

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.10.034

基于半隐式积分方案统一强度理论 ANSYS 二次开发

柯锦福^{1,2}, 吴爱祥³

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 北京科技大学 土木与环境工程学院, 北京 100083)

摘 要: 目前, 岩土工程中常用的塑性屈服准则多为局部不可导的分段函数, 在隐式有限元求解中均采用显式向前欧拉法更新应力和 Newton-Raphson 迭代法求解方程。但显式向前欧拉法容易导致应力偏离屈服面和计算不收敛, 而 Newton-Raphson 迭代法需频繁求导, 对于分段函数而言这些方法均不利于求解。为此, 提出了采用半隐式向后欧拉法和免导数的 Steffensen 迭代法联合更新应力与一致切线模量的方案。根据上述方案, 利用 ANSYS 提供的 UserMat 模块编写了基于统一强度理论与拉破坏复合屈服准则的理想塑性模型。用自定义的本构模型模拟深埋圆形巷道弹塑性开挖过程, 数值模拟结果与理论解很好地吻合, 验证了模型代码和所提出方案的正确性和可行性。采用半隐式向后欧拉法与 Steffensen 迭代法相结合的手段, 可简化应力与一致切线模量的求解, 该方法避免了应力偏离屈服面和求解流动函数偏导, 算法简便, 易于推广应用。

关 键 词: 半隐式向后欧拉法; Steffensen 迭代法; 统一强度理论; 拉伸截断; ANSYS 二次开发

中图分类号: O 241

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 10-3048-06

ANSYS secondary development of unified strength theory with semi-implicit integral

KE Jin-fu^{1,2}, WU Ai-xiang³

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. School of Civil and Environment Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Currently, locally non-differential piecewise functions, the explicit forward Euler method (EFEM), and the Newton-Raphson iteration method (NRIM) are commonly adopted plastic yield criteria for implicit finite element solution. However, the EFEM will cause stress deviation from the yield surface and lead to non-convergent result, and the NRIM needs to frequently calculate derivative of yield criterion. They are both inconvenient for non-differential functions. A method combining the semi-implicit backward Euler method and the Steffensen iterative method is proposed for these piecewise yield criteria to update stress and consistent tangent modulus. The combination method is applied to write code in ANSYS's UserMat module for an elastic-perfect plastic constitutive model, based on a composite unified strength criterion with unified strength theory and tension cut-off. Then the custom constitutive model is applied to simulate excavation process of a deep circular tunnel, and the numerical simulation results fit well with the theoretical solutions, which verifies the correctness and practicability of the model and the combination method. The combination method can prevent stress deviation from the yield surface and does not need to solve partial derivatives of the plastic flow function. It is simple and easy for popularization and application.

Keywords: semi-implicit backward Euler method; Steffensen iteration method; unified strength theory; tension cut-off; ANSYS secondary development

1 引 言

有限元常用的本构积分方案有: 显式向前欧拉

法、全隐式向后欧拉法与半隐式向后欧拉法。采用显式向前欧拉法更新应力, 常导致应力点偏离屈服面, 且连续切线模量会降低计算的收敛速度, 易导

收稿日期: 2015-11-06

基金项目: 国家科技支撑计划课题(No. 2012BAB08B02)。

This work was supported by the National Key Technology Research and Development Program of the Ministry of Science and Technology of China (2012BAB08B02).

第一作者简介: 柯锦福, 男, 1990 年生, 博士, 主要从事计算岩石力学方面的研究。E-mail: kejinfu@hotmail.com

致计算结果不收敛。全隐式向后欧拉法更新应力时，其塑性流动方向未知，需求解塑性流动函数的偏导，算法复杂，对于关联流动准则要求屈服函数具有二阶可导性。采用半隐式向后欧拉法更新应力，其塑性流动方向在求解时是已知的，只需求解塑性乘子，算法简便，对屈服函数没有可导性要求。

目前岩土类的屈服准则多为分段函数(如摩尔-库仑准则、统一强度准则、帽子模型、拉伸截断模型等)，屈服函数局部不可导，在隐式有限元求解中使用全隐式算法比较复杂，常用的是显式算法。

