DOI：10.16285/j.rsm.2017.08.009

一个与弹性应变能相协调的脆性横观各向同性材料破坏准则

王　蕉，楚锡华，姜清辉

（武汉大学 土木建筑工程学院，湖北 武汉 430072）

摘　要：岩土材料广泛存在于自然界中，在重力沉积作用下表现出明显的横观各向同性。为了更好地研究横观各向同性材料的破坏机制，基于 Christensen 提出的破坏准则应与弹性应变能函数相协调的思想，推导了横观各向同性材料的弹性应变能，通过应变能的分解和整理，分析了应变能中各项所表示的物理意义，确定了级数展开的基，从而使得应变能函数和材料破坏准则在形式上具有一致性，最终提出了一个适用于脆性横观各向同性材料的破坏准则。该准则由 5 项能够与弹性应变能相协调的部分组成，仅包含 5 个独立且物理力学意义清晰的参数。基于常规试验给出了 5 个独立参数的确定方案。通过与 Tsai-Wu 准则及已发表的多组试验数据的对比，验证了准则的正确性。

关　键　词：强度理论；横观各向同性；破坏准则；弹性应变能；脆性材料

中图分类号：TU 457　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000－7598 (2017)08－2221－07

Failure criterion coordinated with elastic energy for transversely isotropic brittle materials

WANG Jiao,　CHU Xi-hua,　JIANG Qing-hui

(School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: Under natural conditions, geomaterials under gravity usually exhibit transversely isotropic properties. In this study, a new failure criterion for transversely isotropic brittle materials has been developed. The derivation of this failure criterion is driven by the strain energy density, rather than a completely phenomenological approach. So the form of the failure criterion can be coordinated with elastic strain energy density. This coordination explain the terms in the failure criterion as well as those in the elasticity theory. Obtained by series expansion this new failure criterion includes five independent material parameters and five terms which can be coordinated with those of the elastic energy. These material parameters can be determined by corresponding independent test, and are not just fitting parameters. The shapes of the failure surface in the stress space and in the π-plane of the proposed criterion are compared with Tsai-Wu criterion. Although the derivation of the criterion is totally different, the comparison results show this failure criterion is similar to Tsai-Wu criterion. In addition, this failure criterion can be degenerated into the criterion suggested by Christensen for isotropic materials. Comparisons with three sets of experimental data are compared to illustrate the proposed criterion. the results illustrated the prediction ability of the criterion.

Keywords: strength theory; transversely isotropy; failure criterion; elastic energy; brittle materials

1　引　言

由于材料破坏的复杂性及材料破坏预测在工程中的重要性，材料的破坏准则一直以来都是力学与材料领域研究的重点和难点。虽然已有众多基于各向同性假设的破坏准则在工程中得到了广泛应用，如 Mohr-Coulomb 准则、Drucker-Prager 准则、双剪破坏准则、三剪破坏准则以及拉伸破坏准则等[1−4]。但考虑到岩土材料、复合材料等常见工程材料多具有明显的各向异性性质，必然需要发展和应用包含各向异性影响的破坏准则[5−6]。现有的各向异性准则，如 Hill 准则、Tsai-Wu 准则等[7−9]，或包含

收稿日期：2016-09-10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No. 11172216，No. 11472196）；国家重点基础研究发展计划（No. 2010CB731502）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172216, 11472196) and the National Program on Key Basic Research and Development Program of China (2010CB731502).
第一作者简介：王蕉，男，1991 年生，博士，主要从事计算固体力学与岩土颗粒材料力学方面的研究工作。E-mail：wangjiao_wj@whu.edu.cn
通讯作者：楚锡华，男，1977 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事计算固体力学与岩土颗粒材料力学方面的研究工作。E-mail：Chuxh@whu.edu.cn

参数较多或参数缺乏明确的物理意义，导致参数选取时没有统一的标准。岩石工程中常用的 Jaeger[10]四参数破坏准则存在如下问题：若将各向同性面与沉积方向的夹角标示为β，Jaeger 准则预测出的结果为$\beta=0°$和$\beta=90°$具有相同的强度，这与已有的试验数据不相符[11–13]，虽然通过适当选取相关参数可以使破坏准则能在一定程度上描述岩土材料的破坏行为，但由于经验参数选取依据不一致，为破坏准则的应用带来一定的不便。为解决该问题，已有不少研究者做出了努力，Pietruszczak-Mrozt 等[14–16]将各向异性材料的强度参数视为材料微结构张量和加载方向的联合不变量的函数，提出了一个将各向同性准则扩展至各向异性准则的途径，该途径已得到研究者的关注[17]。

