DOI：10.16285/j.rsm.2017.0898

基于混合离散的砌石挡土墙边坡极限承载力下限分析

李 泽[1]，刘 毅[1]，周 宇[1]，王均星[2]

（1. 昆明理工大学 建筑工程学院工程力学系，云南 昆明 650500；2. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室，湖北 武汉 430072）

摘 要：将极限分析下限法理论、混合数值离散思想和线性规划结合起来研究砌石挡土墙边坡的极限承载力。采用三角形有限单元离散土体来模拟土体的连续介质力学特性，构建土体静力许可应力场的约束条件，采用块体单元离散砌石体来模拟砌石体的非连续介质力学特性，构建砌石挡土墙的静力许可应力场的约束条件；同时建立有限元单元和块体单元交界面的约束条件；然后以超载系数为目标函数建立求解砌石挡土墙极限承载力的下限法线性规划模型，并使用内点算法进行最优化求解，获得边坡的极限荷载（或安全系数）和对应的应力场。通过 3 个算例的分析验证了所提方法的正确性。所提方法是将混合数值离散思想引入极限分析领域的一次尝试。

关 键 词：土质边坡；砌石挡土墙；极限分析；下限法；极限承载力

中图分类号：TU 470 **文献识别码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 03－1100－10

Lower bound analysis of ultimate bearing capacity of stone masonry retaining wall slope using mixed numerical discretisation

LI Ze[1], LIU Yi[1], ZHOU Yu[1], WANG Jun-xing[2]

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics of Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China;
2. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: Stone retaining wall is constructed to resist the lateral earth pressure. Its characteristic is regarded as a discontinuous medium, whereas the characteristic of the soil behind the wall is a typical continuous medium. In this paper, the ultimate bearing capacity of masonry retaining wall was studied by combining the lower bound theory, the mixed numerical discretisation and linear programming. Firstly, soil mass was discretised by triangular finite elements to simulate its continuum mechanics characteristics, while the masonry wall was discretised by rigid block elements to simulate its non-continuum mechanics characteristics. Thus, constraint conditions of the statically admissible stress field were both proposed for soil and the masonry retaining wall. Meanwhile, constraint conditions were also proposed for interfaces between finite elements and block elements. By considering the overload coefficient as the objective function, the linear programming model was established for calculating the ultimate bearing capacity of masonry retaining wall. In addition, the interior point algorithm was employed to solve the problems of linear mathematical programming. At last, the ultimate load (or safety factor) of slope and its corresponding stress field were obtained directly. Moreover, three typical examples were conducted to validate the proposed method. Therefore, this study successfully introduced the mixed numerical discretisation into the limit analysis.

Keywords: soil slope; stone masonry retaining wall; limit analysis; lower bound method; ultimate bearing capacity

1 引 言

在我国基础设施建设过程中，出现了大量的砌石挡土墙边坡工程。砌石挡土墙造价低廉、取材容易、施工方便并能有效抵挡侧向土压力，因此其在边坡治理支护设计中被广泛采用。在工程实践中砌石挡土墙的破坏也经常发生，常见的破坏形式有砌石挡墙滑移、倾倒、墙身断裂或坍塌等。

收稿日期：2017-05-07
基金项目：国家自然科学基金项目（No.51564026）。
This work was supported by the National Nature Science Foundation of China (51564026).
第一作者简介：李泽，男，1981 年生，博士，副教授，主要从事岩土工程方面的教学和科研工作。E-mail: lize999@qq.com

砌石挡土墙可分为干砌石挡土墙和浆砌石挡土墙，由于石块的强度较高，挡土墙破坏时石材本身一般不会发生直接的破坏，砌石墙体的破坏主要是石块之间的接触面或砂浆层面的剪切滑移破坏，因此砌石墙体具有典型的非连续介质力学特性。近年来，众多学者从砌石墙体的体型设计[1]、砌石墙通缝抗剪强度[2]、墙体抗震性能[3]等方面做了大量的研究工作。砌石挡土墙背后的土体边坡具有典型的连续介质力学特性，土质边坡承载力分析已经形成了以刚体极限平衡法[4]、有限元法[5]等为代表的多种成熟方法。

极限分析下限法是求解岩土体极限承载力的一种高效工具。下限定理自 20 世纪 50 年代由 Drucker 等[6]提出以来已经在边坡稳定性分析方面得到了广泛应用和发展。1988 年 Sloan[7]将下限法、有限元数值离散技术和数学规划有效结合起来，开启了下限法数值分析的新开端。其后，国内外学者沿用这一模式做了很多有意义的研究工作[8−11]。同时，为了使用下限法或上限法解决岩土体的不连续力学问题，极限分析与刚性有限元[12−14]、块体元[15−18]的结合也成为近年来研究的热点。

砌石挡土墙边坡的极限承载力问题是一个包括土体连续介质力学特性+砌石体的非连续介质力学特性的混合问题。有限元数值方法在处理连续介质力学问题方面非常高效，而块体单元数值方法在处理非连续介质力学问题方面具有优势。因此，本文将塑性极限分析下限法理论、有限元+块体元的混合数值离散技术和线性规划结合起来，建立一种基于混合数值离散的砌石挡土墙边坡极限承载力的下限分析法。

2　塑性极限分析下限法理论及假定

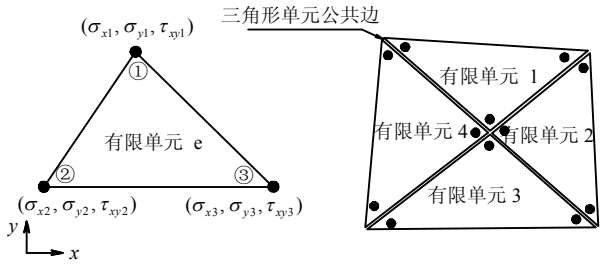
下限法的主要任务是构建岩土体的静力许可应力场。静力许可应力场是同时满足平衡方程、屈服条件和静力边界条件的应力场，在边坡体内，一个荷载对应着一个应力场，但根据下限定理，只有最大荷载对应的应力场才是最接近真实的极限状态应力场。因此下限法的目的就是：在无数个静力许可应力场内寻求使得荷载最大的应力场。

