DOI：10.16285/j.rsm.2017.12.027

参数 m 的形式和最大基质吸力点对 Van Genuchten 方程各参数的影响

毕 骏[1,2]，谌文武[1,2]

（1. 兰州大学 西部灾害与环境力学教育部重点实验室，甘肃 兰州 730000；2. 兰州大学 土木工程与力学学院，甘肃 兰州 730000）

摘 要：Van Genuchten 模型经常用于拟合土-水特征曲线，但拟合参数 m 、 n 之间的不同关系以及是否加入最大基质吸力点（10^6 kPa，0）会对 Van Genuchten 模型的拟合参数造成极大的不确定性。为此，考虑 m 3 种取值（m 不受限制、$m=1-1/n$ 、$m=1-2/n$ ）以及数据中是否含有最大基质吸力点（10^6 kPa，0），探讨各工况 3 个拟合参数 a 、 m 、 n 之间的关系，同时选用各工况的拟合参数，求解基质吸力为 10^6 kPa 时的饱和度，分析各工况下该点处饱和度的相互联系。结果表明：当 m 受到限制时，加入最大基质吸力点减小了各拟合参数的离散程度和区间范围；而 m 未受限制时，加入最大基质吸力点减小了 a 的离散程度和区间范围，但增大了 m 、 n 的离散程度和区间范围。在各约束条件下拟合参数 a 与未受约束时的 a 呈线性关系；而对于 n 则不存在这类关系；对于在不同工况下最大基质吸力点处的饱和度，其值与 m 未受约束时最大基质吸力点处的饱和度呈线性关系。

关 键 词：Van Genuchten 模型；土-水特征曲线；不确定性；离散程度；线性关系

中图分类号：TU 473.1 **文献识别码：**A **文章编号：**1000－7598 (2017) 12－3604－09

Influence of forms of parameter m and largest matric suction point on the parameters of Van Genuchten model

BI Jun[1,2], CHEN Wen-wu[1,2]

(1. Key Laboratory of Mechanics on Disaster and Environment in Western China of Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China; 2. School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract: Although Van Genuchten model is widely used for fitting soil water characteristic curves (SWCCs), the fitted parameters vary while considering the different forms of parameter m and n and whether the largest matric suction point (10^6 kPa) is involved in the data. Therefore, three forms of parameter m (m refers to a) without constraints; b) $m=1-1/n$; c) $m=1-2/n$, respectively), as well as largest matric suction point were studied in the paper. The relationship between different parameters were discussed and the saturation degrees at matric suction of 10^6 kPa were calculated using the different parameters under different conditions, which were applied to analyze the relationship of saturation degrees at matric suction of 10^6 kPa among different conditions. The result shows that in the condition of constrained m, discrete degree and interval range of a 、 m 、 n decrease when the largest matric suction point is added into the data. Moreover, discrete degree and interval range of a decrease and discrete degree and interval range of m 、 n increase when adding the largest matric suction point under the condition of m is not constrained. The results also indicate that the parameter a under various conditions of m and largest matric suction point shows a linear correlation of parameter a without any constraints; but for parameter n, the rule does not exist. The saturation degree at the largest matric suction point under various conditions of m and largest matric suction point shows a linear correlation of saturation degree at the largest matric suction point without any constraints.

Keywords: Van Genuchten model; SWCC; uncertainty; discrete degree; linear relationship

1 引 言

土-水特征曲线（SWCC）表示土中基质吸力和含水率（体积含水率或质量含水率）的关系，也可以表示成基质吸力和饱和度的关系。一般测量得到的基质吸力-含水率的数据都是一系列的散点，应用

收稿日期：2015-09-21
基金项目：国家重点基础研究发展计划（973）项目（No.2014CB744701）。
This work was supported by the National Program on Key Basic Research Project of China (973 Program) (2014CB744701).
第一作者简介：毕骏，男，1990 年生，博士研究生，主要从事非饱和土与文物保护方面的工作。E-mail: bijune@hotmail.com
通讯作者：谌文武，男，1966 年生，博士，教授，主要从事地质灾害与文物保护方面的工作。E-mail: sungp@lzu.edu.cn

相应的模型将一系列散点拟合成光滑的曲线就显得十分有必要。为此，国内外很多学者基于统计分析、线性回归等方法提出了很多描述土-水特征曲线的模型，如 Gardner[1]、Brooks[2]、Willams[3]、Van Genuchten[4]、Fredlund[5–6]、Modified Kovács[7]等。也有一些学者如 Leong[8]、Sillers[9]等对各种不同类型的模型做了总结。在这些模型中 Van Genuchten（简称 VG）方程形式简单，参数较少，拟合精度较高。该方程为

$$\theta=\theta_{\mathrm{r}}+\left(\theta_{\mathrm{s}}-\theta_{\mathrm{r}}\right)\frac{1}{\left[1+\left(a\psi\right)^{n}\right]^{m}} \tag{1}$$

式中：θ 为体积含水率；θ_{r} 为残余体积含水率；θ_{s} 为饱和体积含水率；ψ 为基质吸力（kPa）；a、m、n 为拟合参数。

早期各国学者的研究大多集中于某一类土的土-水特征曲线，并改变含水率[10]、干密度[11]、孔隙比[12]、温度[13]、盐分[14]等参数，研究土-水特征曲线的变化。随后也有一些学者，如：Arya[15]、Rawls[16]、Ahuja[17]、Saxton[18]等通过颗粒分布、体积密度、各粒径含量、有机质含量等预测土-水特征曲线，也取得了很多成果。但当拟合土-水特征曲线时，往往存在 3 个不确定性。一是拟合模型的选取[19]，这里的拟合模型具体指的是同一模型的不同形式，如 FX 模型是一个四参数模型，但对于同一种土，如果认为残余基质吸力为一常数 3 000 kPa，FX 模型就变成了三参数模型，参数不同，拟合效果、拟合参数必然存在很大不确定性；二是选用的拟合方法，这里的拟合方法可以理解为拟合函数或者拟合软件，如：谭晓慧等[19]采用科学编程语言 MATLAB 中的非线性回归拟合函数 Nlinfit、最小二乘法拟合函数 Lsqcurvefit 及最优化求最小值函数 Fminsearch 来拟合 SWCC，对于相同数据得出的拟合参数也存在不确定性；三是对于拟合数据的选 取，文献[20]着重讨论了对于同一土-水特征曲线，采用不同数据点个数，拟合参数、拟合效果具有不确定性。由于拟合方法对拟合参数影响较小[19]，本文着重研究模型形式和数据选取 2 个问题。