非线性方程数值求解常用的方法有：二分法、牛顿法、割线法、不动点迭代法等。其中，二分法对函数没有可导性要求，但收敛速度慢；牛顿法主要有 Newton-Raphson 迭代法，具有二阶收敛速度(收敛快)，需求解函数的导数；割线法类似于牛顿法，但不需求函数的导数，收敛速度一般；不动点迭代法主要包括 Picard 迭代法和 Steffensen 迭代法，一般的迭代法收敛速度慢且计算结果可能不收敛，这时采用 Steffensen 迭代法不仅可以保证计算结果的收敛性，还可以提高收敛速度(二阶收敛)，不动点迭代法对函数没有可导性要求。

本文针对统一强度理论与拉破坏复合屈服准则进行 ANSYS 二次开发，本构积分方案采用半隐式向后欧拉法，并使用免导数的 Steffensen 迭代法求解非线性方程。

2 本构积分方案

在各向同性线性弹性大变形的框架下，应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) + K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (1)$$

式中： \mathbf{C} 为弹性刚度； μ 为剪切模量； K 为体变模量； \mathbf{I} 为单位张量； $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 为应变偏量； $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 为应变张量的迹。

假设屈服准则为

$$F(\boldsymbol{\sigma}, q) = F'(\boldsymbol{\sigma}) - g(q) = 0 \quad (2)$$

式中： q 为等效塑性应变。

设 t_n 时刻材料微元的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 、应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 、塑性应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ 、等效塑性应变为 q_n ，已有 t_{n+1} 时刻的应变增量 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ ，计算试应力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ 为

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

当 $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, q_n) \leq 0$ 时，没有发生塑性屈服， t_{n+1} 时刻的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ ，一致切线模量 $\mathbf{C}^{\text{alg}} = \mathbf{C}$ ；当 $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, q_n) > 0$ 时，材料发生塑性屈服，此时采用半隐式向后欧拉法更新应力与一致切线模量。

求出 t_n 时刻的流动方向 \mathbf{r}_n (单位化)，在试应力点沿着 \mathbf{r}_n 回退到某一屈服面 $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) = 0$ 上，得塑性应变增量 $\Delta\lambda \mathbf{r}_n$ ，等效塑性应变增量 $\sqrt{2/3} \Delta\lambda$ (详见图 1) [1]。

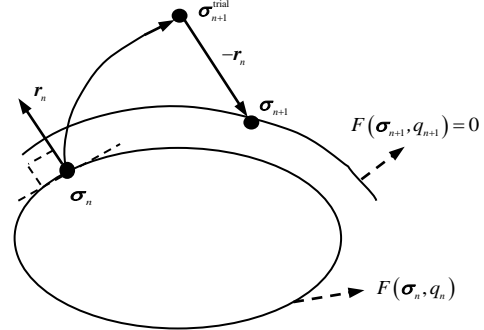


图 1 关联流动法则的半隐式向后欧拉法
Fig.1 Semi-implicit backward Euler method for associative plasticity

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{C} : \Delta\lambda \mathbf{r}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \sqrt{2/3} \Delta\lambda \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \mathbf{r}_n \\ F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)中只需求出塑性乘子 $\Delta\lambda$ 。对于局部不可导的分段线性屈服函数，考虑采用免导数的 Steffensen 迭代法求解 $\Delta\lambda$ 。对式(4)化简得只含 $\Delta\lambda$ 的非线性方程为

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{C} : \Delta\lambda \mathbf{r}_n, q_n + \sqrt{2/3} \Delta\lambda) = f(\Delta\lambda) = 0 \quad (5)$$

用 Steffensen 迭代法求解非线性方程 $f(\Delta\lambda)/\omega = 0$ ，其中 $\omega = 10^5 g(q_n)$ ， ω 用来单位化 $f(\Delta\lambda)$ 并使其值与 $\Delta\lambda$ 保持同一量级。Steffensen 迭代法求解上述方程的表达式如下[2]：

$$\Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k - \frac{f(\Delta\lambda_k)^2}{\omega \left[f \left[\Delta\lambda_k + f(\Delta\lambda_k)/\omega \right] - f(\Delta\lambda_k) \right]} \quad (6)$$

迭代式(6)直至 $|f(\Delta\lambda_{k+1})/\omega| < 10^{-10}$ ，得 $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{k+1}$ 将 $\Delta\lambda$ 代入式(4)更新应力、塑性应变与等效塑性应变。非关联流动法则下半隐式向后欧拉法的一致切线模量表达式为[1]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^{\text{alg}} &= \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{r}_n) \otimes (\mathbf{A}_{n+1} : \mathbf{C})}{\mathbf{A}_{n+1} : \mathbf{C} : \mathbf{r}_n - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial F}{\partial q_{n+1}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right\|} \\ \mathbf{A}_{n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right\| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

