

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.2257

基于多源试验数据空间变异土体参数 概率反演及边坡可靠度更新

蒋水华¹, 魏博文¹, 张文举², 江先河³, 黄劲松¹

(1. 南昌大学 建筑工程学院, 江西 南昌 330031; 2. 湖南澧水流域水利水电开发有限责任公司, 湖南 长沙 410014;
3. 江西水利职业学院, 江西 南昌 330013)

摘 要: 岩土工程现场勘察试验通常只能获得有限的试验数据, 据此难以真实地量化土体参数的空间变异性。提出了考虑土体参数空间变异性的概率反演和边坡可靠度更新方法, 基于室内和现场两种不同来源的试验数据概率反演空间变异参数统计特征和更新边坡可靠度水平, 并给出了计算流程。此外为合理地描述土体参数先验信息, 发展了不排水抗剪强度非平稳随机场模型。最后通过不排水饱和黏土边坡算例验证了提出方法的有效性, 并探讨了试验数据和钻孔位置对边坡后验失效概率的影响。结果表明: 提出方法实现了空间变异土体参数概率反演与边坡可靠度更新的一体化, 基于有限的多源试验数据概率反演得到的土体参数均值与试验数据非常吻合, 明显降低了对参数不确定性的估计, 更新的边坡可靠度水平显著增加。受土体参数空间自相关性的影响, 试验数据对钻孔取样点附近区域土体参数统计特征更新的影响明显大于距离取样点较远区域。

关 键 词: 边坡可靠度; 空间变异性; 非平稳随机场; 概率反演; 贝叶斯更新

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)05-1491-09

Probabilistic back analysis of spatially varying soil properties and reliability updating of slopes with multiple sources of test data

JIANG Shui-hua¹, WEI Bo-wen¹, ZHANG Wen-ju², JIANG Xian-he³, HUANG Jin-song¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Nanchang University, Nanchang, Jiangxi 330031, China;

2. Hunan Lishui Hydro & Power Co., Ltd., Changsha, Hunan 410014, China; 3. Jiangxi Water Resources Institute, Nanchang, Jiangxi 330013, China)

Abstract: In general, limited test data can be collected from geotechnical site investigation. However, it is typically difficult to accurately characterize the spatial variation in soil properties with limited test data. This paper aims to propose a probabilistic back analysis and reliability updating approach considering the spatial variability of soil properties. With this approach, multiple sources of test data including laboratory and in situ test data can be utilized to rationally back analyze the spatially varying soil properties and update the slope reliability. The implementation procedures of the proposed approach are presented step by step. In addition, a non-stationary random field model of undrained shear strength is developed for proper characterization of the prior information of soil property. Finally, a clay slope under undrained conditions is investigated to demonstrate the effectiveness of the proposed approach. The influences of the test data and borehole location on the posterior probability of slope failure are also addressed. The results indicate that the proposed approach can effectively back analyze the spatially varying soil properties and update the slope reliability. By incorporating multiple sources of test data into the Bayesian analysis, the estimated means of soil parameters are consistent with the test data. The uncertainties of soil parameters are greatly reduced and the slope reliability is significantly improved. Due to spatial variation, test data has a stronger effect on the updating of soil parameter statistics with short distances to the borehole locations of measurement, compared with soil parameter statistics with long distances to the borehole locations.

Keywords: slope reliability; spatial variability; non-stationary random field; probabilistic back analysis; Bayesian updating

收稿日期: 2016-09-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 51509125, No. 51679117, No. U1765207); 江西省水利科技计划项目(No. KT201534); 江西省自然科学基金项目(No. 20171BAB206058)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51509125, 51679117, U1765207), the Science and Technology Project of Jiangxi Provincial Department of Water Resources (KT201534) and the Jiangxi Provincial Natural Science Foundation (20171BAB206058).