2　研究工况

本文选用 Van Genuchten 方程，并且设定 Van Genuchten 方程中 $\theta_{\mathrm{r}}=0$，得

$$S=\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{s}}}=\frac{1}{\left[1+\left(a\psi\right)^{n}\right]^{m}} \tag{2}$$

对于 Van Genuchten 方程，拟合参数为 a、m、n。Van Genuchten[4]推导非饱和渗透系数过程中用到了 Mualem 模型[21]和 Burdine 模型[22]，在推导时分别对 Van Genuchten 方程做了 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 两种简化，Van Genuchten 方程就转化为二参数模型。综上可知 Van Genuchten 方程存在 3 种形式：（1）拟合参数为 a、m、n；（2）拟合参数为 a、n，$m=1-1/n$；（3）拟合参数为 a、n，$m=1-2/n$。同时，FX 模型中存在调整系数 C_{ψ}，用来描述当 ψ 增加到一定极限 ψ_0（其值等于 10^6 kPa），根据热力学平衡，此时含水率为 0。一些学者在研究时，也会将最大基质吸力点（10^6 kPa，0）当做已知值。

本文研究的 6 种形式，详见表 1。L1 和 L2 是拟合系数不受任何约束的三参数形式；L3 和 L4、L5 和 L6 是拟合系数 m 分别受到方程 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 约束的二参数形式。而 L1、L3、L5 与 L2、L4、L6 不同之处在于：L1、L3、L5 拟合时采用原始数据拟合，而 L2、L4、L6 拟合时加入了最大基质吸力点（10^6 kPa，0）。

表 1　拟合土水特征曲线时的 6 种不同工况

Table 1　Six different conditions while fitting SWCC

类别	参数			是否含有最大基质吸力点（10^6 kPa，0）
	a	m	n	
L1	a	m	n	否（N）
L2	a	m	n	是（Y）
L3	a	$1-1/n$	n	否（N）
L4	a	$1-1/n$	n	是（Y）
L5	a	$1-2/n$	n	否（N）
L6	a	$1-2/n$	n	是（Y）

为了便于区分 6 种不同条件下参数 a、m、n，各工况条件下的参数采用 4 字母组成的词组（A_{BCD}）表示。其中，A 表示各拟合参数，如参数 a、m、n；BC 定义为拟合参数 m、n 的关系。对于 L1、L2，BC 为 mn，对于 L3、L4，BC 为 $1n$，对于 L5、L6，BC 为 $2n$；D 定义为是否含有最大基质吸力点，N 表示不含最大基质吸力点，Y 表示含有最大基质吸力点。综上所述，L1 中的参数可表示为 $a_{mn\mathrm{N}}$，L4 中的参数 m 可表示为 $m_{1n\mathrm{Y}}$，以此类推。

最大基质吸力点（10^6 kPa，0）处的饱和度，各工况条件下的参数采用 5 个字母组成的词组

（A_{EBCD}）表示，其中 E 为 Extreme 的缩写，表示最大基质吸力点，其余 *ABCD* 含义同前文。

3 最大基质吸力点对各拟合参数的影响

由于 L1、L2 中 3 个参数 a 、m 、n 都是拟合得出，这 3 个参数都需要讨论。L3、L4，L5、L6，参数 m 分别是由等式 $m=1-1/n$ 、$m=1-2/n$ 控制，此时 VG 模型可看成是参数为 a 、n 的二参数方程，故只讨论参数 a 、n 。

3.1 最大基质吸力点对 L1 和 L2 拟合参数的影响

以 L1 的拟合数据作为 x 轴，以 L2 的拟合数据作为 y 轴可以得到图 1，拟合图中的数据，可以分别得到 3 个以 L1 的数据为自变量、以 L2 的数据为因变量的公式分别为

$$a_{mn\mathrm{Y}} = a_{mn\mathrm{N}} - 0.003\ 80\ ,\ R^2 = 0.998\ 4 \qquad (3)$$

$$m_{mn\mathrm{Y}} = m_{mn\mathrm{N}} - 0.000\ 06\ ,\ R^2 = 0.999\ 8 \qquad (4)$$

$$n_{mn\mathrm{Y}} = n_{mn\mathrm{N}} + 0.445\ 91\ ,\ R^2 = 0.978\ 8 \qquad (5)$$

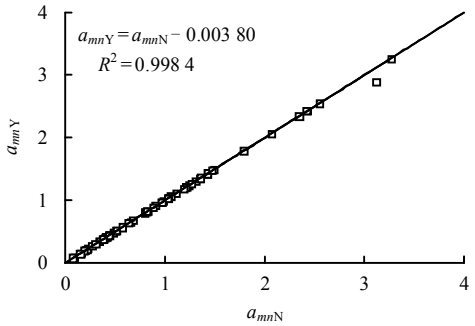
此时 VG 模型可看成是参数为 a 、n 的二参数方程，故只讨论参数 a 、n 。

表 2、3 分别列出了 L1、L2 工况下的平均值，标准差等评价参数以及其增长率。随着拟合数据中加入最大基质吸力点，参数 a 均值减小，表明了拟合参数 a 整体减小；加入最大基质吸力点也减小了参数 a 的离散程度；而参数 m 均值前后几乎不变，但加入最大基质吸力点增大了拟合参数 m 的离散程度；增大了参数 n 的均值和离散程度。