本文将砌石挡土墙边坡作为研究对象，为了能够使用混合数值离散方法构建边坡体的静力许可应力场，本文做如下假设：①假设土体为理想塑性材料并服从关联流动法则，同时边坡稳定问题可简化为平面应变问题；②假设砌石石块为刚性块体，其不会发生任何变形和破坏，砌石体的破坏仅仅发生在相邻石块之间的结构面上；③仅考虑土体、砌石石块的平动力学效应，不考虑转动力学效应；④仅考虑土体和砌石结构面的剪切滑移破坏。

3　砌石挡土墙边坡的混合离散

为了能够准确构建砌石挡土墙边坡的静力许可应力场，本文采用两种类型的单元来离散边坡体。

土体是典型的连续介质，土质边坡一般可简化为平面应变问题，本文采用文献[7]的思想，使用三节点线性有限单元来模拟其力学特性。图 1(a)为三角形有限单元的应力模式图。为了能够模拟单元之间的应力间断，三角形单元采用非共节点模式，即每个节点仅属于一个单元，不同节点可具有相同的坐标（如图 1(b)所示）。



(a) 三角形有限单元应力模式　　(b) 三角形不共节点有限单元

图 1　土体三角形有限单元应力模式图

Fig.1　Stress model for triangular finite element of soil

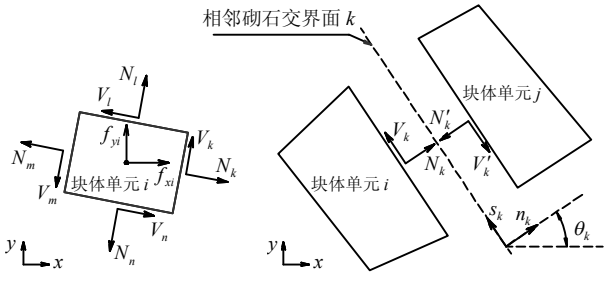
节点处作用有正应力和切应力分量，土体三角形单元中任意节点 n 的应力向量可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^{n}=[\sigma_{xn},\sigma_{yn},\tau_{xyn}] \tag{1}$$

对于图 1(a)中的三节点的三角形有限单元 e 的单元应力向量可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}=[\sigma_{x1},\sigma_{y1},\tau_{xy1},\sigma_{x2},\sigma_{y2},\tau_{xy2},\sigma_{x3},\sigma_{y3},\tau_{xy3}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

对于组成砌石挡土墙的石块，本文采用刚性块体单元来模拟其力学特性。一个任意形状石块的刚性块体单元 i 以及结构面 k 的受力如图 2 所示。假



(a) 块体单元　　(b) 相邻块体单元之间的结构面

图 2　砌石块体单元和结构面变量示意图

Fig.2　Static variables on stone block elements and interfaces

设块体单元本身不会发生任何变形和破坏，砌石挡土墙的破坏仅仅发生在相邻块体单元之间的结构面上。块体单元同时受体力、表面力等外力荷载以及结构面的内力作用。

块体单元任意结构面 k 的内力向量定义为

$$\boldsymbol{Q}^k=[N_k \quad V_k]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中：N_k、V_k 分别为作用在结构面 k 形心处的法向力和剪力，N_k 规定以拉力为正。

任意块体单元 i 形心处作用有外力等效荷载力向量：

$$\boldsymbol{F}^i=[f_{xi} \quad f_{yi}]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

式中：f_{xi}、f_{yi} 分别为作用在块体单元 i 形心处沿 x、y 方向的外力等效荷载。

4 砌石挡土墙边坡极限承载力下限法数学模型

如前所述，土体为典型的连续介质，而砌石体为典型的非连续介质，本文同时采用有限单元、块体单元分别构建土体和砌石挡土墙的静力许可应力场。根据下限法理论，边坡土体和砌石体需要同时满足平衡方程、屈服条件、静力边界条件以及有限单元与块体单元交界面的约束条件。

4.1 土体有限单元约束条件

采用三节点有限单元离散土体以后，参照文献[7]的方法构建土体的静力许可应力场如下。

4.1.1 土体三角形单元平衡条件

根据有限元理论，边坡土体三角形单元的平衡方程为

$$\boldsymbol{A}^e\boldsymbol{\sigma}^e=\boldsymbol{b}^e \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}^e&=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0 & c_i & b_j & 0 & c_j & b_k & 0 & c_k\\ 0 & c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{b}^e&=[0 \quad \gamma^{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中：$e=(1,\cdots,n_{\mathrm{e}})$，$n_{\mathrm{e}}$ 为土体三角形有限单元的数量；A 为三角形单元的面积；γ^{e} 为单元土体材料的重度；b_i、c_i、$(i=i,j,k)$ 为线性三角形有限单元的形函数系数[19]。

4.1.2 土体三角形单元公共边的应力连续条件

本文的三角形有限单元为非共节点模式，相邻单元之间存在公共边，任意相邻单元 e^1、单元 e^2 的公共边 g 上有 4 个节点（如图 3 所示），公共边的应力向量可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^g=[\boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{e}1} \quad \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{e}2} \quad \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{e}1} \quad \boldsymbol{\sigma}_4^{\mathrm{e}2}]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