考虑到破坏可以视为材料弹性行为的终结，Christensen[18–19]认为，破坏准则在形式上应与弹性能的函数形式相协调，并基于级数展开形式，给出了一种适用于均质、各向同性材料的破坏准则。基于这种思想，本文针对横观各向同性材料发展了一种与弹性能相协调的破坏准则，并给出了该准则中材料参数的确定方案。该准则在特定参数条件下可以退化为 Christensen 的各向同性准则形式，最后通过与 Tsai-Wu 破坏理论[7–9]及 Donath[20]、Tien[21]、Saeidi[22]等试验数据相对照，验证了该准则的正确性。

2 横观各向同性体的弹性能

2.1 横观各向同性本构关系

对于横观各向同性岩土材料，建立如图 1 所示坐标系，其中 1–2 平面为各向同性面，3 轴为沉积方向（材料主轴方向）。在该坐标系下，按照 Vogit 法则应力张量$\boldsymbol{\sigma}$与应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$可以写为如下向量形式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}&=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}&=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{31} & 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

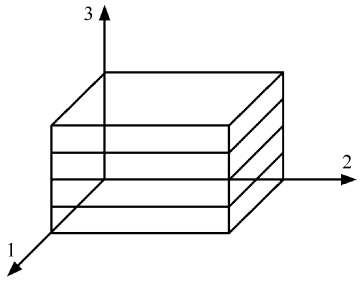


图 1 横观各向同性材料的主轴及坐标系示意图
Fig.1 The coordinate system for transversely isotropic materials

为简便，假设应力和应变满足线弹性的本构关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}\tag{2}$$

其中柔度张量的矩阵形式$\boldsymbol{C}$为

$$\boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & & 0 & \\ -\frac{\nu'}{E'} & -\frac{\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{G'} & & \\ & 0 & & & \frac{1}{G'} & \\ & & & & & \frac{1}{G}\end{array}\right]\tag{3}$$

式中：E、ν、G分别为各向同性面内的弹性模量、泊松比和剪切模量，且$G=E/[2(1+\nu)]$；E'、ν'、G'分别为与各向同性面垂直的面内的弹性模量、泊松比以及剪切模量，三者相互独立。

2.2 横观各向同性材料的应变能

材料弹性应变能密度U可表示为

$$U=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\varepsilon=\frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_{kk}+\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}\tag{4}$$

式中：σ_0为静水压力；$\varepsilon_{\mathrm{kk}}$为体积应变，下标$kk$为对$k$隐含求和；$s_{ij}$和$e_{ij}$分别对应偏应力与偏应变。$i,j,k=1,2,3$。将横观各向同性本构关系式（2）代入，可得以应力表示的横观各向同性材料弹性应变能密度为

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2+\frac{1}{E'}\sigma_{33}^2-\frac{2\nu'}{E'}(\sigma_{11}+\sigma_{22})\sigma_{33}\right]+\\&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G}\left(\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}\right)+\frac{1}{G'}\left(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right)\right]\end{aligned}\tag{5}$$

式（5）将横观各向同性的弹性应变能密度表示为应力分量的函数，该表达式清楚地体现了处于各向异性面和各向同性面内应力分量的贡献。此外，考虑岩土材料破坏行为的围压（静水压力）敏感性，以围压力σ_0表示应变能密度可以更直观地显示其对应变密度的贡献，将其表示为

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{2}\left(\frac{1-4\nu'}{E'}+\frac{2-2\nu}{E}\right)\sigma_0 s_{33}+\\&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-4\nu'}{E'}+\frac{2-2\nu}{E}\right)\sigma_0^2+\left(\frac{1}{E}+\frac{2\nu'+1}{E'}\right)s_{33}^2\right]+\\&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G}\left(s_{12}^2-s_{11}s_{22}\right)+\frac{1}{G}\left(s_{23}^2+s_{31}^2\right)\right]\end{aligned}\tag{6}$$