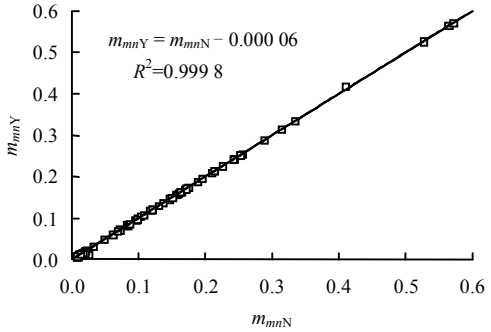
前文讨论了随着最大基质吸力点的加入，a 值的几项参数指标都是减小，但减小幅度不大，这也反映在式（3）上，表现为直线在 y 轴上的截距为 –0.003 80；m 值前后大多不变，各参数变化较 a 更小，式（4）在 y 轴上的截距仅为 –0.000 06 。而 n 值的几项参数指标都呈增加趋势，增加的幅度相比 a 、m 很大， y 轴上的截距为 0.445 91，绝对值远远大于式（3）、（4）的绝对值。可见最大基质吸力点对于参数 a 、m 影响不大，对参数 n 影响较大。

3.2 最大基质吸力点对 L3 和 L4 拟合参数的影响

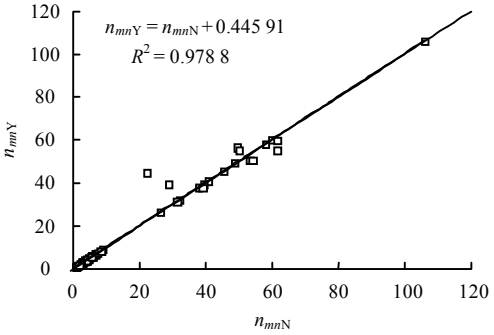
以 L3 的拟合数据作为 x 轴，以 L4 的拟合数据作为 y 轴可以得到图 2，由拟合图中的数据，可以分别得到 2 个以 L3 的数据为自变量、以 L4 的数据为因变量的公式分别为



(a) 工况 L1、L2 时，参数 a 之间的关系



(b) 工况 L1、L2 时，参数 m 之间的关系



(c) 工况 L1、L2 时，参数 n 之间的关系

图 1 L1、L2 拟合参数之间的关系

Fig.1 The relationship between fitted parameters of L1 and fitted parameters of L2

表 2 工况 L1 和 L2 下各评价参数

Table 2 Evaluation parameters under condition L1、L2

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
$a_{mn\mathrm{N}}$	0.939 7	0.718 8	3.269 2	0.076 4	3.192 8
$a_{mn\mathrm{Y}}$	0.935 9	0.708 1	3.254 9	0.076 4	3.693 0
$m_{mn\mathrm{N}}$	0.139 7	0.130 5	0.571 1	0.007 2	0.563 9
$m_{mn\mathrm{Y}}$	0.139 7	0.131 0	0.571 1	0.006 4	0.564 7
$n_{mn\mathrm{N}}$	17.888 4	22.770 8	106.058 0	0.992 0	105.066 0
$n_{mn\mathrm{Y}}$	18.334 3	23.021 1	106.125 1	0.992 4	105.132 7

表 3 L2 工况相比 L1 工况各评价参数增长率（单位：%）

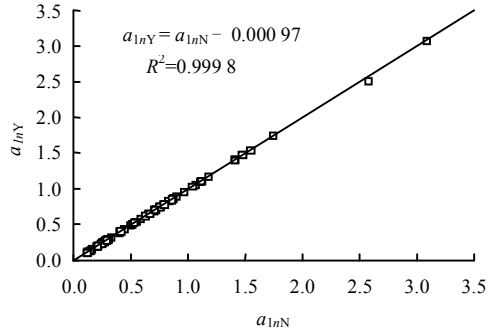
Table 3 The increasing rate of evaluation parameters under condition L2 compared with that under condition L1 (unit: %)

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
$a_{mn\mathrm{Y}}$	−0.40	−1.49	−0.44	0.00	15.67
$m_{mn\mathrm{Y}}$	0.00	0.38	0.00	−11.11	0.14
$n_{mn\mathrm{Y}}$	2.49	1.10	0.06	0.04	0.06

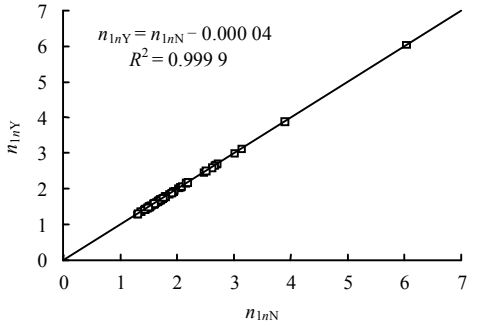
$$a_{1nY} = a_{1nN} - 0.000\ 97，\ R^2 = 0.998\ 4 \quad (6)$$

$$n_{1nY} = n_{1nN} - 0.000\ 04，\ R^2 = 0.999\ 9 \quad (7)$$

从表 4、5 可知，随着拟合数据中加入最大基质吸力点，参数 a 均值减小，这与式（6）中的结果相符合，加入最大基质吸力点也减小了拟合参数 a 的离散程度；参数 n 均值几乎不变，这与式（7）中 y 轴上的截距仅有 –0.000 04 相符合，加入最大基质吸力点减小了参数 n 的离散程度。对于限制条件 $m = 1 - 1/n$，最大基质吸力点的加入对其各参数的影响都不大。



(a) 工况 L3、L4 时，参数 a 之间的关系



(b) 工况 L3、L4 时，参数 n 之间的关系

图 2　L3 和 L4 拟合参数之间的关系

Fig.2　The relationship between fitted parameters of L3 and fitted parameters of L4

表 4　工况 L3 和 L4 下各评价参数

Table 4　Evaluation parameters under condition L3、L4

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{1nN}	0.684 8	0.558 4	3.080 7	0.108 8	2.971 9
a_{1nY}	0.683 8	0.555 0	3.074 9	0.108 8	2.966 1
n_{1nN}	1.900 2	0.701 0	6.036 1	1.285 1	4.751 0
n_{1nY}	1.900 2	0.700 9	6.035 9	1.287 9	4.748 0