为了满足单元之间的应力间断条件，必须保证相邻单元 e^1、单元 e^2 的公共边两侧的节点的法向正应力和切应力相等。任意一条公共边 g 的应力连续条件可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}^g\boldsymbol{\sigma}^g=0 \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}^g&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^g & -\boldsymbol{T}^g & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{T}^g & -\boldsymbol{T}^g\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{T}^g&=\begin{bmatrix}\sin^2\theta_g & \cos^2\theta_g & -\sin 2\theta_g\\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta_g & \frac{1}{2}\sin 2\theta_g & \cos 2\theta_g\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中：$g=(1,\cdots,n_{\mathrm{g}})$；$n_{\mathrm{g}}$ 为土体中三角形有限单元公共边的数量。

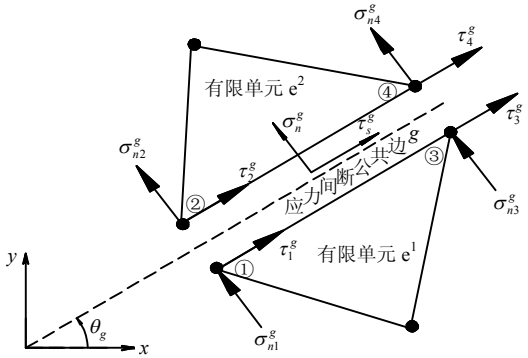


图 3 三角形单元公共边的应力间断

Fig.3 Stress discontinuity between adjacent triangle finite elements

4.1.3 三角形单元的屈服条件

土体材料的屈服破坏一般采用 Mohr-Coulomb 屈服条件，平面应变问题的屈条件可表示为

$$F(\sigma,\tau)=(\sigma_x-\sigma_y)^2+(2\tau_{xy})^2-(2c\cos\varphi-(\sigma_x+\sigma_y)\sin\varphi)^2\leqslant 0 \tag{10}$$

式中：φ、c 分别为土体材料的内摩擦角和黏聚力。

式（10）为一个非线性表达式，为了避免求解非线性数学规划问题，Sloan[7]、Lyamin[8]等提出了采用内接正多边形来拟合 Mohr-Coulomb 屈服准则的屈服面（如图 4 所示），内接多边形的边数越多计算精度越高。由于本文采用线性单元，因此只需要 3 个节点满足屈服准则，则整个单元均满足屈服准则，因此，任意节点 n 的屈服条件可表示为

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\sigma}^n\leqslant\boldsymbol{B}^n \tag{11}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k & B_k & C_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{\mathrm{p}} & B_{\mathrm{p}} & C_{\mathrm{p}} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix} D & D & D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \cos(2k\pi/p)+\sin\varphi_{\mathrm{n}}\cos(\pi/p);\\ B_k &= -\cos(2k\pi/p)+\sin\varphi_{\mathrm{n}}\cos(\pi/p);\\ C_k &= 2\sin(2k\pi/p);\ D=2c_{\mathrm{n}}\cos\varphi_{\mathrm{n}}\cos(\pi/p) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中：$n=(1,\cdots,n_{\mathrm{n}})$，$k=(1,\cdots,p)$，$n_{\mathrm{n}}$ 为土体中所有节点的数量，p 为 Mohr-Coulomb 屈服准则线性化内接多边形的边数，$\varphi_{\mathrm{n}}, c_{\mathrm{n}}$ 分别是节点 n 的内摩擦角和黏聚力。

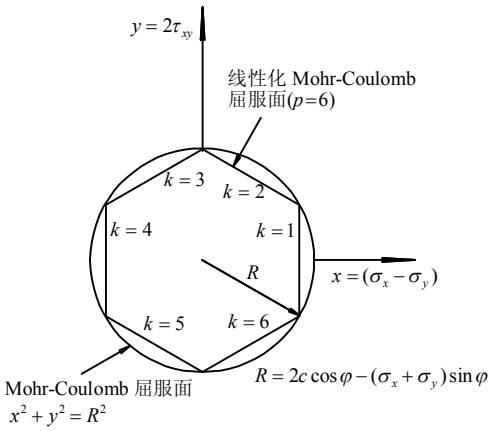


图 4　土体 Mohr-Coulomb 屈服条件线性化(p=6)
Fig.4　Linearized Mohr-Coulomb yield function(p=6)

4.1.4 应力边界条件

当求解外荷载的超载系数时，土体边界可分为两类，一类是不超载的边界，另一类是超载边界，因此土体边界上的有限单元应该满足的应力边界条件如下：

$$\boldsymbol{A}^b\boldsymbol{\sigma}^b=\boldsymbol{q}^b+k_{\mathrm{f}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{o}}^b \tag{14}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}^b &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^{\mathrm{b}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}\\ \boldsymbol{T}^b &= \begin{bmatrix} \sin^2\theta_b & \cos^2\theta_b & -\sin 2\theta_b \\ -\dfrac{1}{2}\sin 2\theta_b & \dfrac{1}{2}\sin 2\theta_b & \cos 2\theta_b \end{bmatrix}\\ \boldsymbol{q}^b &= \begin{bmatrix} q_1^b, t_1^b, q_2^b, t_2^b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{\sigma}^b=[\boldsymbol{\sigma}_1^b\ \ \boldsymbol{\sigma}_2^b]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{q}_{\mathrm{o}}^b$ 为超载边界上节点的已知的应力向量，$b=(1,\cdots,n_{\mathrm{b}})$，$n_{\mathrm{b}}$ 为边界单元数量；θ_b 为边界 b 的倾角（逆时针为正），$(q_1^b, q_2^b, t_1^b, t_2^b)$ 分别为土体边界上的三角形单元 b 的两个节点作用的已知的法向、切向应力值，k_{f} 为外荷载超载系数，超载的外荷载可以是面力、集中力或体积力。

4.2　砌石体块体单元约束条件

4.2.1 块体单元平衡条件

图 2(a)中的砌石石块受多种力的作用而保持平衡，其需要满足力的平衡方程如下：

$$\sum_{k=1}^{m_i}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{Q}^k)+\boldsymbol{F}^i=0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{T}^k=\begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