半隐式向后欧拉法求解应力与一致切线模量较为简便，该方法无需求解流动函数偏导，不会导致

应力偏离屈服面, 算法采用一致切线模量收敛快, 属于无条件收敛算法。半隐式向后欧拉法的一致切线模量是非对称的, 求解时要用非对称求解器。

3 屈服准则及关联流动法则

3.1 统一强度理论与拉破坏复合屈服准则

1991 年西安交通大学俞茂宏教授^[3]提出了可以合理反映材料中间主应力效应的统一强度理论。采用应力不变量 I_1 、 J_2 和 θ 表示统一强度理论与拉破坏复合屈服准则为^[3-5]

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1-\alpha}{3} I_1 + \sqrt{J_2} \frac{2+\alpha}{\sqrt{3}} \cos \theta + \\ &\sqrt{J_2} \frac{\alpha(1-b)}{(1+b)} \sin \theta - \sigma_t = 0 \quad F_1 \geq \langle F_2, F_3 \rangle \\ F_2 &= \frac{1-\alpha}{3} I_1 + \sqrt{J_2} \left(\alpha + \frac{2-b}{1+b} \right) \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \\ &\sqrt{J_2} \left(\alpha + \frac{b}{1+b} \right) \sin \theta - \sigma_t = 0 \quad F_2 \geq \langle F_1, F_3 \rangle \\ F_3 &= \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta - \sigma_t' = 0 \quad F_3 \geq \langle F_1, F_2 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: c 为黏聚力; φ 为内摩擦角; σ_t' 为单轴抗拉强度, $\sigma_t = 2c \cos \varphi / (1 + \sin \varphi)$, $\sigma_c = 2c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$, $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$; θ 为双剪理论定义的应力角; $\langle \cdot \rangle$ 符号表示取两者中的最大值。符号定义为拉正压负。

统一强度理论反映了中间主应力对材料强度影响的区间性, 通过对参数 α 、 b 的合理取值可得到适用于具体岩体的强度准则。

3.2 关联流动法则及其奇异性处理

本文采用关联的流动法则, 统一强度理论与拉破坏复合屈服准则的塑性流动方向为^[4-5]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \\ &\frac{\partial F}{\partial I_1} \mathbf{a}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\cot 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_2 - \frac{\cot 3\theta}{3J_3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{a}_3 = \\ &C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}, 2\tau_{12}, 2\tau_{23}, 2\tau_{13}]^T \\ \mathbf{a}_3 &= \left[\sigma'_{22}\sigma'_{33} - \tau_{23}^2 + \frac{J_2}{3}, \sigma'_{11}\sigma'_{33} - \tau_{13}^2 + \frac{J_2}{3}, \right. \\ &\left. \sigma'_{11}\sigma'_{22} - \tau_{12}^2 + \frac{J_2}{3}, 2(\tau_{23}\tau_{13} - \sigma'_{33}\tau_{12}), \right. \\ &\left. 2(\tau_{12}\tau_{13} - \sigma'_{11}\tau_{23}), 2(\tau_{12}\tau_{23} - \sigma'_{22}\tau_{13}) \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: σ_{ij} 为偏应力主分量; τ_{ij} 为剪应力。

联合式(8)~(10)可求得屈服函数法线方向 $\partial F / \partial \sigma$, 将其单位化得塑性流动方向。

该模型的法线方向 $\partial F / \partial \sigma$ 可划分为 3 个无奇异性区域和 9 个奇异性邻域。其中 3 个无奇异性区域为: $F_1 > \langle F_2, F_3 \rangle$ 、 $F_2 > \langle F_1, F_3 \rangle$ 、 $F_3 > \langle F_1, F_2 \rangle$, 这些区域内的法线方向取为最大值函数的法线方向。在 $\theta = 0^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$ 以及 F_1 、 F_2 、 F_3 交界处的法线方向存在奇异性, 可采用以下方法对这 9 个奇异性邻域进行处理^[4-5]:

(1) 在 $F_1 > \langle F_2, F_3 \rangle$ 时 $\theta = 0^\circ$ 的邻域、 $F_2 > \langle F_1, F_3 \rangle$ 时 $\theta = 60^\circ$ 的邻域以及 $F_3 > \langle F_1, F_2 \rangle$ $\theta = 0^\circ$ 和 $\theta = 60^\circ$ 的邻域, C_1 、 C_2 、 C_3 取为

$$C_i = \left(\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} C_i + \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} C_i \right) / 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