表 5　工况 L4 相比工况 L3 各评价参数增长率（单位：%）

Table 5　The increasing rate of evaluation parameters under condition L4 compared with that under condition L3 (unit: %)

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{1nY}	−0.17	−0.61	−0.19	0.00	−0.20
n_{1nY}	0.00	−0.01	0.00	0.22	−0.06

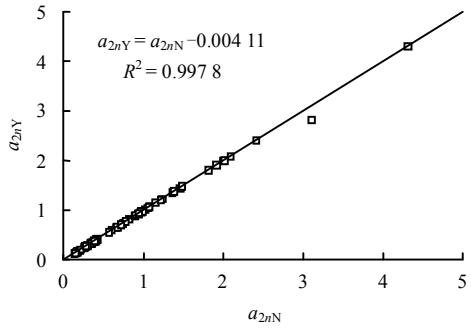
3.3　最大基质吸力点对 L5 和 L6 拟合参数的影响

以 L5 的拟合数据作为 x 轴，以 L6 的拟合数据作为 y 轴可以得到图 3，拟合图中的数据，可以分别得到两个以 L5 的数据为自变量、以 L6 的数据为因变量的公式为

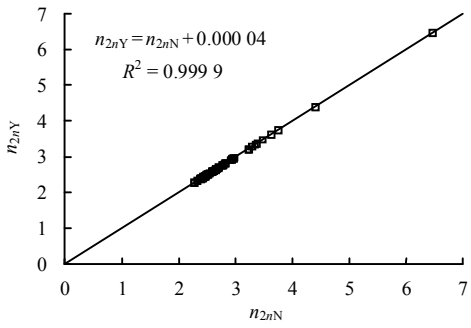
$$a_{2nY} = a_{2nN} - 0.004\ 11，\ R^2 = 0.997\ 8 \quad (8)$$

$$n_{2nY} = n_{2nN} + 0.000\ 04，\ R^2 = 0.999\ 9 \quad (9)$$

从表 6、7 可以看出，加入最大基质吸力点，参数 a 均值减小，这与式（8）中的结果相符合，加入最大基质吸力点也减小了拟合参数 a 的离散程度；参数 n 均值几乎不变，这与式（9）中 y 轴上的截距仅有 0.000 04 相符合，加入最大基质吸力点减小了参数 n 的离散程度。对于限制条件 $m = 1 - 2/n$，最大基质吸力点的加入对其各参数的影响都不大。



(a) 工况 L5、L6 时，参数 a 之间的关系



(b) 工况 L5、L6 时，参数 n 之间的关系

图 3　L5 和 L6 拟合参数之间的关系

Fig.3　The relationship between fitted parameters of L5 and fitted parameters of L6

表 6　工况 L5 和 L6 下，各评价参数

Table 6　Evaluation parameters under condition L5、L6

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{2nN}	0.888 2	0.741 4	4.308 5	0.129 4	4.179 1
a_{2nY}	0.884 1	0.728 9	4.297 2	0.129 4	4.167 8
n_{2nN}	2.780 2	0.596 1	6.456 9	2.269 8	4.187 1
n_{2nY}	2.780 2	0.596 2	6.460 8	2.276 8	4.184 0

表 7 工况 L6 相比工况 L5 各评价参数增长率（单位：%）
Table 7 The increasing rate of evaluation parameters under condition L6 compared with that under condition L5 (unit: %)

参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{2nY}	−0.46	−1.69	−0.26	0.00	−0.27
n_{2nY}	0.00	0.02	0.06	0.31	−0.07

4 参数间的相互关系

VG 模型为三参数方程时，拟合参数 a 的离散性不大，而参数 n 的离散性很大。参数 a 的均值为 0.939 7，标准差为 0.718 8，最大值为 3.269 2，最小值为 0.076 4。参数 n 的均值为 17.888 4，标准差为 22.770 8，最大值为 106.058 0，最小值为 0.992 0，其中 n 值大于 10 的个数为 21，占比为 31.34%。

4.1 不受任何限制条件下的参数 a 与拟合参数 m 受到限制时参数 a 之间的关系

由表 8、9 可以看出，当施加限制条件 $m=1-1/n$ 后，拟合参数 a 的均值都减小，离散程度比未受任何限制时要小；当施加限制条件 $m=1-2/n$ 后，拟合参数 a 的均值都减小，但减小幅度相比施加限制条件 $m=1-1/n$ 时要小，离散程度比未受任何限制时要大。可见，对于砂土，限制条件 $m=1-1/n$ 会减小数据离散程度，而限制条件 $m=1-2/n$ 会增大离散程度。

表 8 工况 L1、L3、L4、L5、L6 下参数 a 的评价参数
Table 8 Evaluation parameters of parameter a under condition L1、L3、L4、L5、L6

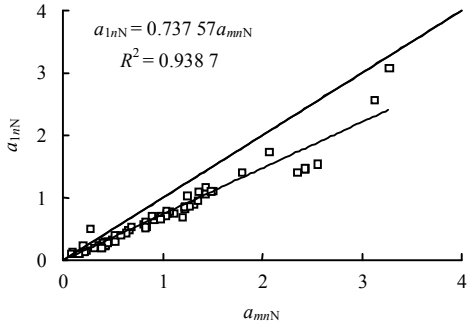
参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{mnN}	0.939 7	0.718 8	3.269 2	0.076 4	3.192 8
a_{1nN}	0.684 8	0.558 4	3.080 7	0.108 8	2.971 9
a_{1nY}	0.683 8	0.555 0	3.074 9	0.108 8	2.966 1
a_{2nN}	0.888 2	0.741 4	4.308 5	0.129 4	4.179 1
a_{2nY}	0.884 1	0.728 9	4.297 2	0.129 4	4.167 8

表 9 工况 L3、L4、L5、L6 相比工况 L1，参数 a 的评价参数增长率（单位：%）
Table 9 The increasing rate of evaluation parameters of parameter a under condition L3、L4、L5、L6 compared with that under condition L1 (unit: %)

