ 代表块体系统接触对的接触约束状态(张开、固定或滑动)。

在不同的计算时步, 块体系统必然存在与之相对应且惟一的位移状态, 在该位移状态下也对应着惟一的块体接触约束关系, 块体接触约束状态和块体位移之间可以表示成以下形式:

$$\{C\} = g(\{D\}) \quad (2)$$

将式 (2) 带入式 (1) 中, 可以得到

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_e} \Pi_{e-i}(\{D\}, t) + \sum_{j=1}^{N_c} \Pi_{c-j}(\{D\}, g(\{D\}), t) \quad (3)$$

式(3)中只存在含有块体位移 $\{D\}$ 的未知量, 块体接触约束状态 $\{C\}$ 已经用块体位移 $\{D\}$ 表示, 因此, 若要对块体系统的总体势能函数 Π 求极值, 便省去了开合迭代试求块体接触约束的过程, 可以直接对块体位移 $\{D\}$ 求导求解势能函数的极值。

3 接触判别及接触势能函数的表达

3.1 接触嵌入判断及嵌入距离

设变形前点 P_1 移动到变形后的点 P'_1 , P_2P_3 是进入线, (x_i, y_i) 和 (u_i, v_i) 分别是 $P_i (i=1, 2, 3)$ 的坐标和位移。如果点 P_1 、 P_2 和 P_3 沿 ox 向 oy 同一方向转动, 且 P'_1 越过线 P_2P_3 , 称之为有嵌入(或侵入)发生, 如图2所示。

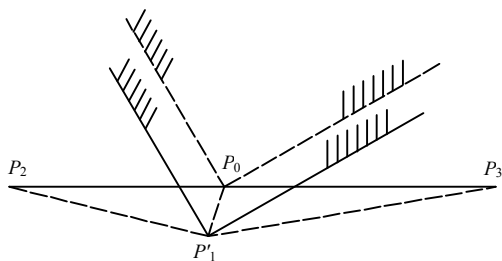


图2 块体的角边接触

Fig.2 Contact between angle and edge in blocks

数学上可用下列不等式说明:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 + u_1 & y_1 + v_1 \\ 1 & x_2 + u_2 & y_2 + v_2 \\ 1 & x_3 + u_3 & y_3 + v_3 \end{vmatrix} < 0 \quad (4)$$

接触进入点 P_0 的坐标 $\{X_0\}$ 是只含有节点位移 $\{D\}$ 为未知量的向量实值函数, 不存在其他未知量^[1], 即

$$\{X_0\} = \{X_0(\{D\})\} \quad (5)$$

当发生嵌入时, 存在法向嵌入距离 d_n 和切向嵌入距离 d_s , 如图3所示。

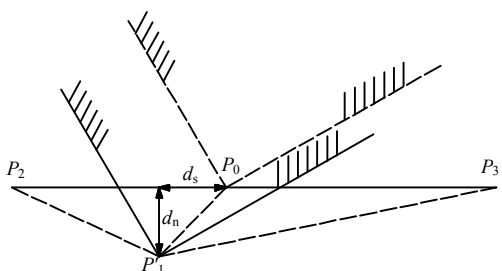


图3 法向和切向嵌入距离

Fig.3 Normal and tangential embedded distance

法向嵌入距离 d_n 和切向嵌入距离 d_s 是只含有节点位移为未知量的向量实值函数, 不存在其他未知量, 即:

$$\begin{cases} d_n = d_n(D) \\ d_s = d_s(D) \end{cases} \quad (6)$$

3.2 采用逼近的阶跃函数模拟接触约束状态

每一种接触都有3种模式: 张开、滑动和锁定。模式变化的准则见表1。

表1 接触状态判别表

Table 1 Discriminant table of contact state

计算时步 $\rightarrow i$ \downarrow $i-1$	张开	滑动	固定
张开	$d_n > 0$	$d_n < 0$ 且 $ d_s > d_n \tan \varphi$	$d_n < 0$ 且 $ d_s < d_n \tan \varphi$
滑动	$d_n > 0$	$d_n < 0$ 且 $\vec{fL} < 0$	$d_n < 0$ 且 $\vec{fL} > 0$
固定	$d_n > 0$	$d_n < 0$ 且 $ d_s > d_n \tan \varphi$	$d_n < 0$ 且 $ d_s < d_n \tan \varphi$

如果要判断当前计算时步的接触状态是张开还是嵌入, 由表1可以看出, 当 $d_n > 0$ 时, 无论上一计算时步是什么接触状态, 当前时步的接触状态都是张开。假设此时存在一个单位阶跃函数 $H_1(\Delta)$ 来模拟是否发生嵌入: 当 $\Delta < 0$ 时, 函数值等于0, 此时发生了嵌入; 当 $\Delta > 0$ 时, 函数值等于1, 此时没有发生嵌入, 见图4。此单位阶跃函数可以表示为

$$H_1(\Delta) = \begin{cases} 1, & \Delta > 0 \\ 0, & \Delta < 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中: Δ 反映了角边嵌入的程度, 其具体表达见式(4)。