应变能密度也可以分解为体积应变能密度U_{dil}和形状改变能密度U_{dis}，分别表示为

$$U_{\mathrm{dil}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-4\nu'}{E'}+\frac{2-2\nu}{E}\right)\sigma_0^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}+\frac{\nu}{E}-\frac{\nu'}{E'}\right)\sigma_0 s_{33} \tag{7}$$

$$U_{\mathrm{dis}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\nu-1}{E}-\frac{3\nu'}{E'}\right)\sigma_0 s_{33}+\left(\frac{1}{E}+\frac{2\nu'+1}{E'}\right)s_{33}^2\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G}\left(s_{12}^2-s_{11}s_{22}\right)+\frac{1}{G'}\left(s_{23}^2+s_{31}^2\right)\right] \tag{8}$$

由式（7）、（8）可知，当材料仅受静水压力作用时

$$U_{\mathrm{dil}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-4\nu'}{E'}+\frac{2-2\nu}{E}\right)\sigma_0^2 \tag{9}$$

$U_{\mathrm{dis}}=0$。即，不产生形状改变能。

3　与弹性应变能相协调的破坏准则

Christensen[18–19]将材料的破坏视为弹性行为的终止，并由此认为，破坏准则在数学形式上应与弹性应变能相协调。在此理念下基于多项式展开，发展了针对均质各向同性材料的破坏准则。本文在此基础上，考虑脆性横观各向同性材料，建立了相应的破坏准则。

基于式（4）～（6）以应力张量分量表示的横观各向同性材料弹性应变能形式，考虑破坏准则在数学形式上与之相协调，不妨假定一个函数ϕ，其在数学形式上可同时包含弹性应变能和破坏准则。在图 1 所示坐标系下，应用多项式展开至二阶，参考弹性应变能的应力分量表达形式，其多项式的基应包含 7 项，即σ_{33}、$(\sigma_{11}+\sigma_{22})$、$\sigma_{33}^2$、$(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2$、$\sigma_{33}(\sigma_{11}+\sigma_{22})$、$(\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22})$、$(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)$

则其展开式可表示为

$$\phi=a_1\sigma_{33}+a_2(\sigma_{11}+\sigma_{22})+a_3\sigma_{33}^2+a_4(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2+a_5\sigma_{33}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+a_6(\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22})+a_7(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2) \tag{10}$$

对比式(5)，显然当$a_1=a_2=0$、$a_3=\frac{1}{2E'}$、$a_4=\frac{1}{2E}$、$a_5=-\frac{\nu'}{E'}$、$a_6=\frac{1}{2G}$、$a_7=\frac{1}{2G'}$时，ϕ函数可以用来表征弹性应变能密度。下面讨论当a_i为何值时ϕ可用来表征破坏准则。考虑破坏为线弹性行为的终止，不妨假定如下不等式以区分弹性状态和破坏状态，即

$$\phi<1 \tag{11}$$

式（10）当$\phi<1$时，表示材料处于弹性状态；当$\phi\geqslant 1$时，表示材料处于破坏状态。由式（7）可知，当材料仅受静水压力时，形状改变能为 0。故假设仅在静水压力作用下材料不发生破坏，则要求式（10）恒满足，由此可令：

$$a_5=\frac{1}{2}(a_6-a_3-4a_4) \tag{12}$$

参数a_1～a_7可由横观各向同性材料的强度参数来确定，推导过程如下：

材料各向同性面内（1 方向）的单轴拉伸和压缩强度分别为T_{11}、C_{11}，沉积方向（3 方向）的单轴拉伸和压缩强度分别为T_{33}、C_{33}，横观各向同性面内剪切强度为S_{12}，沿 3 方向的剪切强度为S_{23}，且$S_{23}=S_{13}$。

用T_{11}和C_{11}来确定a_2和a_4，分别将两个应力状态代入破坏准则（10），可得如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}a_2T_{11}+a_4T_{11}^2=1\\-a_2C_{11}+a_4C_{11}^2=1\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