第一作者简介: 蒋水华, 男, 1987 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程可靠度与风险分析方面的研究工作。E-mail: sjiangaa@ncu.edu.cn

1 引言

岩土工程中存在多种不确定性因素,如岩土体参数固有的空间变异性、测量不确定性、转换和模型不确定性等^[1-4],边坡可靠度分析因能够定量客观地考虑这些不确定性因素对边坡稳定性的影响,近年来在岩土工程领域备受关注^[5-6]。研究表明,边坡失效概率与岩土体参数统计特征(如均值、标准差、分布类型、相关函数和波动范围等)密切相关^[5-6],为提高边坡稳定可靠度评价的真实性和准确度,通常需要基于现场勘察试验获取的室内与现场试验数据、监测和观测资料等场地信息提前计算参数统计特征。然而,受岩土工程勘察费用和采样场地等内在和外因素的限制,大多数情况下只能获得十分有限的室内或现场试验数据等场地信息^[2, 4, 7-8]。基于有限的场地信息一般难以准确地计算得到某特定场地岩土体参数统计特征和真实地量化参数不确定性,特别是当需要客观描述土体参数固有的空间变异性时。

贝叶斯分析方法能够将岩土体参数先验信息和有限的场地信息有机结合,为概率反演岩土体参数统计特征提供了一条有效的途径^[9-14],目前在概率反演边坡抗剪强度参数和渗透系数等方面得到了广泛应用。如 Zhang 等^[9]基于最大后验估计方法分别概率反演香港石硤尾失稳切坡和芝加哥国会街失稳切坡的抗剪强度参数与孔隙水压力系数。Zhang 等^[10]基于马尔可夫链蒙特卡洛模拟(MCMCS)方法更新土体参数统计特征,然后基于更新的土体参数统计信息重新评价边坡稳定可靠度。Wang 等^[11]分别基于最大似然估计和 MCMCS 方法概率反演台湾基隆高速公路第三车道滑坡抗剪强度参数和锚固力参数。Ering 等^[12]采用最大后验估计方法概率反演降雨诱发的印度 Malin 滑坡体抗剪强度参数和渗透参数。可见目前国内外在岩土体参数概率反演和边坡可靠度更新研究方面取得了一定的进展,但仍然存在以下不足:①上述研究描述岩土体参数不确定性时均没有考虑参数固有的空间变异性的影响,这是因为考虑岩土体参数空间变异性的概率反演问题是一个高维贝叶斯更新问题,传统的贝叶斯分析方法如最大后验估计和 MCMCS 方法等均难以有效地解决这一难题^[13-15]。②岩土体参数先验信息对参数概率反演和边坡可靠度更新具有一定的影响^[7],但上述研究对于岩土体参数先验信息的表征均没有考虑土体参数沿埋深逐渐增加的特性。③对同一岩土场地通常不仅可以获得现场勘察试验数据而且还

可以从基于现场取样的室内试验中获得相应的室内试验数据^[4, 8],这些宝贵的试验数据对了解地层信息和边坡安全水平均非常重要,然而目前关于同时融合室内和现场等多源试验数据的参数概率反演和边坡可靠度更新研究较少。

针对以上问题,本文在 Straub 等^[13]于 2015 年提出的 BUS 方法(Bayesian updating with structural methods)基础上,提出了考虑土体参数空间变异性的概率反演及边坡可靠度更新方法,不仅能够有效解决高维边坡可靠度更新难题,而且可以融合某岩土场地的室内和现场多源试验数据概率反演参数统计特征及更新边坡可靠度。同时为了合理模拟土体不排水抗剪强度随埋深增加的特性,发展了一个有效的非平稳随机场模型,最后通过一不排水饱和黏土边坡算例验证了提出方法的有效性。

2 土体参数非平稳随机场模拟

不同埋深处的土体由于受到不同沉积、后沉积、化学风化与搬运作用和荷载历史等因素的影响,导致土体特性参数不仅呈现一定的空间变异性,而且还呈现出明显的非平稳分布特征^[1-2]。如不排水抗剪强度的均值和标准差存在随埋深逐渐增加的变化趋势已是不争的事实^[16-17]。本文以不排水抗剪强度为例,发展了如下非平稳随机场模型用于表征不排水抗剪强度沿埋深逐渐增加的特性。对于超固结土,不排水抗剪强度通常由某一初始值沿埋深逐渐增加,对应的非平稳随机场模型为

$$s_u(q) = s_{u0} + b\sigma'_v \exp[w(q)] = s_{u0} + b\gamma z \exp[w(q)] \quad (1)$$