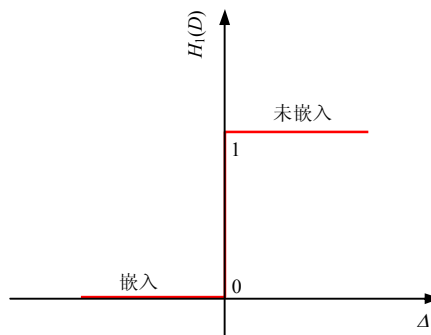


图4 阶跃函数模拟嵌入示意图

Fig.4 Schematic diagram of embedding simulated by step function

在计算之前,并不知道具体的 Δ 的数值,因此,无法通过判断 Δ 的正负值来确定 $H(\Delta)$ 的值,此时可以引入函数逼近思想。由于没有基本函数能够直接逼近单元阶跃函数 $H_1(\Delta)$,因此,在逼近函数 $H_1(\Delta)$ 之前,不妨观察以下3组逼近函数^[12],它们能够充分逼近函数值从-1到1的阶跃函数:

双曲正切函数

$$G_1(\Delta) = \tanh\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) \quad (8)$$

反正切函数

$$G_2(\Delta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) \quad (9)$$

指数函数

$$G_3(\Delta) = 1 - \frac{2}{\frac{\Delta}{\varepsilon} + 1} \quad (10)$$

式中: ε 为逼近因子,当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时,函数逼近程度较高,图5显示了当 $\varepsilon = 5.0 \times 10^{-8}$ 时3种逼近函数的曲线图。

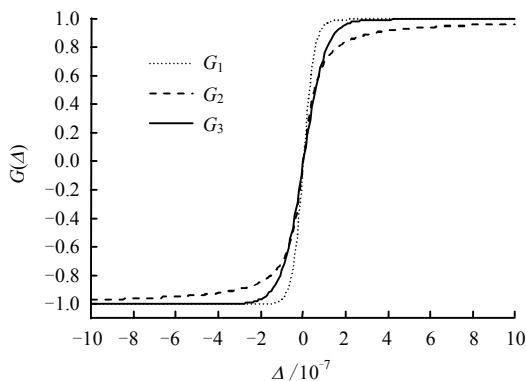


图5 阶跃函数的逼近函数曲线

Fig.5 Approximation function curves in step function

图5中横坐标 Δ 反映了角边嵌入的程度,纵坐标 $G(\Delta)$ 表示函数的逼近值。一般情况下,DDA计算允许嵌入较小,因此,图5中横坐标 Δ 的数量级取为 10^{-7} ,该嵌入 Δ 的数量级能够满足计算要求。若要进一步提高计算精度,可减小逼近因子 ε 。虽然 Δ 和 ε 的数值都很小,但都在目前计算机可计算范围之内,可操作且能够保证计算精度。

由于双曲正切函数 $G_1(\Delta)$ 的逼近程度较高,且表达式也较为简单,便于势能函数的计算,因此,本文采用双曲正切函数 $G_1(\Delta)$ 来逼近阶跃函数 $H_1(\Delta)$ 。

这里对 $G_1(\Delta)$ 进行部分修改来逼近式(7):

$$H_1(\Delta) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \quad (11)$$

同时为了保证式(11)能够充分逼近单位阶跃函数,式(11)中的 ε 要足够小,数量级可以取到 10^{-8} 。

同理,当满足 $d_n < 0$ 时,可以确定当前计算时步发生嵌入,需要判断地是发生了固定嵌入还是滑动嵌入,此时需要根据上一计算时步的接触状态分为两种情况判断当前计算时步的接触状态。当上一计算时步的接触状态为张开或者是固定时,可以采用另外一个阶跃函数 $H_2(d_s/d_n)$ 来模拟固定嵌入和滑动嵌入。由于在上节计算切向嵌入过程中,无法判断 d_s 的正负号,只能判断其绝对值大小,因此,可以认为,当 $d_s/d_n > \tan\varphi$ 或 $d_s/d_n < -\tan\varphi$ 时,函数值等于1,此时发生滑动嵌入;当 $-\tan\varphi < d_s/d_n < \tan\varphi$ 时,函数值等于0,此时发生固定嵌入,其中 φ 为内摩擦角,如图6所示。此函数可用以下函数来表示嵌入模式

$$H_2(d_s/d_n) = \begin{cases} 1, (d_s/d_n > \tan\varphi) \text{ or } (d_s/d_n < -\tan\varphi) \\ 0, -\tan\varphi < d_s/d_n < \tan\varphi \end{cases} \quad (12)$$

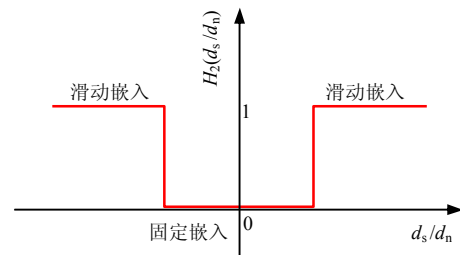


图6 阶跃函数模拟嵌入模式示意图
(上一计算时步为张开或固定)

Fig.6 Schematic diagram of embedded mode simulated by step function(open or fixed on last calculation step)

借鉴式(11), $H_2(d_s/d_n)$ 可以采用下式来逼近:

$$H_2(d_s/d_n) = \frac{1}{2} \tanh\left[\frac{(d_s/d_n - \tan\varphi)}{\varepsilon}\right] - \frac{1}{2} \tanh\left[\frac{(d_s/d_n + \tan\varphi)}{\varepsilon}\right] + 1 \quad (13)$$