当 $F_1 > \langle F_2, F_3 \rangle$, $\theta = 0^\circ$ 时, 有

$$C_1 = \frac{1-\alpha}{3}, C_2 = \frac{2(2+\alpha)}{3\sqrt{3}}, C_3 = \frac{(2+\alpha)}{6J_2} \quad (12)$$

当 $F_2 > \langle F_1, F_3 \rangle$, $\theta = 60^\circ$ 时, 有

$$C_1 = \frac{1-\alpha}{3}, C_2 = \frac{2(1+2\alpha)}{3\sqrt{3}}, C_3 = -\frac{(1+2\alpha)}{6J_2} \quad (13)$$

当 $F_3 > \langle F_1, F_2 \rangle$, $\theta = 0^\circ$ 时, 有

$$C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}, C_3 = \frac{1}{3J_2} \quad (14)$$

当 $F_3 > \langle F_1, F_2 \rangle$, $\theta = 60^\circ$ 时, 有

$$C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, C_3 = -\frac{1}{6J_2} \quad (15)$$

(2) 在 $F_1 = F_2 > F_3$ 、 $F_1 = F_3 > F_2$ 、 $F_2 = F_3 > F_1$ 和 $F_1 = F_2 = F_3$ 的邻域法线方向取为相交区域法线方向的平均值。

(3) 在 $J_2 = 0$ 的邻域, 流动张量在各个方向均一致, 取 $C_1 = 1/3$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ 。

其中 $F_1 = F_2 > F_3$ 的邻域为 $|F_1 - F_2| / \sigma_t \leq 10^{-4}$, $|F_1 - F_3| / \sigma_t > 10^{-4}$; $\theta = 0^\circ$ 的邻域为 $\theta \in [0^\circ, 0.1^\circ]$; $\theta = 60^\circ$ 的邻域为 $\theta \in [59.9^\circ, 60^\circ]$; $J_2 = 0$ 的邻域为 $\sqrt{J_2} / \sigma_t \leq 10^{-4}$, 其余的邻域可类比确定。将上述所得法线方向单位化可得到式(4)、(7)中的 \mathbf{r}_n 、 \mathbf{A}_{n+1} 。

4 模型代码的验证

在 ANSYS 的 UserMat 子程序中编写基于统一强度理论与拉破坏复合屈服准则的理想塑性模型, 将编写的子程序编译连接到 ANSYS15.0 生成自定义版的 ANSYS。用自定义的本构模型计算以下算

例，并将计算结果与理论值比较，用以校验所编写模型的正确性。

已知圆形巷道（见图 2）半径为 a ，内侧支反力为 p ，围岩区域半径为 R ，外侧围压为 q' ，弹性模量为 E ，泊松比为 ν ，内摩擦角为 φ ，凝聚力为 c ，单轴抗拉强度为 σ'_t 。假设：①模型处于平面应变状态且 $q' > p$ ；②初始地应力场由模型未开挖时外圆上的压力 q' 作用得到；③围岩的屈服函数满足统一强度准则和非关联的 Mohr-Coulomb 流动法则。可求得塑性区径向应力 σ_r 与环向应力 σ_θ 的理论解为^[6-10]

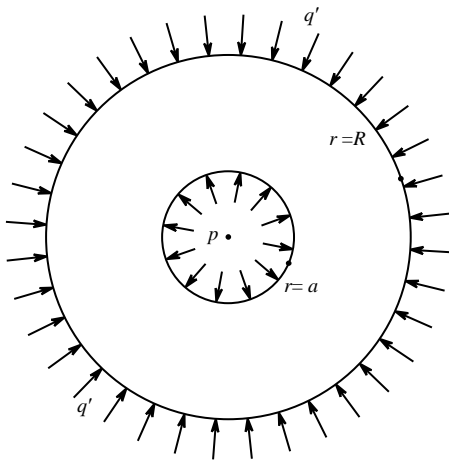


图 2 深埋巷道开挖分析模型

Fig.2 Analysis model for deep tunnel excavation

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\xi}{\eta} - \left(p + \frac{\xi}{\eta} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^\eta \\ \sigma_\theta &= \frac{\xi}{\eta} - \left(p + \frac{\xi}{\eta} \right) (1 - \eta) \left(\frac{a}{r} \right)^\eta \\ \eta &= \frac{(\alpha - 1) + b(2\alpha\nu - 1)}{\alpha(1 + b\nu)}, \xi = -\frac{\sigma_t(1 + b)}{\alpha(1 + b\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