式中: $q=(x, z)$ 为二维空间内的任意点坐标; z 为土体埋深,文中将边坡表面作为 z 的起算点; s_{u0} 为边坡表面处的不排水抗剪强度; b 为不排水抗剪强度随埋深的增加速率,也是 $s_u(q)$ 的趋势分量 s_u/σ'_v 的参数; σ'_v 为垂直有效应力, $\sigma'_v = \gamma z$, γ 为土体重度; $w(q)$ 为 $s_u(q)$ 的随机波动分量。由于受地面降雨、风化、植被蒸腾和交通等因素的影响,导致 s_{u0} 存在一定的不确定性^[17]。另外受样本量大小的影响, b 也具有一定的不确定性^[6]。为避免土体参数取值出现负值,均采用对数正态随机变量模拟 s_{u0} 和 b 的不确定性。

通常将 $w(q)$ 模拟为均值为 $\mu_w = 0$ 和标准差为 σ_w 的正态平稳随机场^[2],为有效离散二维各向异性平稳随机场 $w(q)$,本文采用计算较为简便的基于乔列斯基分解的中点法^[5]。当获得正态平稳随机场

$w(q)$ 的实现值之后, 根据式 (1) 便可得到对数正态非平稳随机场 $s_u(q)$ 的实现值。综上, 非平稳随机场 $s_u(q)$ 需离散为 $N = n + 2$ 个随机变量, 其中 n 为平稳随机场 $w(q)$ 离散所需的随机变量数目。在此基础上, 忽略参数 s_{u0} 、 b 和 $w(q)$ 之间的相关性, 根据式 (1) 还可推导出 $s_u(q)$ 沿埋深方向的均值和标准差分别为

$$\left. \begin{aligned} \mu_{s_u}(z) &= \mu_{s_{u0}} + \gamma z \mu_b \\ \sigma_{s_u}(z) &= \sqrt{\sigma_{s_{u0}}^2 + \gamma^2 z^2 \left\{ (\mu_b^2 + \sigma_b^2) [\exp(\sigma_w^2) - 1] + \sigma_b^2 \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\mu_{s_{u0}}$ 和 $\sigma_{s_{u0}}$ 分别为 s_{u0} 的均值和标准差; μ_b 和 σ_b 分别为 b 的均值和标准差; μ_w 和 σ_w 分别为 $w(q)$ 的均值和标准差。可见该非平稳随机场模型不仅可以分别模拟 $s_u(q)$ 趋势分量 b 和随机波动分量 $w(q)$ 的不确定性, 而且能够较好地考虑 $s_u(q)$ 的均值和标准差随土体埋深增加而增大的特性。

3 考虑参数空间变异性概率反演及边坡可靠度更新方法

本文将根据某特定场地的室内与现场试验数据、监测或观测资料等场地信息概率反演空间变异土体参数的统计特征。场地信息对空间变异参数概率分布的影响, 可以通过贝叶斯分析估计空间变异参数 \mathbf{X} 的后验概率密度函数 $f_X''(\mathbf{X})$ 来体现, 根据贝叶斯理论, $f_X''(\mathbf{X})$ 的计算表达式为^[9-14]