当上一计算时步的接触状态为滑动时,可以采用另外一个阶跃函数 $H_3(\vec{f}\vec{L})$ 来模拟固定嵌入和滑动嵌入,其中 \vec{f} 为指向 $\vec{P}_2\vec{P}_3$ 的摩擦力矢量, \vec{L} 为指向 $\vec{P}_2\vec{P}_3$ 的剪切位移矢量,切向嵌入位移 \vec{L} 可以参照上节中切向嵌入距离 d_s 计算,摩擦力矢量 \vec{f} 为上一计算时步的剪切位移矢量 \vec{L}' 与切向刚度 K 的乘积,在此不赘述。因此,可以认为,当 $\vec{f}\vec{L} > 0$ 时,函数

值等于 1，此时发生滑动嵌入；当 $\vec{fL} < 0$ 时，函数值等于 0，此时发生固定嵌入，如图 7 所示。此函数可用以下函数来表示嵌入模式

$$H_3(\vec{fL}) = \begin{cases} 1, & \vec{fL} > 0 \\ 0, & \vec{fL} < 0 \end{cases} \quad (14)$$

是否应标注箭头？

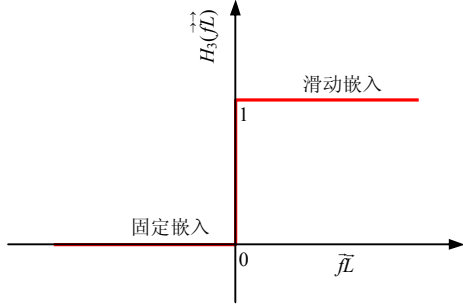


图 7 阶跃函数模拟嵌入模式示意图
(上一计算时步为滑动)

Fig.7 Schematic diagram of embedded mode simulated by step function(slidable on last calculation step)

借鉴式 (11)， $H_3(\vec{fL})$ 可以采用下式来逼近：

$$H_3(\vec{fL}) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\vec{fL}}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \quad (15)$$

接下来引入拉格朗日插值思想来完成由接触带来的势能函数。

3.3 基于拉格朗日插值的接触势能函数

不同的接触约束状态所对应的势能函数是不一样的，且一一对应。当没有接触发生时，此时没有接触函数；当发生固定嵌入时，设此时的接触势能函数为 Π_{fix} ；当发生滑动嵌入时，设此时的接触势能函数为 Π_{slide} 。结合拉格朗日插值思想^[13]，可以将由接触带来的当前时步的势能函数 Π_c 表示为当上一计算时步的接触状态为张开或固定时

$$\begin{aligned} \Pi_{c-i} = & \frac{H_1(\Delta)-1}{0-1} \times \frac{H_2(d_s/d_n)-0}{1-0} \times \Pi_{\text{slide}-i} + \\ & \frac{H_1(\Delta)-1}{0-1} \times \frac{H_2(d_s/d_n)-1}{0-1} \times \Pi_{\text{fix}-i} + \\ & \frac{H_1(\Delta)-0}{1-0} \times 0 \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (16)$$

当上一计算时步的接触状态为滑动时

$$\begin{aligned} \Pi_{c-i} = & \frac{H_1(\Delta)-1}{0-1} \times \frac{H_3(\vec{fL})-0}{1-0} \times \Pi_{\text{slide}-i} + \\ & \frac{H_1(\Delta)-1}{0-1} \times \frac{H_3(\vec{fL})-1}{0-1} \times \Pi_{\text{fix}-i} + \\ & \frac{H_1(\Delta)-0}{1-0} \times 0 \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (17)$$

式中： k 为总时步； i 为当前时步； $\Pi_{\text{fix}-i}$ 和 $\Pi_{\text{slide}-i}$ 分别为当前时步的固定接触势能和滑动接触势能。式

(16) 和式 (17) 表示在上一计算时步的不同接触状态下，某一接触对所带来的势能函数， k 为接触对数量，固定接触势能函数 Π_{fix} 和滑动接触势能函数 Π_{slide} 可以参照传统 DDA 解法^[1]求得，同时结合式 (5)、(6) 可以看出，它们也只含有块体位移为未知量。

将接触势能函数 Π_c 与单元应力、应变分析带来的势能函数 Π_e 相加即为块体系统的总体势能函数 Π_{sum} ，对 Π_{sum} 求导取极值，即可得到块体位移。

4 变尺度法求解块体系统总体势能函数极值

变尺度法是求解无约束多维函数极值问题的一种有效算法，在复杂岩土工程领域应用较多^[14]。该方法避免了计算二阶导数矩阵及其求逆运算，又比梯度法的收敛速度快，具有二阶全局收敛性，特别是对高维问题具有显著的优越性，因此，选择变尺度法作为基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法中块体系统总体势能函数求极值的方法。

4.1 变尺度法的基本迭代格式

变尺度法是在牛顿法的基础上发展起来的，其构造的迭代公式为

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha^{(k)} A^{(k)} \nabla f(X^{(k)}) \quad (18)$$

将块体系统总体势能函数 Π 和块体位移 D 带入上式中，即为

$$D^{(k+1)} = D^{(k)} - \alpha^{(k)} A^{(k)} \nabla \Pi(D^{(k)}) \quad (19)$$

式中： $D^{(k+1)}$ 和 $D^{(k)}$ 分别为迭代步为 $k+1$ 和 k 时的块体位移； Π 为总体势能函数； $\nabla \Pi$ 为总体势能函数关于块体位移 D 的梯度； $\alpha^{(k)}$ 为迭代步为 k 时的最优步长； $A^{(k)}$ 为人为构造的一个 $N_p \times N_p$ 阶对称矩阵 (N_p 为块体系统的总节点数)。