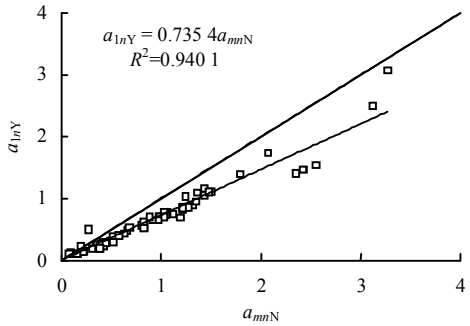
参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
a_{1nN}	−27.13	−22.32	−5.77	42.41	−6.92
a_{1nY}	−27.23	−22.79	−5.94	42.41	−7.10
a_{2nN}	−5.48	3.14	31.79	69.37	30.89
a_{2nY}	−5.92	1.41	31.45	69.37	30.54

图 4 中，当对 VG 模型施加了限制条件 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 后，绝大多数点都位于直线 $y=x$ 的下方，可见施加限制条件后拟合参数 a 几乎都呈现减小的趋势。这与表 8、9 中的计算结果相符。

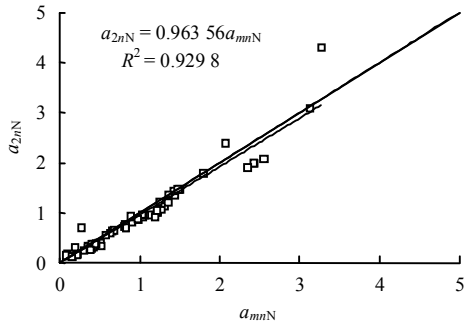
拟合图 4 中的数据点可得式（10）～（13）：



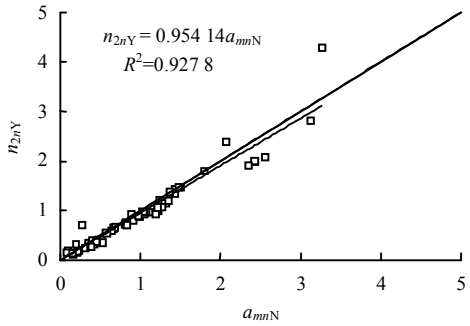
(a) 工况 L1、L3 时



(b) 工况 L1、L4 时



(c) 工况 L1、L5 时



(d) 工况 L1、L6 时

图 4 a_{mnN} 与 a_{1nN}、a_{1nY}、a_{2nN}、a_{2nY} 之间的关系
Fig.4 The relationship between a_{mnN} and a_{1nN}, a_{1nY}, a_{2nN}, a_{2nY}

$$a_{1n\mathrm{N}}=0.735\ 75a_{mn\mathrm{N}},\ R^2=0.938\ 7 \quad (10)$$

$$a_{1n\mathrm{Y}}=0.735\ 40a_{mn\mathrm{N}},\ R^2=0.940\ 1 \quad (11)$$

$$a_{2n\mathrm{N}}=0.963\ 56a_{mn\mathrm{N}},\ R^2=0.929\ 8 \quad (12)$$

$$a_{2n\mathrm{Y}}=0.954\ 14a_{mn\mathrm{N}},\ R^2=0.927\ 8 \quad (13)$$

式（10）中的斜率大于式（11）的斜率，式（12）中的斜率大于式（13）的斜率，这两条规律分别与前文式（6）和式（8）反映出的施加最大基质吸力点会减小拟合参数 a 的规律相对应。

已知文献中并未有学者求出式（10）表述的关系式，但可以通过 Likos 等[23]求得的一些其他的关系式，大致算得 $a_{1n\mathrm{N}}$ 和 $a_{mn\mathrm{N}}$ 的关系曲线为

$$a\left(S_{\mathrm{r}}=0\right)=1.25\left(a_0\right) \quad (14)$$

$$a\left(S_{\mathrm{r}}=0;\ m=1-1/n\right)=0.85\left(a_0\right) \quad (15)$$

可由式（14）、（15）推得

$$a\left(S_{\mathrm{r}}=0;\ m=1-1/n\right)=0.68a\left(S_{\mathrm{r}}=0\right) \quad (16)$$

式中：$a\left(S_{\mathrm{r}}=0;\ m=1-1/n\right)$ 为本文定义的 $a_{1n\mathrm{N}}$；$a\left(S_{\mathrm{r}}=0\right)$ 为本文定义的 $a_{mn\mathrm{N}}$；a_0 为四参数 VG 模型中的拟合值 a。

二者的系数在 0.7 上下浮动，原因如下：一方面可能源于试验数据的选取，Likos 等[23]选取了 44 组数据，其中 33 组源于 UNSODA 数据库，11 组数据由 Likos 等[23]实测得到，而本文选取的 67 组数据全部源于 UNSODA 数据库，不同的数据可能造成直线斜率不同；另一方面，式（10）中 $a_{1n\mathrm{N}}$ 和 $a_{mn\mathrm{N}}$ 的关系直线是由数据直接拟合得出，而式（16）中基于 $a_{1n\mathrm{N}}$ 和 $a_{mn\mathrm{N}}$ 的关系直线是由式（14）、（15）推导计算求出，所以存在一定误差。

4.2　不受任何限制条件下的参数 n 与拟合参数 m 受到限制时参数 n 之间的关系

由表 10、11 可以看出，当施加限制条件 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 后，拟合参数 n 的均值都减小，至少减小 84.46%，可见限制条件对参数 n 的影响要比参数 a 大很多。参数 m 不受限制时，参数 n 的离散程度很大，施加限制条件 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 后，参数 n 的离散程度显著减小，区间长度将近减小了 96%，也间接说明了限制条件 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 会对参数 n 产生很大影响。