式中：$i=(1,\cdots,n_{\mathrm{B}})$，$n_{\mathrm{B}}$ 为砌石挡土墙中块体单元的数量；$k=(1,\cdots,m_i)$，m_i 为块体单元 i 的结构面数量；θ_k 为结构面 k 的倾角（逆时针为正）。

4.2.2 相邻块体单元结构面屈服条件

由于假设石块为刚性体，因此采用块体单元离散砌石挡土墙以后，刚性块体单元不会发生任何变形和破坏。挡土墙的破坏只发生在相邻块体单元的结构面上，本文假设结构面上的应力满足 Mohr-Coulomb 屈服条件：

$$\left|\tau_{\mathrm{s}}\right|+\sigma_{\mathrm{n}}\tan\varphi_k-c_k=0 \tag{18}$$

式中：φ_k、c_k 分别为结构面 k 的内摩擦角和黏聚力；σ_{n} 为结构面上的法向正应力；τ_{s} 为结构面上沿切向的切应力。

假设结构面上沿法向的正应力和沿切向的切应力都是均匀分布的，则式（18）可以用结构面的内力向量表示，结构面的屈服条件如图 5 所示。具体表达式为

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}^k\leqslant\boldsymbol{B}^k \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix} \tan\varphi_k & 1 \\ \tan\varphi_k & -1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B}^k=l_k c_k\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

式中：$k=(1,2,\cdots,n_k)$，n_k 为砌石体中所有结构面的数量；l_k 是结构面 k 的长度。

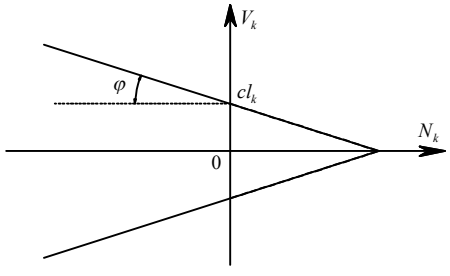


图 5　砌石挡土墙结构面的 Mohr-Coulomb 屈服条件
Fig.5　Mohr-Coulomb yield condition of interfaces of adjacent stones

4.2.3 边界条件

砌石挡墙边界上的块体单元的静力边界条件可表示为

$$\boldsymbol{Q}^d = \bar{\boldsymbol{Q}}^d + k_{\mathrm{f}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{o}}^d \tag{21}$$

式中：$d=(1,2,\cdots,n_{\mathrm{d}})$，$n_{\mathrm{d}}$ 为挡土墙边界上块体单元力界面的数量；$\bar{\boldsymbol{Q}}^d$ 为已知的边界力向量；$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{o}}^d$ 为边界处块体单元的超载力向量。

4.3 土体与砌石体交界面约束条件

本文分别采用有限元模拟土体的力学特性、采用块体元模拟砌石墙体的力学特性，在土体与砌石墙体的交界面处允许存在应力间断，但法向力和切向力必须满足连续条件。土体三角形有限单元与石块块体单元交界面示意图如图 6 所示。

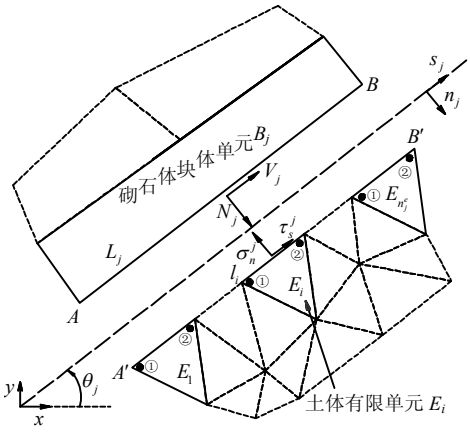


图 6 有限单元与块体单元交界面示意图

Fig.6 Sketch of interface between a block element and finite elements

任意石块的块体单元 B_j 与土体的交界面为 J_j，交界面长度为 L_j，块体单元一侧 AB 上作用有法向力 N_j 和剪力 V_j；在土体一侧 $A'B'$ 上划分了 n_j^{e} 个三角形有限单元，即在长度为 L_j 的范围有 $2n_j^{\mathrm{e}}$ 个有限元节点与块体单元 B_j 接触。在交界面 B_j 上应允许存在应力间断，但砌石的块体单元和土体的有限单元在法向和切向必须满足力的连续条件，即：

$$N_j = \int_{L_j}\sigma_n^j \mathrm{d}L,\ V_j = \int_{L_j}\tau_{\mathrm{s}}^j \mathrm{d}L \tag{22}$$

式中：σ_{n}^j、τ_{s}^j 分别是块体单元与有限单元交界面上的沿法向的正应力和沿切向的切应力。

假设应力在三角形单元内呈线性变化，则对任意一条交界面 J_j，式（22）可用节点应力向量和结构面内力向量写为

$$\sum_{i=1}^{n_j^{\mathrm{e}}}\{\boldsymbol{A}_i^j\boldsymbol{\sigma}_i^j\} = \boldsymbol{Q}^j \tag{23}$$

$$\boldsymbol{A}_i^j = 0.5l_i[\boldsymbol{T}^j\ \ \boldsymbol{T}^j];\boldsymbol{Q}^j = [N_j\ \ V_j]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\sigma}_i^j = [\boldsymbol{\sigma}_1^{j/i}\ \ \boldsymbol{\sigma}_2^{j/i}]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{T}^j = \begin{bmatrix} \sin^2\theta_j & \cos^2\theta_j & -\sin 2\theta_j \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta_j & \frac{1}{2}\sin 2\theta_j & \cos 2\theta_j \end{bmatrix} \tag{25}$$

式中：$i=(1,\cdots,n_j^{\mathrm{e}})$，$j=(1,\cdots,n_j)$，$n_j$ 为边坡中块体单元与土体有限元交界面的数量；n_j^{e} 为交界面 j 上土体三角形有限单元的数量；θ_j 为块体单元与有限单元交界面的倾角（逆时针为正）；l_i 为块体单元与土体的交界面上三角形单元的长度。