4.2 梯度 $\nabla \Pi$ 的确定

块体系统的总体势能函数比较复杂，其关于块体位移 D 的梯度 $\nabla \Pi$ 往往无法解析求出，因此，采用数值方法去逼近梯度是十分必要的，目前广泛采用向前差商代替梯度，即用 $\overline{\nabla \Pi}(D^{(k)})$ 代替 $\nabla \Pi(D^{(k)})$ ，其具体表达如下：

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \Pi}(D^{(k)}) = & (\overline{\nabla \Pi}_1(D^{(k)}), \overline{\nabla \Pi}_2(D^{(k)}), \dots, \overline{\nabla \Pi}_{N_p}(D^{(k)})) \\ \overline{\nabla \Pi}_i(D^{(k)}) = & \frac{\Pi(D^{(k)} + h_k e_i) - \Pi(D^{(k)})}{h_k} \quad (i=1, N_p) \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $\nabla \Pi_i(D^{(k)})$ 为时步为 k 时的节点 i 所对应的梯度; h_i 的选择取决于 $\Pi(D_i)$ 和 D_i ; e_i 为 n 维欧氏空间中的单位向量。

4.3 最优步长 $\alpha^{(k)}$ 的确定

$\alpha^{(k)}$ 为迭代步为 k 时的最优步长因子, 可由一维搜索得到

$$\Pi(D^{(k)} - \alpha^{(k)} A^{(k)} \nabla \Pi(D^{(k)})) = \min_{\alpha} \Pi(D^{(k)} - \alpha A^{(k)} \nabla \Pi(D^{(k)})) \quad (21)$$

在采用上式需求最优解时, 过分追求最优步长 $\alpha^{(k)}$ 的精确反而会降低计算效率, 此时可以采用非精确线性搜索方法。

4.4 变尺度矩阵 $A^{(k)}$ 的确定

$A^{(k)}$ 在迭代过程中随迭代点的位置变化而变化, 随着迭代过程而不断地修正构造矩阵 $A^{(k)}$, 使得它在整个迭代过程中逐步逼近势能函数在极小点处的 Hesse 矩阵的逆矩阵 $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$ 。

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} + \frac{\Delta D^{(k)} [\Delta D^{(k)}]^T}{[\Delta D^{(k)}]^T \Delta g^{(k)}} - \frac{A^{(k)} \Delta g^{(k)} [\Delta g^{(k)}]^T A^{(k)}}{[\Delta g^{(k)}]^T A^{(k)} \Delta g^{(k)}} \quad (22)$$

式中: $D^{(k)}$ 为迭代步为 k 时的块体位移; 相邻迭代步位移差 $\Delta D^{(k)} = D^{(k+1)} - D^{(k)}$; $g^{(k)}$ 为迭代步为 k 时的总体势能函数关于块体位移的梯度 $g^{(k)} = \nabla \Pi(D^{(k)})$; 相邻迭代步梯度差 $\Delta g^{(k)} = g^{(k+1)} - g^{(k)}$ 。得到变尺度矩阵 $A^{(k+1)}$ 的构造形式, 将其带入式(20)中, 经过迭代, 检验是否满足迭代终止条件 $\|\nabla \Pi(D^{(k)})\| \leq \varepsilon'$, ε' 为停机精度。当满足终止条件时, 即可以得到块体系统的最小势能 Π_{\min} 和相应的块体位移 D 。

5 算例验证

5.1 滑块模型

5.1.1 计算模型

为了便于将程序计算结果与相应的理论解析解相比较, 这里以一个简明但不失一般性的滑动模型为实例, 计算滑块滑动过程中的位移和嵌入, 并与相应的理论解析解相比较, 以分析该方法的计算精度和合理性。

滑动模型如图 8 所示, 该滑动模型由含有折角的变坡度基座^[15]和自由滑块组成。变坡度基座的底边和侧边固定, 不能发生位移, 滑块在滑动面上自由滑动。变坡度基座上段倾角 θ_1 为 40° , 坡长 L_1 为 9 m, 下段倾角 θ_2 为 20° , 坡长 L_2 为 16 m。块体和基座的弹性模量 E 为 1 GPa, 泊松比 μ 为 0.3, 接触

刚度取为 $K = 50E$, 具体模型如图 9 所示。

由于坡面上存在折角, 为了尽量减小块体在折角处的能量损失, 应尽量减小块体体积, 使其在折角处平稳过渡。取滑块质量 m 为 5.0×10^3 kg, 大小为 0.5×1.0 m, 滑块划分为两个三角形单元, 此时 DDA 计算模型如图 9 所示。