在图 5 中，当施加限制条件 $m=1-1/n$ 和 $m=1-2/n$ 后绝大多数值都位于直线 $y=x$ 下方，并且 y 值大多集中在区间（1, 3）内。可用 $n=$ 平均值 ± 标准差的形式大致确定参数 n 的范围，其表达式分别为

$$n_{1n\mathrm{N}}=1.900\ 2\pm0.701\ 0 \quad (17)$$

$$n_{1n\mathrm{Y}}=1.900\ 2\pm0.700\ 9 \quad (18)$$

$$n_{2n\mathrm{N}}=2.780\ 2\pm0.596\ 1 \quad (19)$$

$$n_{2n\mathrm{Y}}=2.780\ 2\pm0.596\ 2 \quad (20)$$

5　最大基质吸力点处饱和度的影响

采用 L1～L6 不同工况条件，拟合出 6 种不同工况下的拟合参数各 67 组，分别利用不同工况下的拟合参数，求解 10^6 kPa 所对应的饱和度 S_{E}。为探求 L2～L6 五种工况下 S_{E} 与无任何约束条件下 S_{E} 的关系，作图 6 并拟合出以下公式：

$$S_{\mathrm{E}mn\mathrm{Y}}=S_{\mathrm{E}mn\mathrm{N}}-0.000\ 04,\ R^2=0.997\ 1 \quad (21)$$

$$S_{\mathrm{E}1n\mathrm{N}}=S_{\mathrm{E}mn\mathrm{N}}-0.000\ 51,\ R^2=0.809\ 4 \quad (22)$$

$$S_{\mathrm{E}1n\mathrm{Y}}=S_{\mathrm{E}mn\mathrm{N}}-0.000\ 53,\ R^2=0.800\ 5 \quad (23)$$

$$S_{\mathrm{E}2n\mathrm{N}}=S_{\mathrm{E}mn\mathrm{N}}+0.000\ 14,\ R^2=0.855\ 8 \quad (24)$$

$$S_{\mathrm{E}2n\mathrm{Y}}=S_{\mathrm{E}mn\mathrm{N}}+0.000\ 10,\ R^2=0.851\ 6 \quad (25)$$

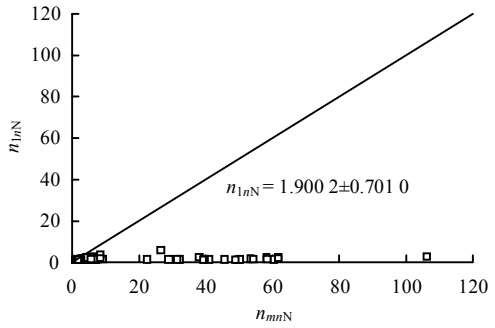
5 组函数关系 R^2 几乎都大于 0.8，拟合效果很好。从 y 轴上的截距可以看出，最大基质吸力点的加入与否对换算关系影响不大。这也是由于一般最大基质吸力点处的值相对较小，可以通过计算 S_{E} 的平均增长率这一指标客观反映。

表 10　工况 L1、L3、L4、L5、L6 下参数 n 的评价参数
Table 10　Evaluation parameters of parameter n under condition L1, L1、L3、L4、L5、L6

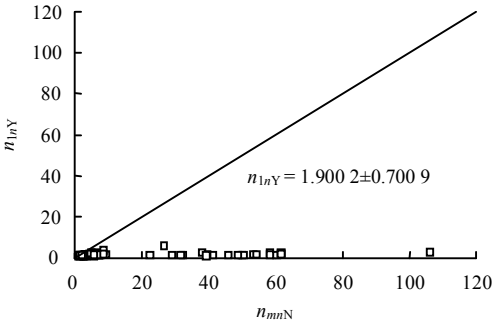
参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
$n_{mn\mathrm{N}}$	17.888 4	22.770 8	106.058 0	0.992 0	105.066 0
$n_{1n\mathrm{N}}$	1.900 2	0.701 0	6.036 1	1.285 1	4.751 0
$n_{1n\mathrm{Y}}$	1.900 2	0.700 9	6.035 9	1.287 9	4.748 0
n_{2nN}	2.780 2	0.596 1	6.456 9	2.269 8	4.187 1
n_{2nY}	2.780 2	0.596 2	6.460 8	2.276 8	4.184 0

表 11　工况 L3、L4、L5、L6 相比工况 L1，参数 n 的评价参数增长率（单位：%）
Table 11　The increasing rate of evaluation parameters of parameter n under condition L3、L4、L5、L6 compared with that under condition L1 (unit: %)

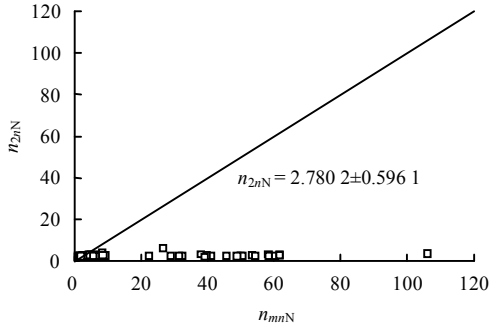
参数	平均值	标准差	最大值	最小值	区间长度
$n_{1n\mathrm{N}}$	−89.38	−96.92	−94.31	29.55	−95.48
$n_{1n\mathrm{Y}}$	−89.38	−96.92	−94.31	29.83	−95.48
$n_{2n\mathrm{N}}$	−84.46	−97.38	−93.91	128.81	−96.01
$n_{2n\mathrm{Y}}$	−84.46	−97.38	−93.91	129.52	−96.02