$$f_X''(\mathbf{X}) = aL(\mathbf{X})f_X'(\mathbf{X}) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ 为随机向量, N 为总的随机变量数目; $f_X'(\mathbf{X})$ 表示土体参数先验概率密度函数; a 为比例常数, 为保证在 \mathbf{X} 的整个区域上对 $f_X''(\mathbf{X})$ 的积分为 1.0; $L(\mathbf{X})$ 为似然函数, 与试验数据等场地信息类型有关, 表示在已知土体参数 $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ 前提下场地信息事件 Z 发生的概率^[9-14]。如果先验概率密度函数和似然函数是一对共轭函数, 则式 (3) 便有解析解, 然而这仅仅对于为数不多的几对共轭函数才有效, 绝大多数情况下需要对式 (3) 进行数值求解^[9-14]。Straub 等^[13]于 2015 年提出的 BUS 方法可以有效计算高维 $f_X''(\mathbf{X})$ 数值解。该方法基于似然函数定义一个新的失效区域来建立贝叶斯更新和结构可靠度分析之间的桥梁, 将复杂的贝叶斯更新问题转换为一个典型的结构可靠度问题, 然后结合子集模拟方法^[18-19]求解该结构可靠度问题。本文在原始 BUS 方法的基础上, 有效考虑土体参数固有的空间变异性对参数概率反演和边坡可靠度更

新的影响。

3.1 空间变异土体参数概率反演

为建立贝叶斯更新和结构可靠度分析之间的桥梁, BUS 方法基于似然函数及一个与似然函数有关的参数 c , 定义一个新的失效区域 Ω_X ^[13]

$$\Omega_X = \{H(\mathbf{X}_+) \leq 0\} \quad (4)$$

式中: $H(\mathbf{X}_+)$ 为功能函数, 定义为

$$H(\mathbf{X}_+) = \Phi^{-1}(p) - \Phi^{-1}[cL(\mathbf{X})] \quad (5)$$

式中: p 为 $[0, 1]$ 区间均匀分布随机变量, 进而定义扩展随机向量 $\mathbf{X}_+ = [p, \mathbf{X}]^T$ 。对于任意空间变异土体参数 \mathbf{X} , 参数 c 总需满足 $cL(\mathbf{X}) \leq 1.0$ ^[13]。据此, 对空间变异参数的概率反演便转换为对功能函数为 $H(\mathbf{X}_+)$ 的高维结构可靠度问题的求解, 即计算场地信息事件 Z 发生的概率 $P(Z)$, 其中 $Z = \{\mathbf{X}_+ \in \Omega_X\}$ 。不难发现求解该结构可靠度问题获得的失效样本, 恰好就是服从土体参数后验概率分布 $f_X''(\mathbf{X})$ 的样本。根据这些失效样本, 采用传统的概率统计方法便可得到空间变异参数的后验统计特征 (均值、标准差和概率分布等)。下面将 Ω_X 视作目标失效区域进行第一轮子集模拟计算场地信息事件 Z 发生的小概率 $P(Z)$, 将 $P(Z)$ 表达为一系列较大的中间事件条件概率的乘积:

$$P(Z) = P[H(\mathbf{X}_+) \leq 0] = P(Z_1) \prod_{i=2}^m P(Z_i | Z_{i-1}) \quad (6)$$

式中: 中间事件 $Z_i = \{H(\mathbf{X}_+) < g_i\}$, g_i 为失效临界阈值, $i = 1, 2, \dots, m$; $P(Z_1)$ 为 Z_1 的发生概率; $P(Z_i | Z_{i-1})$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ 为在 Z_{i-1} 发生的条件下 Z_i 发生的概率, 其中 m 为第一轮子集模拟为达到失效区域 Ω_X 所需的模拟层数。类似于常规子集模拟计算^[18-19], BUS 方法关键也在于产生中间事件条件样本, 并估计它们对应的条件概率, 逐步逼近于目标失效区域 Ω_X 。本文采用 Papaioannou 等^[19]提出的条件抽样技术, 通过构建当前样本和候选样本间的联合正态分布产生条件样本, 相比于常用的 MCMCS 方法, 该技术更为简便且无需预先定义 “proposal” 分布。然后对条件样本进行统计分析, 确定失效事件 Z_1, Z_2, \dots, Z_m 及其对应的临界阈值 g_1, g_2, \dots, g_{m-1} , 使得 $P(Z_1)$ 和 $P(Z_i | Z_{i-1})$, $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ 均等于条件概率 p_0 , 并满足 $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_{m-1} \supset Z_m$ 和 $g_1 > g_2 > \dots > g_{m-1} > g_m = 0$ 。