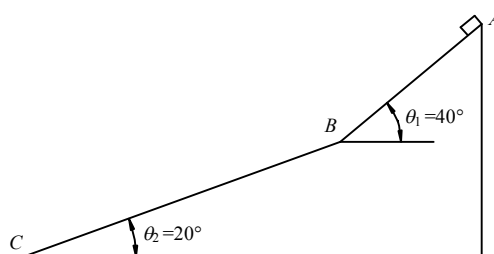


图 8 滑块变坡度模型

Fig.8 Model of sliding block on slope with variable gradients

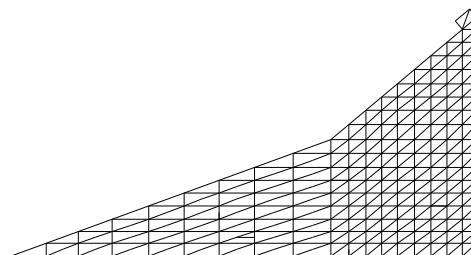


图 9 DDA 数值计算模型

Fig.9 DDA numerical calculation model

由于模型为简单的块体滑动, 因此, 容易得到滑块随着时间变化的位移^[9]。

5.1.2 计算结果

假设在本算例中, 不考虑滑动面上的黏聚力, 考虑当内摩擦角 φ 为 28° 时, 块体从基座顶端开始滑动的运动状态。从理论上分析, 内摩擦角 φ 小于上滑动面坡角 θ_1 且大于下段滑动面坡角 θ_2 , 因此, 滑块应该在上滑动面加速滑动经过坡面折角在下段滑动面上减速滑行一定距离后静止。本文分别采用理论解析解、传统 DDA 方法和改进 DDA 方法计算滑块平行于滑动面的滑动位移, 计算出在不同时刻两种 DDA 的滑动位移计算解 s' 和解析解 s 的绝对误差, 并取 $r = (s - s')/s$ 作为相对误差, 计算结果见图 10~13。

从图 10、11 中可以看出, 两种 DDA 计算值曲线的变化规律基本相同, 但在数值上存在细微差别。对比两种 DDA 计算值的数值可以看出, 改进 DDA 解的绝对误差相对于传统 DDA 解略大。由于绝对误差相对于实际位移来说很小, 且图 11 中两种 DDA 的计算值的绝对误差很接近, 因此, 图 12 中两条 DDA 计算解的相对误差曲线基本重合。

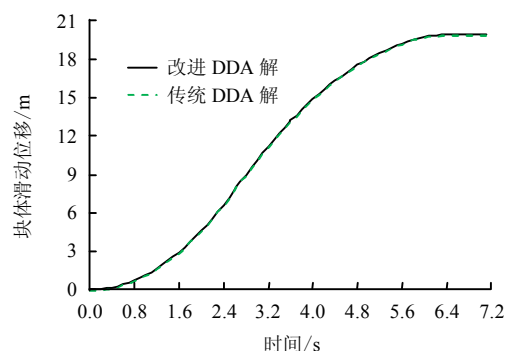


图 10 DDA 解位移时程曲线

Fig.10 Displacement-time curves of DDA solution

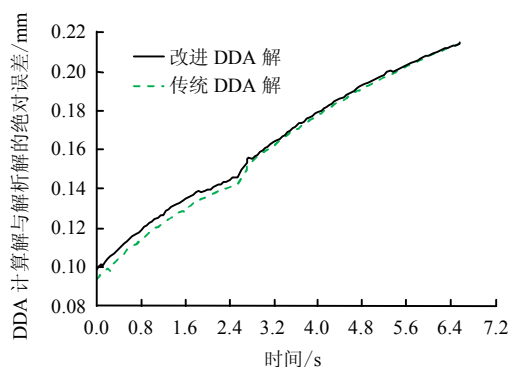


图 11 DDA 解与解析解的绝对误差时程曲线

Fig.11 Absolute error-time curves between DDA solution and analytical solution

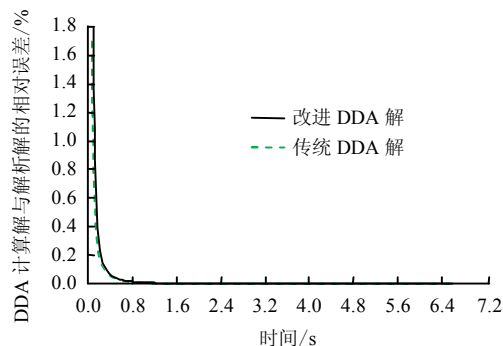


图 12 DDA 解与解析解的相对误差时程曲线 (全局视图)

Fig.12 Absolute error-time curves between DDA solution and analytical solution(overview)

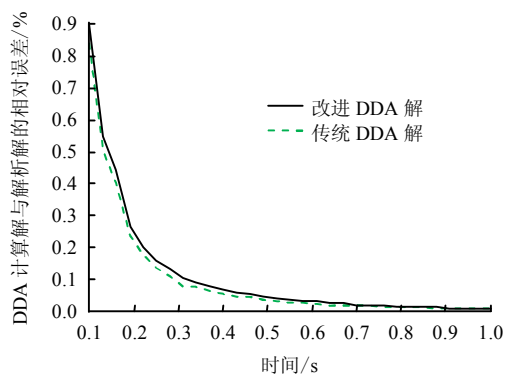


图 13 DDA 解与解析解的相对误差时程曲线 (局部视图)

Fig.13 Absolute error-time curves between DDA solution and analytical solution(partly zoomed-in view)

由于图 12 中的相对误差所跨越的时间区段比较长, 两条曲线只在 0.1~1.0 s 区间段内存在均匀的坡度变化。图 13 显示了该时间段两种 DDA 解的相对误差的局部放大时程曲线, 该时段相对误差的坡度变化较为明显, 且可以看出, 改进 DDA 解的相对误差相对于传统 DDA 解略大。