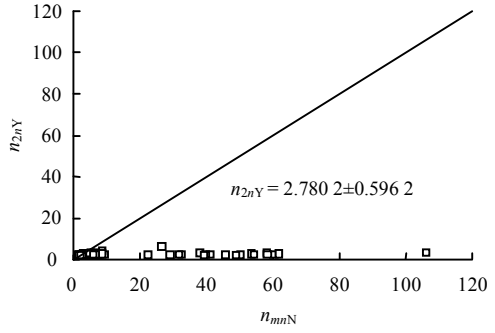
(a) 工况 L1、L3 时



(b) 工况 L1、L4 时



(c) 工况 L1、L5 时

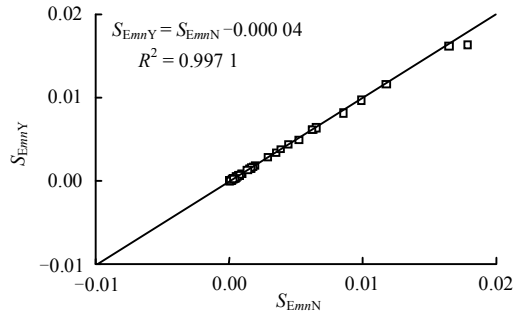


(d) 工况 L1、L6 时

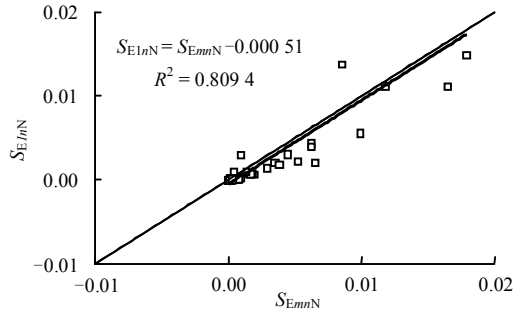
图 5 n_{mnN} 与 n_{1nN}、n_{1nY}、n_{2nN}、n_{2nY} 之间的关系

Fig.5 The relationship between n_{mnN} and n_{1nN}, n_{1nY}, n_{2nN}, n_{2nY}

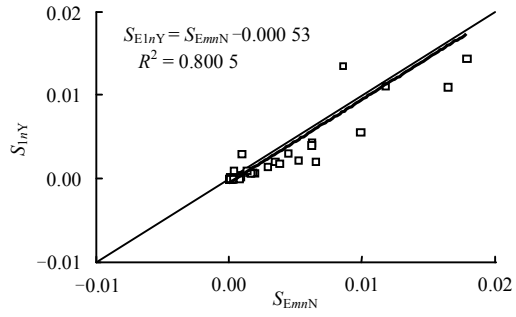
表 12 为不同工况下最大基质吸力点处的饱和度相比 L1 工况下的 67 组饱和度数据的平均增长率。5 组数据都为负数，表示其余 5 种工况下最大基质吸力点处的饱和度相比 L1 工况下都是减小的。



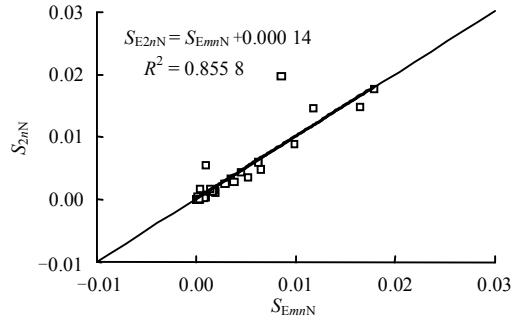
(a) 工况 L1、L2 时



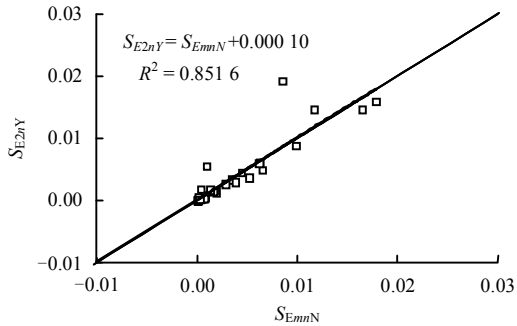
(b) 工况 L1、L3 时



(c) 工况 L1、L4 时



(d) 工况 L1、L5 时



(e) 工况 L1、L6 时

图 6 S_{mnN} 与 S_{mnY}、S_{1nN}、S_{1nY}、S_{2nN}、S_{2nY} 之间的关系

Fig.6 The relationship between S_{mnN} and S_{mnY}、S_{1nN}、S_{1nY}、S_{2nN}、S_{2nY}

表中 L5 和 L6 的平均增长率与式（24）、（25）中拟合参数存在差异，式（24）、（25）表示 S_{E2nN}、S_{E2nY} 比 S_{EmnN} 要大，而表中的数据表示 S_{E2nN}、S_{E2nY} 比 S_{EmnN} 要小。产生误差的原因在于评价标准不同，式（24）、（25）中的数据为平均增值；而表 12 中的数据为平均相对增长率。

表 12　不同工况下最大基质吸力点处的饱和度相比 L1 工况下的平均增长率

Table 12　The average increasing rate between condition L1 and the other five conditions

工况	平均增长率 / %
L2	−0.11
L3	−56.53
L4	−56.65
L5	−9.75
L6	−9.76

由表 12 可以看出，随着约束条件增多，最大基质吸力点处饱和度的值更接近真实情况，说明约束条件增多对于最大基质吸力点处的饱和度起着积极作用。但约束条件增多，方程自由度下降，拟合精度随之也下降。对于 VG 方程来说，三参数形式显然比二参数形式拥有更好的拟合精度。但三参数形式的 VG 方程在最大基质吸力点处的饱和度显然要大于二参数形式的 VG 方程。这就产生了矛盾——是整体的拟合精度更重要还是最大基质吸力点处的实际取值更重要。这可能也是 VG 方程在使用时的一个缺陷，即未考虑热力学平衡状态下的饱和度（含水率）问题。很多学者在使用 VG 方程时也未能考虑这一问题，为了解决这一问题，参考 FX 模型的形式，加入调整系数 C_ψ [9, 19, 24]，则式（2）转化为

$$S=\frac{\theta}{\theta_s}=C_\psi\frac{1}{\left[1+(a\psi)^n\right]^m} \tag{26}$$

式中：

$$C_\psi=1-\frac{\ln\left(1+\frac{\psi}{\psi_r}\right)}{\ln\left(1+\frac{10^6}{\psi_r}\right)} \tag{27}$$

无论式（26）拟合参数怎么变化，都能够保证经过最大基质吸力点，而且拟合精度相比式（1）、（2）要高[24]。

6　结　论

（1）最大基质吸力点对 L1～L6 不同工况条件下砂土的拟合参数影响各不相同。当 m 受到限制（$m=1-1/n$、$m=1-2/n$）时，最大基质吸力点的加入减小了各拟合参数的离散程度，减小了区间范围；而 m 未受限制时，最大基质吸力点的加入减小了 a 的离散程度和区间范围，但增大了 m、n 的离散程度和区间范围，但有时影响相对很小。