解得

$$a_2=\frac{1}{T_{11}}-\frac{1}{C_{11}} \tag{14}$$

$$a_4=\frac{1}{T_{11}C_{11}} \tag{15}$$

以上过程得出a_2和a_4的值，其余参数同理可得。

接下来讨论参数之间的内在联系，考虑在双轴状态下$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma$，破坏准则中二次项系数为

$$\frac{4}{T_{11}C_{11}}-\frac{1}{S_{12}^2} \tag{16}$$

要使方程有实根，则式（16）非负即可。当该系数为正时，双轴状态的破坏包络线为椭圆，当其值逐渐变为 0 时，椭圆逐渐变为抛物线，即等双轴压缩强度变为无穷大，与实际不相符。由此可见，破坏包络线的形状对于式（16）的符号和大小十分敏感。这种敏感性要求试验数据T_{11}、C_{11}和S_{12}必须有相当的精度，这一点在试验中很难做到。从物理机制上来看，T_{11}、C_{11}和S_{12}并不相互独立，而是存

在某种关系。这与各向同性情况下 T、C 和 S 不相互独立，S 可以由 T 和 C 表示一样。根据类似的关系，可以用 T_{11} 和 C_{11} 来表示 S_{12}。

首先，考虑材料各向同性材料受双向压缩。此时，各向同性的破坏准则[17–18]为

$$\frac{1}{2}\left[\left(\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_2\right)^2+\left(\hat{\sigma}_2-\hat{\sigma}_3\right)^2+\left(\hat{\sigma}_3-\hat{\sigma}_1\right)^2\right]+\left(1-\frac{T}{C}\right)\hat{\sigma}_{ii}\leqslant\frac{T}{C} \tag{17}$$

其中，应力分量均用抗压强度 C 作无量纲化处理，即 $\hat{\sigma}_{ii}=\dfrac{\sigma_{ii}}{C}$。此时，各向同性的剪切强度 S 由式（17）可得

$$S^2=\frac{TC}{3} \tag{18}$$

此时，考虑 S_{12} 的形式。材料为横观各向同性，1–2 面为各向同性面，根据各向同性的推导可知，应存在如下形式：

$$S_{12}^2=\beta T_{11}C_{11} \tag{19}$$

式中：β 为无量纲参数，待定。

为了确定式（19）中的 β，考虑如下特殊情况。材料在平面应力状态下给定 $\sigma_{11}=\sigma_{22}$，或者受平面的静水压力，代入式（17）可得

$$\left(1-\frac{T}{C}\right)\frac{2\sigma}{C}+\left(\frac{\sigma}{C}\right)^2=\frac{T}{C} \tag{20}$$

方程的两个根表示拉压强度，由此可得拉压强度比为

$$\Theta=\frac{\sigma^+}{\left|\sigma^-\right|}=\frac{-(1-\lambda)+\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda}}{(1-\lambda)+\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda}} \tag{21}$$

式中：$\lambda=T/C$ 为各向同性材料破坏时的拉压强度比。

然后，对应于横观各向同性破坏准则，横向静水拉压破坏的强度比应与各向同性的情况相同。将等强度横向双轴状态 $\sigma_{11}=\sigma_{22}$ 代入破坏准则，得

$$\frac{\sigma}{C_{11}}=\frac{1}{\Lambda}\left[-\left(1-\lambda_{11}\right)\pm\sqrt{\left(1-\lambda_{11}\right)^2+\Lambda\lambda_{11}}\right] \tag{22}$$

其中：

$$\lambda_{11}=\frac{T_{11}}{C_{11}} \tag{23}$$

$$\Lambda=4-\frac{T_{11}C_{11}}{S_{12}^2} \tag{24}$$

如上所述，由式（22）所得的应力比与式（21）的应力比相同。由此可联立方程如下：

$$\Theta=\frac{\sigma^+}{\left|\sigma^-\right|}=\frac{-\left(1-\lambda_{11}\right)+\sqrt{\left(1-\lambda_{11}\right)^2+\lambda_{11}\Lambda}}{\left(1-\lambda_{11}\right)+\sqrt{\left(1-\lambda_{11}\right)^2+\lambda_{11}\Lambda}} \tag{25}$$

从而解出 S_{12}，经整理化简，有

$$S_{12}^2=\left[\frac{(1-\Theta)^2}{4\left(1-\lambda_{11}\Theta\right)\left(1-\dfrac{1}{\lambda_{11}}\Theta\right)}\right]T_{11}C_{11} \tag{26}$$