从图 11~13 可以看出, 在块体运动阶段的初期, 无论是绝对误差还是相对误差, 改进 DDA 解都略大于传统 DDA 解, 这是可以理解的。传统 DDA 方法通过开合迭代能够准确地确定接触约束关系, 但开合迭代收敛不稳定, 而改进 DDA 方法通过双曲正切函数逼近阶跃函数来模拟接触约束关系, 计算精度与嵌入程度 Δ 和逼近因子 ε 有关, 是一种近似求解的方法。但观察两种 DDA 方法的计算精度, 可以发现两者的误差结果范围仍然基本一致, 改进 DDA 方法由逼近因子 ε 和停机条件 $\|\nabla \Pi(D^{(k)})\| \leq \varepsilon'$ 来控制精度, 因此, 可以认为, 基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法具有很高的计算精度, 能够满足工程需要。

块体在滑动过程中与滑动面会产生接触力, 接触力的计算精度直接影响到块体的位移和变形精度^[16]。当内摩擦角 φ 为 41° 时, 块体静止在初始位置, 此时可以计算滑块底面两个节点在滑动面上的法向和切向的嵌入距离, 以此来验证接触力的计算精度。将接触力的解析解^[16]除以接触刚度, 即得到嵌入距离的解析解, 即

$$\begin{aligned} DN_L &= W \cos \theta \left(0.5 + \frac{h}{2b} \tan \theta \right) / K \\ DN_U &= W \cos \theta \left(0.5 - \frac{h}{2b} \tan \theta \right) / K \\ DS &= W \sin \theta / K \end{aligned} \quad (23)$$

式中: DN_L 和 DN_U 分别为块体在斜面上的下接触点 P_L 和上接触点 P_U 的法向嵌入距离; DS 为切向嵌入距离之和; W 为块体重力; h 和 b 分别为滑块的高和宽; θ 为斜面倾角。

将解析解 d 与 DDA 计算结果 d' 进行比较, 取 $r = (d - d')/d$ 作为相对误差, 计算结果见表 2。

表 2 滑块稳定时 3 种计算解的接触力比较

Table2 Comparison of contact force in three calculation solutions with block stabilized

嵌入点	解析解	传统 DDA 解		改进 DDA 解	
	嵌入距离 / 10^{-7} m	嵌入距离 / 10^{-7} m	相对误差 /%	嵌入距离 / 10^{-7} m	相对误差 /%
DNL	5.328 4	5.317 2	0.210 1	5.317 5	0.204 6
DNU	2.178 8	2.168 0	0.495 7	2.168 2	0.486 5
DSL		3.668 3		3.668 4	
DSU		2.620 2		2.620 5	
DS	6.299 3	6.288 5	0.171 4	6.288 9	0.165 1

从表 2 可以看出,法向和切向的嵌入距离与解析解的误差较小,相对误差基本控制在 0.5%以内,计算精度较高,则可认为接触力的计算精度也较高,能够满足工程要求。

5.2 地下洞室模型

5.2.1 计算模型

镇安水电站地下厂房模型如图 14 所示,两条断层穿过厂房模型,主厂房部分受断层切割严重,整个厂房模型分成 4 大块体。模型两侧边施加水平方向的约束,底部施加固定约束。岩体重度 γ 为 27 kN/m^3 ,弹性模量 E 为 18 GPa ,内摩擦角 φ 为 50° ,泊松比 μ 为 0.23 ,接触刚度取 $P = 50E$ 。

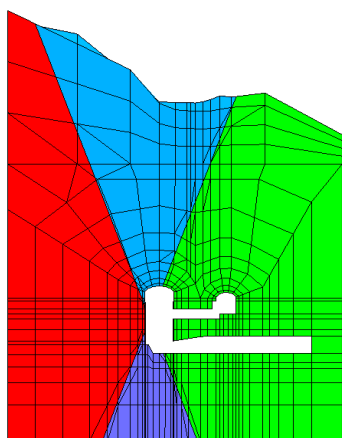


图 14 考虑断层的镇安地下厂房断面图
Fig.14 Sectional view of Zhen'an underground powerhouse considering geological faults

5.2.2 计算结果

本文分别采用传统 DDA 方法和改进 DDA 方法计算对地下洞室进行分析,本文重点研究被断层切割严重的主厂房区域。取时间步长为 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$,图 15、16 分别显示了 50 个时间步后的主厂房洞周的最大主应力和位移的分布情况。规定压应力为负,拉应力为正。

从图 15、16 可以看出,无论是最大主应力分布还是位移分布,在断层附近都出现了比较明显的非连续变化特征,断层两侧出现了不连续跳跃现象。同时比较传统 DDA 解和改进 DDA 解,两者计算结果差异很小,基本可以认为相同,能够较为合理地反映受断层切割的地下厂房围岩稳定情况。

本文拟采用计算消耗时间作为比较的评判标准。由于两种 DDA 计算程序在前处理、单元应力、应变分析以及后处理方面没有区别,因此,消耗时间的不同往往是由接触判断、求解接触势能以及求极值方法的不同所导致的,因此,采用消耗时间来

判别两种计算方法的优劣是可行的。

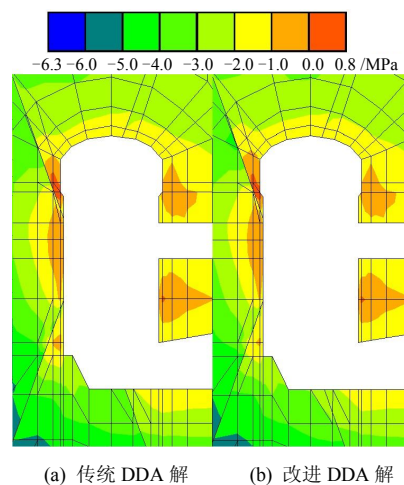


图 15 主厂房洞周最大主应力分布图
Fig.15 Distribution map of maximum principal stress of surrounding rock of main powerhouse