土体三角形有限单元与石块块体单元交界面的屈服破坏满足式（19），但抗剪参数需要取土体或石块砂浆层面抗剪参数的较小值。

4.4 砌石挡土墙的下限法线性数学规划模型

为了求解砌石挡土墙边坡的极限承载力，本文把超载系数 k_{f} 设为目标函数，并结合静力许可应力场的约束条件式（5）、（8）、（11）、（14）、（16）、（19）、（21）、（23），则可得到砌石挡土墙边坡极限承载力的下限法数学规划模型：

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximize: } k_{\mathrm{f}} \\ &\text{Subject to: } \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{e}},\ \boldsymbol{A}^g\boldsymbol{\sigma}^g = 0, \\ &\qquad \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\sigma}^n \leqslant \boldsymbol{B}^n, \boldsymbol{A}^b\boldsymbol{\sigma}^b = \boldsymbol{q}^b + k_{\mathrm{f}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{o}}^b \\ &\qquad \sum_{k=1}^{m_i}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{Q}^k) + \boldsymbol{F}^i = 0 \\ &\qquad \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}^k \leqslant \boldsymbol{B}^k,\ \boldsymbol{Q}^d = \bar{\boldsymbol{Q}}^d + k_{\mathrm{f}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{o}}^d \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n_j}\{\boldsymbol{A}_i^j\boldsymbol{\sigma}_i^j\} = \boldsymbol{Q}^j \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

4.5 程序编制和求解策略

根据上述过程，本文采用 Fortran 编写了相应的计算程序。下限法的计算程序流程详见图 7，计算程序包括 4 个部分：

（1）前处理。根据边坡土体、砌石体的几何信息、材料物理力学参数等，采用有限单元、块体单元对其进行混合数值离散，生成有限元的单元以及节点的信息、块体单元以及结构面的信息。

（2）建立目标函数和约束方程。根据平衡方程、屈服条件、边界条件等约束方程的表达式计算相应的约束矩阵，构建边坡的静力许可应力场。

（3）优化求解。最终得到的式（26）是一个线性数学规划模型，本文采用内点算法进行优化求解。

（4）后处理。根据优化计算结果绘制应力等值线、屈服区图形等。

在边坡工程中，有时候需要求解强度储备系数

k_m，如果直接求解强度储备系数，式（11）、（19）将会变成非线性约束，为了避免求解非线性规划模型，本文采用如图 7 中所示的迭代法求解强度储备系数。

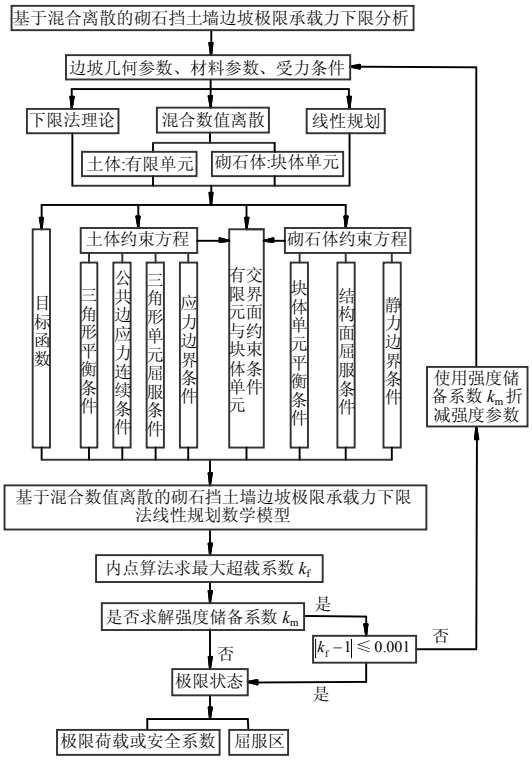


图 7　混合数值离散下限法的程序流程图
Fig.7　Flow chart of lower bound method using mixed numerical discretization

5　算　例

为了验证本文提出的方法和编制程序的正确性，选取了 3 个算例进行了分析。

5.1　挡土墙极限均布荷载算例

算例 1 为一个简单的砌石挡土墙结构（如图 8 所示），挡土墙的墙背垂直、光滑，挡土墙的重度为 25 kN/m^3、挡土墙底部的摩擦角取 35°、黏聚力取 0，土体的重度为 20 kN/m^3，墙后土体表面水平并作用有均布荷载 p_s。本算例的目的是求解土体主动破坏时不同土体抗剪参数条件下均布荷载 p_s 的极限值。根据朗肯土压力理论[20]，可获得均布荷载 p_s 极限值的解析解。为了便于与解析解对比分析，采用本文方法计算时将挡土墙当成一个刚性块体单元，而墙后土体采用三节点有限单元离散，混合离散的单元示意图如图 9 所示。为了验证网格密度对计算精度的影响，在混合离散时采用了 5 种密度的有限元网格，土体有限元网格的数量分别为 12、26、44、88、138 个。

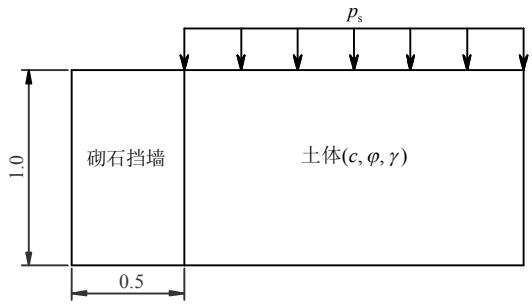


图 8　算例 1 挡土墙边坡示意图（单位：m）
Fig.8　Schematic of retaining wall of example 1 (unit: m)