若围岩区域较大，则计算所得的塑性区半径 R_p 近似为无限域时的塑性区半径：

$$\left. \begin{aligned} R_p &\approx a \left[\frac{(\xi + p\eta)(2 - \eta)}{2(\xi + q'\eta)} \right]^{\frac{1}{\eta}} \\ \sigma_{R_p} &= -\frac{\xi}{\eta} + \left(p + \frac{\xi}{\eta} \right) \left(\frac{a}{R_p} \right)^\eta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

围岩有限域时，弹性区应力分布为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{(\sigma_{R_p} - q')}{1 - k^2} \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 + \frac{(\sigma_{R_p} - q')k^2}{1 - k^2} - q' \\ \sigma_\theta &= \frac{(\sigma_{R_p} - q')}{1 - k^2} \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 + \frac{(\sigma_{R_p} - q')k^2}{1 - k^2} - q' \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中： $k = R_p / R$ 。

围岩有限域时，弹性区径向位移 u_r 为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(\sigma_{R_p} - q')(1 + \nu)}{(1 - k^2)E} \left[\frac{R_p^2}{r} + (1 - 2\nu)k^2 r \right] \\ u_{R_p} &= \frac{(\sigma_{R_p} - q')(1 + \nu)R_p}{(1 - k^2)E} [1 + (1 - 2\nu)k^2] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

塑性区径向位移 u_r 为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= Ar^{1-\eta} + Br + Cr^{-\frac{1}{\alpha_\psi}} \\ A &= -\frac{(\xi + p\eta)(1 + \nu)[1 + \alpha_\psi - \eta - (2 - \eta)(1 + \alpha_\psi)\nu]a^\eta}{(1 + \alpha_\psi - \alpha_\psi\eta)E\eta} \\ B &= \frac{(\xi + q'\eta)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E\eta} \\ C &= R_p^{1/\alpha_\psi} (u_{R_p} - AR_p^{1-\eta} - BR_p) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中： α_ψ 为 Mohr-Coulomb 流动准则的剪胀角。

当 $\alpha_\psi = \alpha, b = 0$ 时，退化为关联的摩尔-库仑准则，取 $a = 5 \text{ m}$ ， $R = 30 \text{ m}$ ， $E = 50 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.27$ ， $\varphi = 25^\circ$ ， $c = 6 \text{ MPa}$ ， $\sigma'_t = 5 \text{ MPa}$ ， $p = 0 \text{ MPa}$ ， $q' = 25 \text{ MPa}$ 。在 ANSYS15.0 上用自定义的本构模型模拟巷道开挖后的应力场。模拟时采用平面 183 轴对称单元，模拟区域取为巷道半径的 3~5 倍，长×宽为 $30 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ ，上、下边界处施加镜像位移约束，外边界施加 50 MPa 的均布压力，先求解地应力场，再用 ANSYS 的生死单元技术将巷道内的单元杀死，导入上一步求解的地应力场求解巷道开挖后的应力分布。模型网格划分后共有 3 000 个单元与 9 221 个节点（见图 3）。

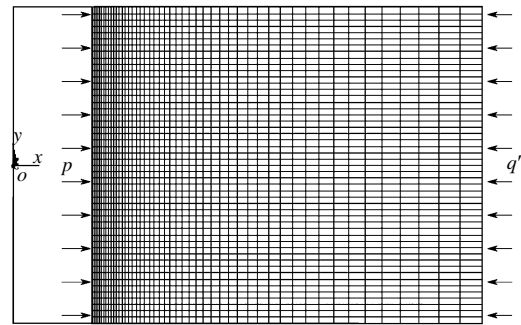


图 3 深埋巷道数值模拟模型

Fig.3 Numerical model for deep tunnel excavation

对比 x 轴沿线上弹、塑性区应力场与位移场的数值解与理论解（见图 4、5）。径向应力最大相对

误差为 0.816%，平均相对误差为 0.206%；环向应力最大相对误差为 1.002%，平均相对误差为 0.111%；径向位移最大相对误差为 0.163%，平均相对误差为 0.108%。模拟结果表明，数值解与理论解间的误差较小，满足工程精度要求，可以说明基于统一强度理论与拉破坏复合屈服准则的理想塑性模型编写正确，这也验证了本文所提出的采用半隐式向后欧拉法和免导数的 Steffensen 迭代法联合更新应力与一致切线模量的方案的可行性。