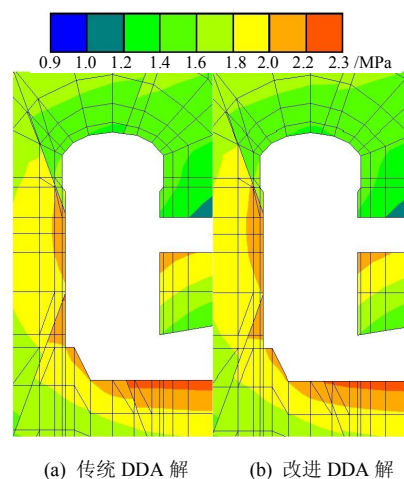


图 16 主厂房洞周位移分布图
Fig.16 Distribution map of displacement of surrounding rock of main powerhouse

下文补充了当接触刚度 P 分别取为 $80E$ 、 $100E$ 、 $120E$ 和 $150E$ 时,分别用传统 DDA 方法和改进 DDA 方法计算 50 个时间步后的地下洞室围岩稳定情况,记录各自消耗的时间并比较,具体计算结果见表 3。

表 3 采用不同接触刚度时迭代时间比较
Table3 Comparison of iteration time with different contact stiffnesses

接触刚度	迭代时间/s	
	传统 DDA 法	改进 DDA 法
50E	3 415.2	2 983.6
80E	4 115.9	3 055.4
100E	2 948.7	2 885.7
120E	中断	2 979.5
150E	5 187.9	3 013.3

从上表可以看出,在不同的接触刚度 P 的情况下,两种 DDA 方法所耗用的时间及其变化规律不一样。改进 DDA 方法计算比较稳定,计算时间基本维持在 2 900 s 左右,接触刚度对计算时间的影响不大。相比而言,传统 DDA 方法计算所消耗的时间一般都在 2 900 s 以上,且变化规律不明显。接触刚度的变化会改变嵌入距离,从而影响块体之间的接触判断。

同时,还注意到,当接触刚度为 $120E$ 时,传统 DDA 方法并不能成功计算,表 3 中的“中断”代表其在开合迭代中,不能满足接触条件,不停地减小时间步长,陷入死循环而被迫终止^[16]。由此可以看出,传统 DDA 方法的计算稳定性不强,在某些计算过程中,开合迭代不易满足,不能得到最终的正确解,而改进 DDA 方法不存在开合迭代,因此,不会出现此问题,由此可以看出来,改进 DDA 方法计算稳定性更好,该算法更为强健。

综合以上两点可以看出,改进 DDA 方法在计算速度上相对于传统 DDA 方法有所加快,同时改进 DDA 方法迭代时间变化规律更为明显,且其迭代计算的稳定性更为强健,因此,改进 DDA 方法是一种更为稳定有效的计算方法。

6 结 论

(1) 本文推导了只存在块体位移为未知量的接触进入点和法向切向嵌入距离的表达式,并选取了合适的双曲正切函数来逼近阶跃函数,以此来模拟块体之间是否接触。该阶跃函数表示了块体接触约束状态和块体位移之间的关系,以此避免了开合迭代的求解。在此接触上,基于拉格朗日插值原理,推导出了只存在块体位移为未知量的包括接触势能在内的总体势能函数表达式。

(2) 块体位移的求解实际上式块体系统总体势能函数求极值的过程,将其利用变尺度法求解块体系统总体势能极值并得到块体位移。该方法计算精度高,收敛速度快,并具有二阶全局收敛性,是针对改进 DDA 方法的一种高效稳定的势能求极值的方法。

(3) 算例表明,改进 DDA 方法和传统 DDA 方法的误差范围和变化规律基本一致,在滑块滑动后期两种 DDA 方法的误差基本重合,且能通过逼近因子和停机准则来控制计算精度,两者计算精度相似,因此,可以认为,改进 DDA 方法的计算精度较高。同时,由于传统 DDA 方法需要进行开合迭代,其收敛的稳定性不高,相比较而言,改进 DDA

方法无需进行开合迭代,其计算稳定性更好,该算法更为强健。因此,基于逼近阶跃函数和拉格朗日插值的改进 DDA 方法是一种更为稳定有效地解决非连续变形的计算方法,为改进开合迭代提供了新思路。