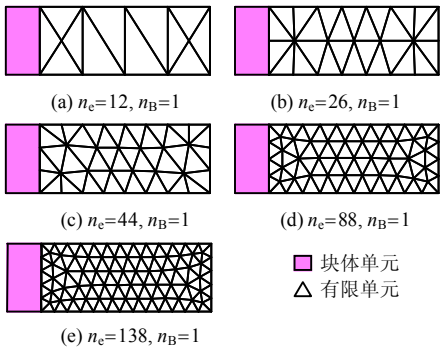


图 9　算例 1 混合离散单元示意图
Fig.9　Mixed numerical discretization of example 1

本文数值方法的误差主要来自于两个方面：一是土体 Mohr-Coloumb 屈服准则线性化产生的误差，二是土体有限元网格产生的误差。图 10 为在密网格条件下(n_e=138)极限均布荷载与 Mohr-Coloumb 屈服准则线性化多边形边数 p 的关系图。由图可知，p 越大，计算误差越小。当 $p\geqslant 16$ 时误差在 3%以内，因此，在使用本文方法时，Mohr-Coloumb 屈服准则线性化多边形的边数 p 应不小于 16。图 11 为 p=16 时极限均布荷载与土体有限元网格密度的关系图。由图可知，只有在土体有限元网格极其稀疏的时候下限解与解析解的误差才会比较大，当采用中密度以上的有限元网格时，计算误差可控制在 3.5%以内。

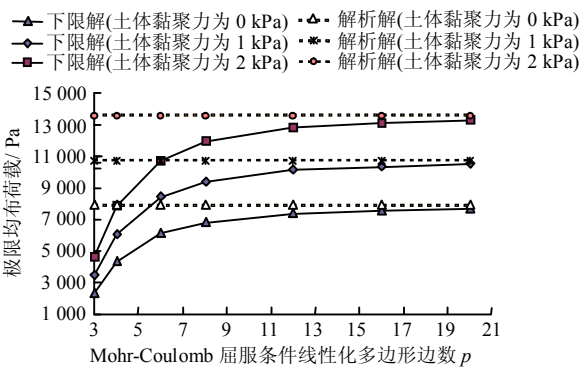


图 10　极限均布荷载与 p 的关系（土体φ=20°, n_e=138）
Fig.10　Relationships between ultimate uniformly distributed load and p (φ=20°, n_e=138)

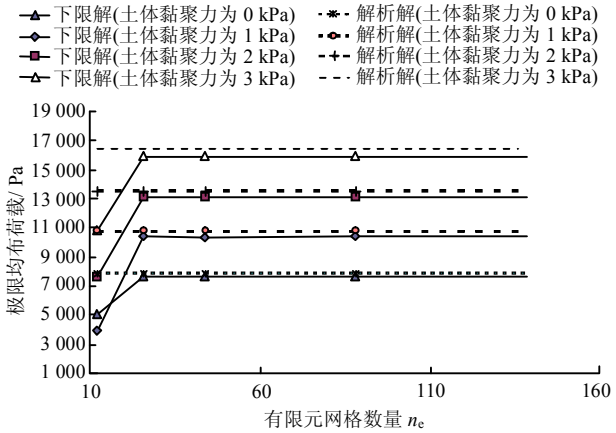


图 11 极限均布荷载与单元密度的关系（土体φ=20°, p=16）

Fig.11 Relationships between ultimate uniformly distributed load and grid density (φ=20°, p=16)

图 12 为土体取不同抗剪参数时本文数值解与由朗肯土压力理论获得的解析解的对比。由图可知，本文数值计算结果均小于解析解，属于严格的下限解，且与解析解的误差都在 2.5%以内。计算结果表明本文数值方法具有较高的精度。

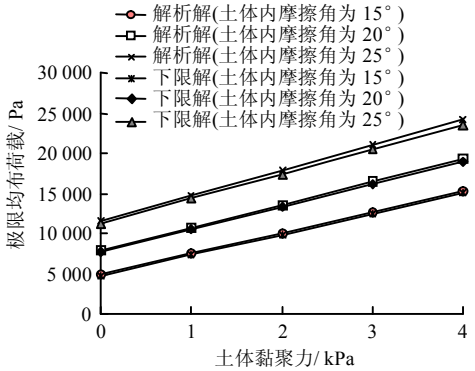


图 12 极限均布荷载与抗剪参数的关系(n_e=138)

Fig.12 Relationships between ultimate load and shear strength (n_e=138)

5.2 干砌料石挡土墙边坡强度储备系数算例

算例 2 为一干砌料石挡土墙边坡，其几何形状如图 13 所示。挡土墙为重力式干砌料石挡土墙，砌石石块之间结构面的内摩擦角为 38°、黏聚力为 0，墙后土体为黏土（c = 20 kPa，φ = 8°，γ = 19 kN/m^3）。本算例的目的是计算边坡的强度储备系数。本算例采用图 7 中所示的迭代法流程，通过计算土体重度的超载系数求解边坡体的强度储备系数。最终求解得到砌石挡土墙边坡体的强度储备系数为 1.508。图 14 为算例 2 混合离散元示意图，挡土墙分为 60 个块体单元，土体划分为 173 个有限元网格。根据计算结果，绘制了土体的主应力等值线和矢量图，分别如图 15、16、17 所示。主应力分布符合一般规律，土体整体表现为双向受压，只有在边坡临空面附近的滑动区域内存在小范围的小于 5.0 kPa 的主拉应力。

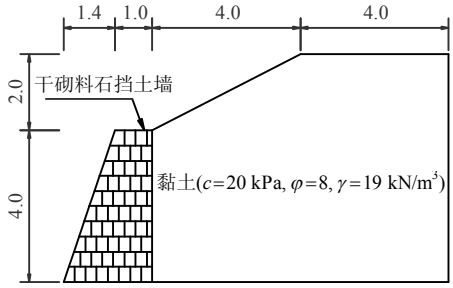


图 13 算例 2 挡土墙示意图（单位：m）

Fig.13 Schematic of retaining wall slope of example 2 (unit: m)