其中 Θ 由式（21）给定，由此确定了参数 T_{11}、C_{11} 和 S_{12} 之间的内在联系。

由此横观各向同性破坏准则可以写为

$$\begin{aligned}\phi=&\left(\frac{1}{T_{33}}-\frac{1}{C_{33}}\right)\sigma_{33}+\left(\frac{1}{T_{11}}-\frac{1}{C_{11}}\right)\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+\\&\frac{1}{T_{33}C_{33}}\sigma_{33}^2+\frac{1}{T_{11}C_{11}}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)^2+\\&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_{12}^2}-\frac{1}{T_{33}C_{33}}-4\frac{1}{T_{11}C_{11}}\right)\sigma_{33}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+\\&\frac{1}{S_{12}^2}\left(\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}\right)+\frac{1}{S_{23}^2}\left(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right)\leqslant 1\end{aligned} \tag{27}$$

由上述分析可知，破坏准则中相互独立的参数个数为 5 个，分别为 T_{11}、C_{11}、T_{33}、C_{33}、S_{23}，与横观各向同性材料有 5 个独立的材料常数相一致。由推导过程可以看出，一旦式（27）不能得到满足，即认为材料发生破坏。

4 破坏准则的验证与数值模拟

本部分通过与现有 Tsai-Wu 准则及文献中的试验数据对比来验证所建议破坏准则的性能。由张量理论给出的 Tsai-Wu 准则可表示为

$$\begin{aligned}\phi=&\left(\frac{1}{T_{33}}-\frac{1}{C_{33}}\right)\sigma_{33}+\left(\frac{1}{T_{11}}-\frac{1}{C_{11}}\right)\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+\\&\frac{1}{T_{33}C_{33}}\sigma_{33}^2+\frac{1}{T_{11}C_{11}}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)^2+\\&F_{12}\sigma_{33}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+\frac{1}{S_{12}^2}\left(\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}\right)+\\&\frac{1}{S_{23}^2}\left(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right)\leqslant 1\end{aligned} \tag{28}$$

式中：F_{12} 为材料参数，其余参数意义与式（27）相同。图 2～4 给出了所建议破坏准则与 Tsai-Wu

破坏准则的破坏面形状。其中，$C_{11}=120$ MPa、$C_{33}=100$ MPa、$T_{11}=12$ MPa、$T_{33}=10$ MPa、$S_{23}=15$ MPa。图 2 表明，所建议的破坏准则的破坏面与 Tsai-Wu 相类似，但所建议破坏准则的破坏面大部分在 Tsai-Wu 准则内部。与 Tsai-Wu 准则相比，式（27）只包含 5 个独立材料参数，且各个参数均有明确的物理力学含义。图 3、4 表明，上述两种破坏准则的破坏面在主应力空间都表现为开口的漏斗形，但两种准则破坏面中心轴的方向存在偏差。考虑到岩土类材料受压破坏机制，所建议破坏准则应当与表征压缩破坏的破坏准则结合使用。

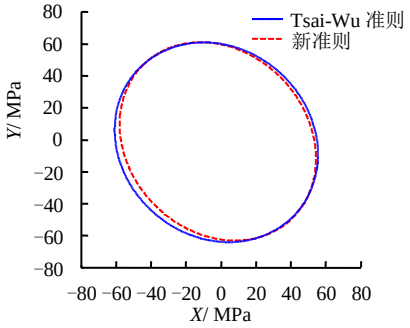
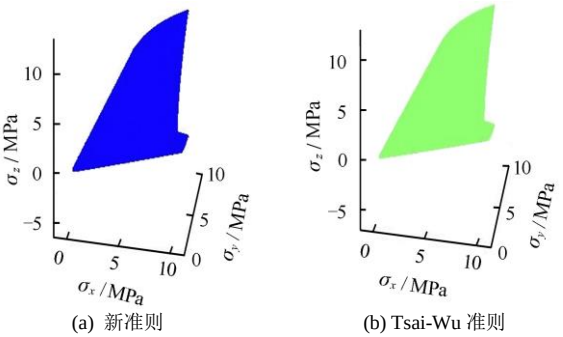