（2）m 受到限制（$m=1-1/n$、$m=1-2/n$）和有无最大基质吸力点 4 种不同工况下的参数 a 与 m 未受到限制且无最大基质吸力点的参数 a 呈线性关系，R^2 几乎都大于 0.92。而对于参数 n 则不存在这类线性关系。

（3）采用 L1～L6 六种不同条件下的拟合参数分别计算 10^6 kPa 所对应的饱和度，可以发现，L2～L6 五种工况下最大基质吸力点处的饱和度可以表示成自变量为无任何约束条件下的最大基质吸力点处饱和度的线性函数，R^2 几乎都大于 0.80。

（4）由于 VG 方程未考虑热力学平衡状态下的饱和度问题，本文提出了加入调整系数 C_ψ，解决这一缺陷。

需要说明的是本文的研究成果基于 UNSODA 数据库中的砂土，其余地方砂土以及其他土壤需进一步研究。

参 考 文 献

[1] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. **Soil Science**, 1958, 85(4): 228－232.

[2] BROOKS R H, COREY A T. Hydraulic properties of porous media[M]. Fort Collins: Colorado State University, 1964.

[3] WILLIAMS J, PREBBLE R E, WILLIAMS W T, et al. The influence of texture, structure and clay mineralogy on the soil moisture characteristic[J]. **Australian Journal of Soil Research**, 1983, 21(1): 15－32.

[4] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1980, 44(5): 892－898.

[5] FREDLUND D G, XING A. Equations for the soil-water characteristic curve[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1994, 31(4): 521－532.

[6] FREDLUND D G, XING A, HUANG S. Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil-water characteristic curve[J]. **Canadian Geotechnical**

Journal, 1994, 31(4): 533－546.

[7] AUBERTIN M, MBONIMPA M, BUSSIERE B, et al. A model to predict the water retention curve from basic geotechnical properties[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2003, 40(6): 1104－1122.

[8] LEONG E C, RAHARDJO H. Review of soil-water characteristic curve equations[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1997, 123(12): 1106－1117.

[9] SILLERS W S, FREDLUND D G, ZAKERZADEH N. Mathematical attributes of some soil — water characteristic curve models[M]. Unsaturated Soil Concepts and Their Application in Geotechnical Practice. [S. l.]: Springer Netherlands, 2001: 243－283.

[10] 伊盼盼, 牛圣宽, 韦昌富. 干密度和初始含水率对非饱和重塑粉土土水特征曲线的影响[J]. 水文地质工程地质, 2012, 39(1): 42－46.
YI Pan-pan, NIU Sheng-kuan, WEI Chang-fu. Effect of dry density and initial moisture content on soil water characteristic curve of remolded unsaturated silt[J]. **Hydrogelogy & Engineering Geology**, 2012, 39(1): 42－46.

[11] 褚峰, 邵生俊, 陈存礼. 干密度和竖向应力对原状非饱和黄土土水特征影响的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(2): 413－420.
CHU Feng, SHAO Sheng-jun, CHEN Cun-li. Experimental research on influences of dry density and vertical stress on soil-water characteristic curves of intact unsaturated loess[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(2): 413－420.

[12] 张昭, 刘奉银, 赵旭光, 等. 考虑应力引起孔隙比变化的土水特征曲线模型[J]. 水利学报, 2013, 44(5): 578－585.
ZHANG Zhao, LIU Feng-yin, ZHAO Xu-guang, et al. A soil water characteristic curve model considering void ratio variation with stress[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2013, 44(5): 578－585.

[13] 王铁行, 卢靖, 岳彩坤. 考虑温度和密度影响的非饱和黄土土-水特征曲线研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 1－5.
WANG Tie-hang, LU Jing, YUE Cai-kun. Soil-water characteristic curve for unsaturated loess considering temperature and density effect[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(1): 1－5.

[14] RAVI K, RAO S M. Influence of infiltration of sodium chloride solutions on SWCC of compacted bentonite-sand specimens[J]. **Geotechnical and Geological Engineering**, 2013, 31(4): 1291－1303.

[15] ARYA L M, PARIS J F. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1981, 45(6): 1023－1030.

[16] RAWLS W J, BRAKENSIEK D L, SAXTON K E. Estimation of soil water properties[J]. **Transactions of the American Society of Agricultural Engineers**, 1982, 25(5): 1316－1320.

[17] AHUJA L R, NANEY J W, WILLIAMS R D. Estimating soil water characteristics from simpler properties or limited data[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1985, 49(5): 1100－1105.

[18] SAXTON K E, RAWLS W J, ROMBERGER J S, et al. Estimating generalized soil-water characteristics from texture[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1986, 50(4): 1031－1036.

[19] 谭晓慧, 李丹, 沈梦芬, 等. 土水特征曲线参数的概率统计及敏感性分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2013, 34(6): 97－103.
TAN Xao-hui, LI Dan, SHEN Meng-xi, et al. Probability statistics and sensitivity analysis of parameters of soil-water characteristic curves[J]. **Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering**, 2013, 34(6): 97－103.

[20] 谭晓慧, 余伟, 沈梦芬, 等. 土-水特征曲线的试验研究及曲线拟合[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 2): 51－56.
TAN Xiao-hui, YU Wei, SHEN Meng-fen, et al. Experimental study and curve fitting of soil-water characteristic curve[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Supp. 2): 51－56.

[21] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. **Water Resources Research**, 1976, 12(3): 513－522.

[22] BURDINE N T. Relative permeability calculations from pore size distribution data[J]. **Journal of Petroleum Technology**, 1953, 5(3): 71－78.

[23] LIKOS W J, YAO J. Effects of constraints on van Genuchten parameters for modeling soil-water characteristic curves[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2014, 140(12): 1－5.

[24] PHOON K K, SANTOSO A, QUEK S T. Probabilistic analysis of soil-water characteristic curves[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2010, 136(3): 445－455.