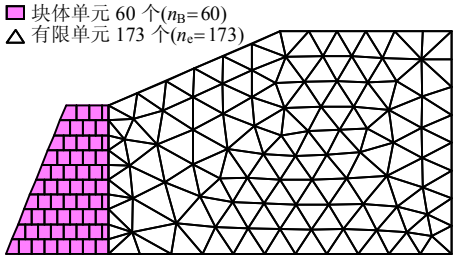


图 14 算例 2 混合离散单元示意图

Fig.14 Mixed numerical discretization of example 2

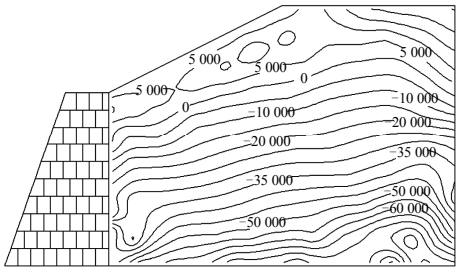


图 15 算例 2 边坡第一主应力等值线（单位：Pa）

Fig.15 Major principal stress contour of slope of example 2 (unit: Pa)

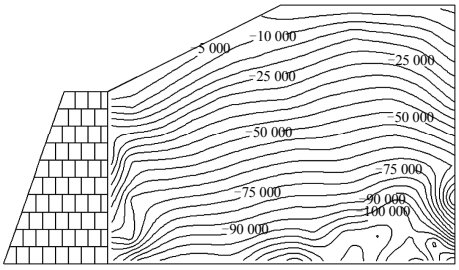


图 16 算例 2 边坡第二主应力等值线（单位：Pa）

Fig.16 Minor principal stress contour of slope of example 2 (unit: Pa)

根据土体有限单元节点应力计算了边坡土体的点安全系数[21]，同时根据砌石块体单元结构面的内

力验算了发生屈服破坏的结构面（如图 18 所示）。由图可知，砌石挡土墙 *AB* 层面以上的结构面基本都已经发生屈服破坏，屈服区已经沿挡土墙贯通；墙后土体的点安全系数小于 1.0 的区域已经发生屈服。

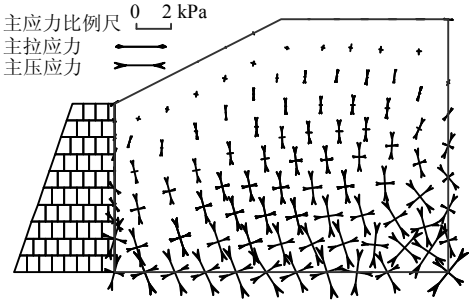


图 17　算例 2 边坡主应力矢量图
Fig.17　Principal stress vector contour of slope of example 2

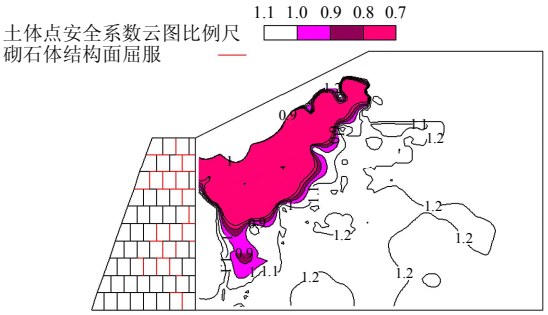


图 18　算例 2 砌石体屈服结构面和土体的点安全系数分布
Fig.18　Distribution of yield interfaces of masonry and point safety factor of soil for example 2

5.3　浆砌石挡土墙路基边坡工程实例

算例 3 为云南省昆明市某工业区内一个道路边坡，图 19 为该边坡发生破坏时的现场照片。边坡失稳以后，勘察单位对边坡的地质情况进行了勘察，在边坡区域内布置了 4 个勘察钻孔（ZK01～ZK04），对边坡的土层结构、挡土墙破坏形态以及土体滑裂面进行了详细调查，边坡地质剖面如图 20 所示。边坡土体分两层，上层为黏土，呈硬塑状、物理力学性质较好；下层为中风化玄武岩，岩体破碎、强度较高；边坡下部有高度为 6.0 m 的浆砌料石挡土墙，石材均形状规则、尺寸约为 40 cm×40 cm×30 cm（长度×高度×厚度）；边坡体内无地下水作用。勘察中发现在边坡顶部有 3 条贯穿性裂缝，裂缝宽度为 5.0～10.0 cm，坡顶道路最大沉降量为 12.0 cm；下部挡土墙在距离地表 2.5 m 高度处发生水平剪切破坏，挡土墙临空面中部变形严重，最大水平变形量为 9.0 cm。地质勘察报告显示此边坡发生破坏的原因主要是：①边坡坡顶发生严重的超载：破坏时坡顶道路有大吨位的渣土车多次往复碾压；②浆砌石挡土墙施工质量差，在墙背一侧砂浆用量非常少，有些石块之间甚至无砂浆（石块直接相互接触而出现“瞎缝”），导致挡土墙实际抗剪强度远远低于设计值。勘察报告提供的边坡各种材料的物理力学参数如表 1 所示。



图 19　算例 3 挡土墙边坡破坏形态
Fig.19　Failure mode of retaining wall slope of example 3

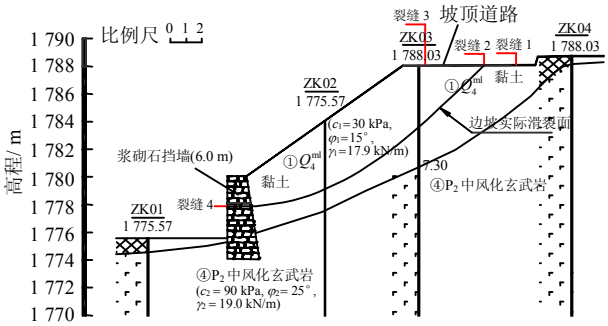


图 20　算例 3 挡土墙边坡地质剖面图（单位：m）
Fig.20　Geological profile of example 3 (unit: m)