相比于子集模拟方法, BUS 方法的另一个关键问题是需要根据似然函数确定式 (5) 中的参数 c 值。大多数情况下, c 值不能解析计算^[13]。由式 (5)

可知, c 值越大, 失效区域 Ω_X 越大, $P(Z)$ 值便越大, 进而子集模拟的计算效率越高。因此, 在满足 $cL(X) \leq 1.0$ 前提下, 所选取的 c 值越大越好。本文根据文献[20], 在子集模拟计算过程中自适应地确定参数 c 值, 其中第 i 层子集模拟中 c_i 值的计算表达式为

$$c_i = \frac{1}{\max_{k=1,2,\dots,N_1} L(X_{i,k})} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (7)$$

式中: N_1 为子集模拟每层样本数目。为了保证子集模拟中间事件 Z_m 被完全包含在事件 Z_{m-1} 中, 要求基于每层子集模拟获得的 c 值满足以下条件^[20]: $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_m$ 。此外为方便数值计算, BUS 方法一般建议在独立标准正态空间中执行, 式(5)中的均匀分布随机变量 p 及土体参数随机场 \mathbf{X} 均可表示为独立标准正态随机变量的函数关系。

3.2 边坡可靠度更新

融合某一特定场地的室内与现场试验数据、监测或观测资料等场地信息, 除了可以概率反演空间变异参数统计特征, 而且可以更新边坡可靠度计算后验失效概率 $P(F|Z)$, $P(F|Z)$ 可表示为联合事件概率 $P(F \cap Z)$ 与场地信息事件发生概率 $P(Z)$ 的比值。理论上讲, 可以采用蒙特卡洛模拟 (MCS) 或者子集模拟方法分别将 $F \cap Z$ 和 Z 视作目标失效区域计算 $P(F \cap Z)$ 和 $P(Z)$, 然后相除得到 $P(F|Z)$ ^[21]。然而, $P(F \cap Z)$ 数值通常非常小, 一般需要进行大量的确定性边坡稳定性分析, 计算量非常可观。为提高计算效率, 本文根据文献[14], 在估计土体参数后验统计特征的子集模拟基础上, 将边坡失稳区域 F 视为目标失效区域进行新一轮的子集模拟, 这样 $P(F|Z)$ 的计算表达式为

$$P(F|Z) = \frac{P\left(\bigcap_{i=0}^M F_i^*\right)}{P(Z)} = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^M F_i^* | F_0^*\right) P(F_0^*)}{P(Z)} = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^M F_i^* | F_0^*\right)}{P(Z)} \quad (8)$$

式中: F 为边坡失效事件, 定义为 $\{G(\mathbf{X}) = FS_{\min}(\mathbf{X}) - 1.0 < 0\}$, 其中 $G(\cdot)$ 和 $FS_{\min}(\cdot)$ 分别为边坡功能函数和安全系数; M 为新一轮子集模拟为达到边坡失效区域 F 所需的模拟层数; $F_0^* = F_0 \cap Z = Z$ 和 $F_i^* = F_i \cap Z$, $i=1, L, M$, 为中间失效事件, 其中 $F_i = \{G(\mathbf{X}) < f_i\}$, f_i 是临界阈值。类似地, 依次确定失效事件 $F_1^*, F_2^*, \dots, F_M^*$ 及其对应的临界阈值 f_1, f_2, \dots, f_{M-1} , 使得 $P(F_i^* | F_{i-1}^*)$, $i=1, 2, \dots, M-1$, 均等于条件概率 p_0 , 并也满足如下关系: $F_1^* \supset F_2^* \supset \dots \supset F_{M-1}^* \supset F_M^*$ 和 $f_1 > f_2 > \dots$

$> f_{M-1} > f_M = 0$ 。

3.3 计算流程

综上, 考虑参数空间变异性的概率反演及边坡可靠度更新方法计算流程如下:

(1) 统计并输入非平稳随机场模型参数的先验统计特征(均值、标准差、分布类型和波动范围等), 建立边坡稳定性模型, 划分随机场单元网格, 收集不同来源的试验数据等场地信息并建立对应的似然函数。