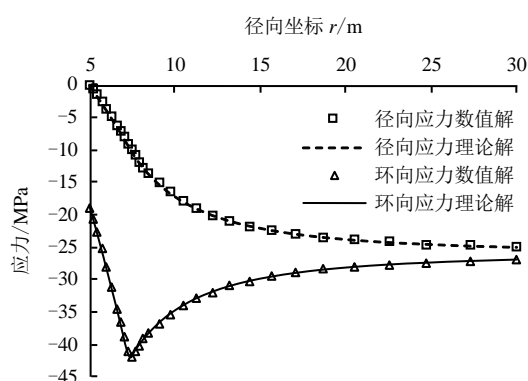


图4 环向应力与径向应力数值解与理论解比较

Fig.4 Comparison between numerical result and analytical result of circumferential stress and radial stress

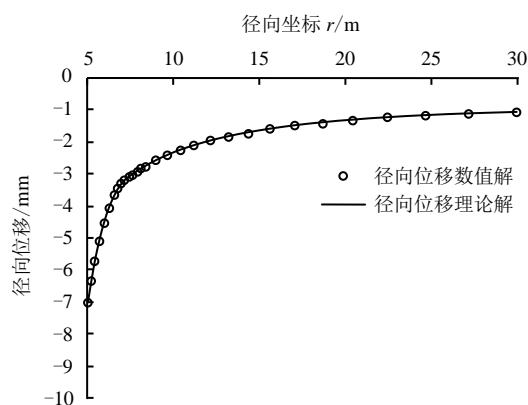


图5 径向位移数值解与理论解比较

Fig.5 Comparison between numerical result and analytical result of radial displacement

5 结 论

(1) 本文结合半隐式向后欧拉法和 Steffensen 迭代法在 ANSYS 提供的 UserMat 子程序上编写了基于统一强度理论与拉破坏复合屈服准则的理想塑性模型。用自定义的本构模型模拟深埋圆形巷道弹塑性开挖过程，模拟结果与理论值的误差较小，满足工程精度要求，表明模型代码编写正确。

(2) 半隐式向后欧拉法兼具显式 and 全隐式积分方案的优点，算法无条件收敛，不会导致应力偏离

屈服面，且无需求解流动函数偏导，便于更新应力与一致切线模量。Steffensen 迭代法用于免导数求解非线性方程，具有二阶收敛速度。对于局部不可导的分段屈服函数，采用半隐式向后欧拉法与 Steffensen 迭代法相结合的手段，可简化应力更新与一致切线模量的求解，该方法具有收敛性强、稳定性好的特点，易于推广应用。

参 考 文 献

- [1] MORAN B, ORTIZ M, SHIH C F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, 29(3): 483—514.
- [2] 李娟. 求解非线性方程组的两类迭代法研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2012.
LI Juan. Study on two iterative methods for solving nonlinear equations[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2012.
- [3] 俞茂宏, YOSHIMINE M, 强洪夫, 等. 强度理论的发展和展望[J]. *工程力学*, 2004, 21(6): 1—20.
YU Mao-hong, YOSHIMINE M, QIANG Hong-fu, et al. Advances and prospects for strength theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(6): 1—20.
- [4] 唐榕蔚. 统一强度理论的 ABAQUS 二次开发及其应用[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
TANG Rong-wei. Secondary development for ABAQUS based on unified strength theory and its application[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012.
- [5] 俞茂宏, 咎月稳, 李建春. 统一强度理论角点奇异性的统一处理[J]. *岩石力学与工程学报*, 2000, 19(增刊): 849—852.
YU Mao-hong, ZAN Yue-wen, LI Jian-chun. Unified manner to eliminate the corner singularity of unified strength theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2000, 19 (Supp.): 849—852.
- [6] 胡小荣, 俞茂宏. 统一强度理论及其在巷道围岩弹塑性分析中的应用[J]. *中国有色金属学报*, 2002, 12(5): 1021—1026.
HU Xiao-rong, YU Mao-hong. Unified strength theory and its application in elastoplastic analysis to tunnel[J]. *The Chinese Journal of Nonferrous Metals*, 2002, 12(5): 1021—1026.