参 考 文 献

- [1] SHI G H. Discontinuous deformation analysis—A new numerical model for the statics and dynamics of block systems[D]. Berkeley: Department of Civil Engineering, University of California, 1988.
- [2] TIAN Q, ZHAO Z, BAO H. Block fracturing analysis using nodal-based discontinuous deformation analysis with the double minimization procedure[J]. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, 38(9): 881—902.
- [3] 姜清辉. 三维非连续变形分析方法的研究[D]. 武汉: 中国科学院研究生院(武汉岩土力学研究所), 2000. JIANG Qing-hui. Research on three dimensional discontinuous deformation analysis method[D]. Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Graduate School of Chinese Academy of Sciences, 2000.
- [4] AMADEI B, LIN C, STURE S, et al. Rock Mechanics[M]. Rotterdam: Balkema, 1994. 583—590.
- [5] 江巍. 基于互补理论的非连续变形分析方法[D]. 中国科学院研究生院(武汉岩土力学研究所), 2009. JIANG Wei. Discontinuous Deformation Analysis Method based on Complementary Theory[D]. Institute of Rock and Soil Mechanics, Graduate School of Chinese Academy of Sciences, 2009.
- [6] 李小凯, 郑宏. 基于线性互补的非连续变形分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(6): 1787—1794. LI Xiao-kai, ZHENG Hong. Discontinuous deformation analysis based on linear complementarity theory[J]. *Rock & Soil Mechanics*, 2014, 35(6): 1787—1794.
- [7] 郑宏, 江巍. 基于互补理论的非连续变形分析方法[J]. 中国科学, 2009(10): 1702—1708. ZHENG Hong, JIANG Wei. Discontinuous deformation analysis based on complementary theory[J]. *Science in China*, 2009, 52(9): 2547—2554.
- [8] 冯细霞, 邬爱清, 卢波. DDA 块体接触开-闭迭代研究[J]. 长江科学院院报, 2014, 31(4): 52—58. FENG Xi-xia, WU Ai-qing, LU Bo. Open-close iterations for DDA contacts[J]. *Journal of Yangtze River*

- Scientific Research Institute**, 2014, 31(4): 52—58.
- [9] 邬爱清, 冯细霞, 卢波. 非连续变形分析中时间步及弹簧刚度取值研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(3): 891—897.
- WU Ai-qing, FENG Xi-xia, LU Bo. Parametric research on time step and spring stiffness in DDA[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(3): 891—897.
- [10] SHYU K. Nodal-based discontinuous deformation[D]. Berkeley: Civil Engineering, University of California, 1993.
- [11] BAO H R. Nodal based discontinuous deformation analysis[D]. Singapore: Civil and Environmental Engineering, Nanyang Technology University, 2010.
- [12] 李翠华. 三维弹塑性和接触问题的非线性互补方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2014.
- LI Cui-hua. Researches on the nonlinear complementary method for 3D Elastoplasticity problems and contact problems[D]. Wuhan: Wuhan University, 2014.
- [13] 张志国, 肖明. 地下洞室监测位移场的反演和围岩稳定评判分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(4): 813—818.
- ZHANG Zhi-guo, XIAO Ming. Inversion of monitored displacement field and evaluation of surrounding rock stability of underground caverns[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics & Engineering**, 2009, 28(4): 813—818.
- [14] 陈俊涛, 肖明, 刘钢. 改进变尺度法在地下工程位移反分析中的应用[J]. 地下空间与工程学报, 2008, (5): 825—829.
- CHEN Jun-tao, XIAO Ming, LIU Gang. Application of improved variable-metric method in displacement back analysis of underground engineering[J]. **Chinese Journal of Underground Space & Engineering**, 2008, (5): 825—829.
- [15] 邬爱清, 丁秀丽, 卢波, 等. DDA方法块体稳定性验证及其在岩质边坡稳定性分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(4): 664—672.
- WU Ai-qing, DING Xiu-li, LU Bo, et al. Validation for rock block stability and its application to rock slope stability evaluation using DDA method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics & Engineering**, 2008, 27(4): 664—672.
- [16] 黎勇, 冯夏庭, 栾茂田, 等. 非连续变形计算力学模型中的接触力元[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2004, 23(11): 1112—1115.
- LI Yong, FENG Xia-ting, LUAN Mao-tian, et al. Contact force element of discontinuous deformation computational mechanics model[J]. **Journal of Northeastern University**, 2002, 23(11): 1112—1115.
- [17] YEUNG M R. Application of Shi's discontinuous deformation analysis to the study of rock behavior[D]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1991.
- [17] 马林, 邵生俊, 陈昌禄. 黄土结构性对挡土墙土压力的影响分析[J]. 地下空间与工程学报, 2013, 9(3): 596—602.
- MA Lin, SHAO Sheng-jun, CHEN Chang-lu. Impact of loess structural properties on earth pressure of retaining wall[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2013, 9(3): 596—602.
- [18] LI R J, LIU J D, YAN R, et al. Characteristic of structural loess strength and its preliminary framework of joint strength formula[J]. **Water Science and Engineering**, 2014, 7(3): 319—330.
- [19] LI R J, LIU J D, YAN R, et al. Evaluation of loess landslide disaster based on the developed hyperbola strength of structural loess[J]. **Disaster Advances**, 2013, 6(Supp. 5): 316—326.
- [20] 李荣建, 刘军定, 郑文, 等. 基于结构性黄土抗拉和抗剪特性的双线性强度及其应用[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(增刊 2): 247—252.
- LI Rong-jian, LIU Jun-ding, ZHENG Wen, et al. A bilinear strength formula for structured loess based on tensile strength and shear strength and its application[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(Supp. 2): 247—252.
- [21] 宋焱勋, 李荣建, 刘军定, 等. 结构性黄土的双曲线强度公式及其破坏应力修正[J]. 岩土力学, 2014, 35(6): 1534—1540.
- SONG Yan-xun, LI Rong-jian, LIU Jun-ding, et al. A hyperbola strength formula of structural loess and its modifying algorithm under failure stress state[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(6): 1534—1540.

上接第 2086 页