(2) 在第 1 层产生 N_1 组 $(N+1)$ 维独立标准正态 MCS 随机样本, 利用第 2 节方法模拟 N_1 组非平稳随机场实现值 \mathbf{X} , 计算对应的 N_1 个似然函数 $L(\mathbf{X})$ 值, 并根据式(7)得到 c_1 值。然后根据式(5)计算 N_1 个功能函数 $H(\mathbf{X}_+)$ 值, 并将 N_1 个 $H(\mathbf{X}_+)$ 值按照升序排列, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $H(\mathbf{X}_+)$ 值为阈值 g_1 , 这样有 $P(Z_1) = P\{H(\mathbf{X}_+) < g_1\}$ 等于条件概率 p_0 。

(3) 将上一步中 $H(\mathbf{X}_+)$ 值小于 g_1 的 $p_0 N_1$ 组样本视为种子样本, 采用条件抽样技术^[19]产生 $(1-p_0)N_1$ 组条件样本。再根据第 2 节方法模拟对应的 $(1-p_0)N_1$ 组非平稳随机场实现值 \mathbf{X} , 并连同从上一步中提取的 $p_0 N_1$ 组种子样本一起, 重新计算 N_1 个 $L(\mathbf{X})$ 值和参数 c_2 。进而得到 N_1 个新的 $H(\mathbf{X}_+)$ 值并按升序排列, 显然这 N_1 个 $H(\mathbf{X}_+)$ 值均小于 g_1 。类似地, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $H(\mathbf{X}_+)$ 值为阈值 g_2 , 有 $P(Z_2|Z_1) = P\{H(\mathbf{X}_+) < g_2 | H(\mathbf{X}_+) < g_1\} = p_0$, 从中也可获得 $H(\mathbf{X}_+)$ 值小于 g_2 的 $p_0 N_1$ 组样本并视作种子样本。

(4) 对步骤(3)重复计算 $m-2$ 次, 依次确定参数 c_3, \dots, c_m 和阈值 g_3, \dots, g_m , 并定义失效事件 Z_3, \dots, Z_m 。随机样本抽样空间在第 m 层达到失效区域 Ω_X , 子集模拟计算终止。将位于 Z_m 中的 N_1 组样本对应的 $H(\mathbf{X}_+)$ 值也按升序排列, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $H(\mathbf{X}_+)$ 值为阈值 g_m , 与前 $m-1$ 个阈值均大于 0 不同, 此时有 $g_m = 0$ 。统计第 m 层中 $H(\mathbf{X}_+) \leq 0$ 的失效样本数目, 计为 N_f , 显然 $N_f \geq p_0 N_1$, 接着计算 $P(Z) = p_0^{m-1} N_f / N_1$ 。

(5) 为准确估计空间变异参数后验统计特征, 再次将从第 m 层中获得的 N_f 组失效样本作为种子样本, 采用条件抽样技术^[19]产生更多的 N_1 组失效样本, 并基于这 N_1 组失效样本估计空间变异参数后验统计特征。

(6) 将从第(5)步中获得的 N_1 组失效样本作为种子样本, 以 F 为目标失效区域进行新一轮子集模拟, 同样根据第 2 节方法模拟 N_1 组非平稳随机场

实现值 \mathbf{X} , 并进行边坡稳定性分析计算 N_1 个功能函数 $G(\mathbf{X})$ 值, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $G(\mathbf{X})$ 值为阈值 f_1 , 这样有 $P(F_1^* | F_0^*) = P[G(\mathbf{X}) < f_1 | H(\mathbf{X}_+) \leq 0]$ 等于条件概率 p_0 。从中将 $G(\mathbf{X})$ 值小于 f_1 对应的 $p_0 N_1$ 组样本视为种子样本, 采用条件抽样技术^[19]产生 $(1 - p_0)N_1$ 组条件样本, 此处需要注意的是, 必须确保新产生的任意一组条件样本均位于失效区域 Ω_X 内。再对条件样本进行边坡稳定性分析, 总共可获得 N_1 个新的 $G(\mathbf{X})$ 值并按升序排列, 显然它们均小于 f_1 。类似地, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $G(\mathbf{X})$ 值为阈值 f_2 , 有 $P(F_2^* | F_1^*) = P[G(\mathbf{X}) < f_2 | G(\mathbf{X}) \leq f_1] = p_0$, 从中提取 $G(\mathbf{X})$ 值小于 f_2 的 $p_0 N_1$ 组样本并视作种子样本。