图 2　π 平面内破坏面形状对比

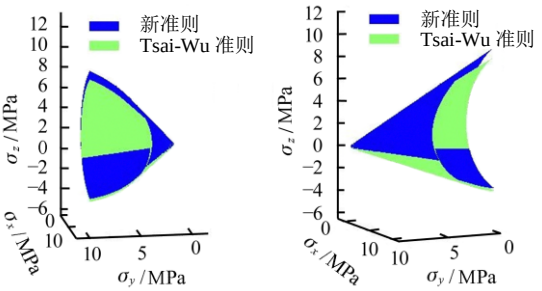
Fig.2　Comparison of failure surface in the π-Plane



(a) 新准则　　(b) Tsai-Wu 准则

图 3　建议的准则与 Tsai-Wu 准则的破坏面形状

Fig.3　The failure surface shape of the proposed criterion and Tsai-Wu criterion



(a) 左视角　　(b) 右视角

图 4　不同视角下新准则与 Tsai-Wu 准则的破坏面形状

Fig.4　Shapes of the proposed criterion and Tsai-Wu criterion from different viewpoints

为进一步验证所建议准则的合理性，图 5～7 给出了所建议准则预测的破坏应力与试验结果的对比。由图可知，随着 β（β 为各向同性面与沉积方向的夹角）的变化，破坏应力 σ_1 表现出 U 型的变化规律，且在 $\beta=0°$ 和 $\beta=90°$ 时，可预测出不同的破坏应力值，这与试验数据相吻合，这也是该模型优于 Jaeger 模型之处。此外由图可知，随着围压增大所预测的破坏应力增大，这与岩石材料压力相关破坏规律相符。准则预测强度与试验测定值之间符合程度较好，破坏准则能够反映出不同取向角 β 条件下横观各向同性岩石的强度变化规律。

参考 Donath[20]试验数据所建议准则的参数值取为 $C_{11}=120$ MPa，$C_{33}=190$ MPa、$T_{11}=18$ MPa、$T_{33}=25$ MPa、$S_{23}=10$ MPa（见图 5）。

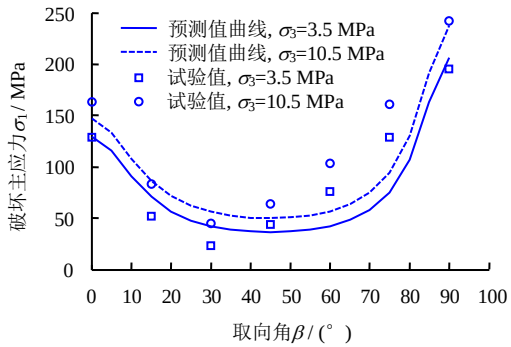


图 5　Donath 试验数据与预测强度比较

Fig.5　Comparison of experimental data and predicted failure strength

参考 Tien 等[21]试验数据所建议准则的参数值取为 $C_{11}=53$ MPa、$C_{33}=66$ MPa、$T_{11}=5.3$ MPa、$T_{33}=5$ MPa、$S_{23}=7$ MPa（见图 6）。

参考 Saeidi 等[22]试验数据所建议准则的参数值取为 $C_{11}=92$ MPa、$C_{33}=130$ MPa、$T_{11}=19.4$ MPa、$T_{33}=10$ MPa、$S_{23}=7.5$ MPa（见图 7）。

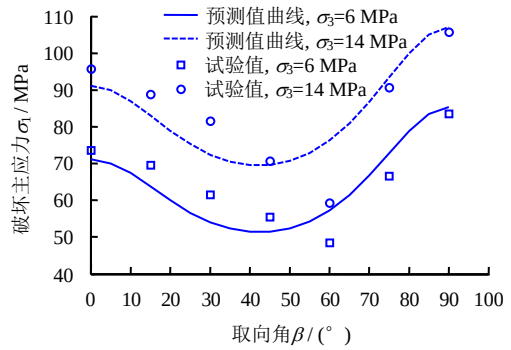


图 6　Tien 试验数据与预测强度比较

Fig.6　Comparison of experimental data and predicted failure strength

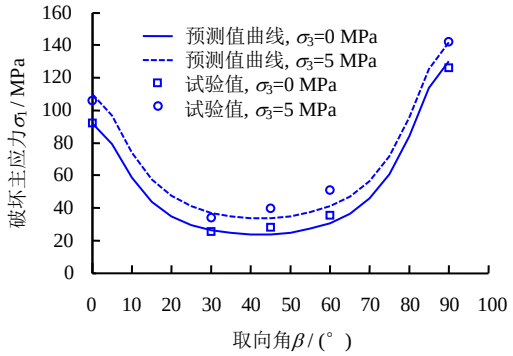


图 7 Saeidi 试验数据与预测强度比较

Fig.7 Comparison of experimental data of slates *G* and predicted failure strength