表 1　算例 3 材料物理力学参数
Table 1　Physical and mechanical parameters of materials of example 3

材料	重度/ (kN/m^3)	内摩擦角/ (°)	黏聚力/ kPa
黏土	17.9	15	30
中风化玄武岩	19.0	25	90
浆砌石层面		40	50

图 21 为本算例混合单元离散示意图，挡土墙划分成 97 个块体单元，土体划分成 359 个三角形有限单元。采用本文所提方法计算了边坡顶部道路 4.0 m 宽度范围内的极限均布压力，计算得到极限均布荷载为 155 kPa（约为 63.0 t）。同时也计算了上部道路无外荷载作用时整个边坡的强度储备系数，计算得到的强度储备系数结果为 1.498。基于计算结果验算了挡土墙砌石结构面的屈服状态，并计算绘制了土体的点安全系数云图（如图 22 所示）。

通过分析可以得出结论：①此边坡的强度储备系数为 1.498，远远大于 1.000，其在正常状态下有

较高的安全裕度，边坡破坏主要是由渣土车超载引起，此边坡顶部道路 4 m 宽度范围内能承受的极限均布荷载为 155 kPa；②下部浆砌石挡土墙在正常状态下能承受上部的土压力而保持边坡的稳定，但在超载状态下挡土墙墙体的抗剪能力明显不足；③边坡体的破坏表现为土体的剪切破坏+挡土墙的剪断破坏。

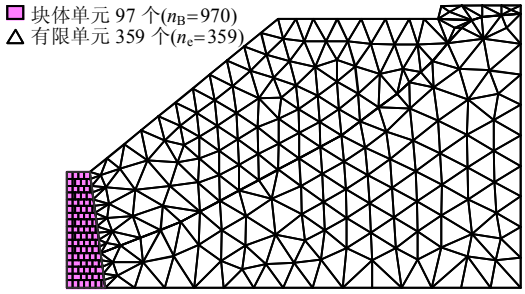


图 21 算例 3 混合离散单元示意图

Fig.21 Mixed numerical discretisation of example 3

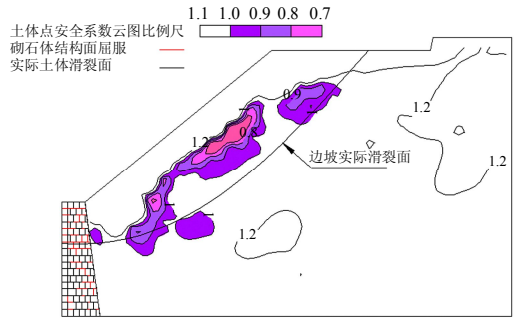


图 22 算例 3 砌石体结构面屈服和土体点安全系数分布

Fig.22 Distribution of yield interfaces of masonry and point safety factor of soil for example 3

6 结 语

以砌石挡土墙边坡为研究对象，提出了一种基于混合数值离散的边坡极限承载力计算的下限法。该方法适用于砌石挡土墙墙体和墙后土体同时发生剪切破坏的极限承载力分析，该方法的最大优势在于：既可以模拟砌石体的非连续介质力学特性，又可以模拟土体的连续介质力学特性，可获得边坡的极限荷载或安全系数的下限解，以及对应的应力场。本文方法求解精度、计算效率均较高。本文的研究工作是混合离散思想在极限分析下限法中的一次有益尝试。

参 考 文 献

[1] 赵晓. 三峡上游隔流堤引航道段浆砌石挡墙设计[J]. 人民长江, 2003, 34(9): 0－31.
ZHAO Xiao. Design research on masonry retaining wall of upstream separation levee in approaching channel of the Three Gorges Project[J]. **Yangtze River**, 2003, 34(9): 0－31.

[2] 柴振岭, 郭子雄, 胡奕东. 干砌甩浆砌石墙通缝抗剪强度试验研究[C]//建筑结构学报创刊 30 周年纪念暨建筑结构基础理论与创新学术研讨会. [出版地不祥]: [出版者不祥], 2010.
CHAI Zhen-ling, GUO Zi-xiong, HU-yidong, et al. Experimental study on shear strength of mortar joint of dry-laid stone masonry walls[C]//30th Anniversary Commemoration of the Journal of Architectural Structure and the Academic Symposium on the Basic Theory and Innovation of Architectural Structure. [S. l.]: [s. n.], 2010.

[3] 郭子雄, 柴振岭, 胡奕东, 等. 条石砌筑石墙抗震性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2011, 32(3): 57－63.
GUO Zi-xiong, CHAI Zhen-ling, HU Yi-dong, et al. Experimental study on seismic behavior of stone masonry wall[J]. **Journal of Building Structures**, 2011, 32(3): 57－63.

[4] 陈祖煜. 岩质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.
CHEN Zu-yu. Stability analysis of rock slopes—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005.

[5] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343－346.
ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(3): 343－346.

[6] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design[J]. **Quarterly of Applied Mathematics**, 1952, 10(2): 157－165.

[7] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite element and linear programming[J]. **International Journal Analytical Methods in Geomechanics**, 1988, 12: 61－77.

[8] LYAMIN A V, SLOAN S W. A comparison of linear and nonlinear programming formulations for lower bound limit analysis[C]//Proc, 6th Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Rotterdam: A. A. Balkema, 1997: 367－373.

[9] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的运用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 84－89.
LI Guo-ying, SHEN Zhu-jiang. Lower bound limit analysis using finite element and its application in soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1997, 19(5): 84－89.

下转第 1129 页