5 结 论

（1）本文提出了一种适用于横观各向同性岩土材料的破坏准则，与传统唯象模型或基于试验数据拟合得到的破坏准则相比，所建议的破坏准则具有更明确的物理力学意义。破坏准则所包含的 5 个参数与横观各向同性材料的 5 个独立材料常数存在一定的对应关系。此外，当材料是各向同性时，该准则可以退化为Christensen 所建议的各向同性破坏准则。

（2）基于与弹性应变能相协调的途径，本文建议的准则与由张量表示理论所得的 Tsai-Wu 准则较为相似，但 Tsai-Wu 破坏理论包含 7 个参数，且其中 F_{12} 没有明确的确定方法。而所建议准则可以比较简单确定所使用参数。

（3）通过与 Donath 试验数据、Tien 等的试验数据以及 Saeidi 等的试验数据对比可知，在不同围压下所建议模型的预测结果与试验数据都较为符合，由此论证了该准则在预测横观各向同性岩土材料破坏强度时的合理性。

参 考 文 献

[1] 俞茂宏，孟晓明. 双剪弹塑性模型及其在土工问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1992, 14(3): 71－75.
YU Mao-hong, MENG Xiao-ming. Twin-shear elastoplastic model and its application in geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 14(3): 71－75.

[2] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1－10.
YU Mao-hong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1994, 16(2): 1－10.

[3] YU M H. Unified strength theory and its applications[M]. Berlin: Springer, 2004.

[4] 俞茂宏，YOSHIMINE M，强洪夫，等. 强度理论的发展和展望[J]. 工程力学，2004，21(6): 1－20. Doi: 10.3969/j.issn. 1000-4750.2004.06.001.
YU Mao-hong, YOSHIMINE M, QIANG Hong-fu, et al. Advances and prospects for strength theory[J]. **Engineering Mechanics**, 2004, 21(6):1－20. Doi:10.3969/j.issn. 1000-4750.2004.06.001

[5] 衡帅，杨春和，张保平，等. 页岩各向异性特征的试验研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(3): 609－616.
HENG Shuai, YANG Chun-he, ZHANG Bao-ping, et al. Experimental research on anisotropic properties of shale[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(3): 609－616.

[6] 侯振坤，杨春和，郭印同，等. 单轴压缩下龙马溪组页岩各向异性特征研究[J]. 岩土力学，2015，36(9): 2541－2550.
HOU Zhen-kun, YANG Chun-he, GUO Yin-tong, et al. Experimental study on anisotropic properties of Longmaxi formation shale under uniaxial compression[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(9): 2541－2550.

[7] HILL R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behavior[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1964, 12(4): 199－212.

[8] ZHAO Y H, WENG G J. Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1997, 34(4): 493－507.

[9] TSAI S W, WU E M. A general theory of strength for anisotropic materials[J]. **Journal of Composite Materials**, 1971, 5: 58－80.

[10] JAEGER J C. Shear failure of anisotropic rocks[J]. **Geological Magazine**, 1960, 97: 65－72.

[11] BORECKI M, KWASNIEWSKI M A. Experimental and analytical studies on compressive strength of anisotropic rocks[C]//Proceedings of Seventh Plenary Scientific Session of The International Bureau of Rock Mechanics. Katowice: [s. n.], 1979: 23－49.

[12] KWASNIEWSKI M A. Mechanical behavior of anisotropic rocks[J]. **Comprehensive Rock Engineering**, 1993, 1: 285－312.

[13] SHEOREY P R. Empirical rock failure criteria[M]. [S. l.]: A A Balkema, 1997,

下转第 2233 页