(7) 对步骤(6)重复计算 $M - 2$ 次, 依次可确定阈值 f_3, \dots, f_M , 并定义失效事件 F_3^*, \dots, F_M^* 。当随机样本抽样空间在第 M 层达到边坡失效区域 F , 新一轮的子集模拟计算终止。将位于 F_M^* 中的 N_1 组样本对应的 $G(\mathbf{X})$ 值也按升序排列, 取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $G(\mathbf{X})$ 值为阈值 f_M , 与前 $M - 1$ 个阈值均大于 0 不同, 此时有 $f_M = 0$ 。统计第 M 层中 $G(\mathbf{X}) < 0$ 的失效样本数目, 计为 N_F , 显然 $N_F \geq p_0 N_1$, 并计算 $P(F|Z) = p_0^{M-1} N_F / N_1$ 。

因篇幅有限, 上述提出方法计算步骤的介绍仅以基于单源试验数据的参数概率反演和边坡可靠度更新为例, 然而提出方法还可以针对不同来源的试验数据建立对应的似然函数及功能函数, 并利用子集模拟在可靠度计算中获得的失效样本建立基于不同来源的试验数据可靠度分析之间的联系。即每增加一种不同来源的试验数据, 只需要建立一个新的似然函数 $L(\mathbf{X})$ 及对应的失效区域和功能函数 $H(\mathbf{X}_+)$, 然后在边坡后验失效概率计算之前, 即上面第(5)和第(6)步之间增加新一轮子集模拟计算。据此, 提出方法可以直接拓展到基于多源试验数据的空间变异参数概率反演和边坡可靠度更新。

4 不排水饱和黏土边坡

下面以一个不排水饱和黏土边坡为例来验证提出方法的有效性, 边坡计算模型如图1所示, 坡高为 9 m, 坡度为 1:3。采用第2节发展的二维各向异性非平稳随机场模型表征不排水抗剪强度 s_u 的空间变异性, 土体重度 $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$ 视为确定值。

4.1 土体参数先验信息

土体参数先验信息对边坡可靠度更新具有一定的影响^[7], 本节主要讨论式(1)不排水抗剪强度非平稳随机场模型的参数取值问题。首先根据文献

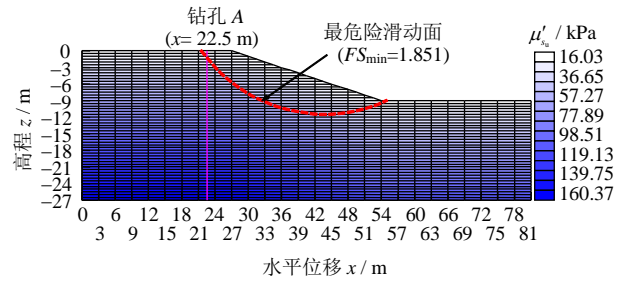


图1 随机场单元网格及边坡稳定性分析结果

Fig.1 Random field mesh and slope stability analysis results

[22], 软、硬和很硬塑性无机黏土层的不固结黏聚力的变化范围分别为 10~20 kPa、20~50 kPa 和 50~100 kPa, 本文以软塑性无机黏土层为例, 采用对数正态随机变量模拟 s_{u0} 的不确定性, 并将对应的下限和上限值 10 和 20 kPa 分别取作 s_{u0} 的 10% 和 90% 分位数, 据此可得到 s_{u0} 的先验均值 $\mu'_{s_{u0}}$ 和标准差 $\sigma'_{s_{u0}}$ 分别为 14.669 kPa 和 4.041 kPa。根据文献[23]中关于趋势分量 s_u / σ'_v 取值范围的统计结果, 将 0.1 和 0.5 分别取作参数 b 的 10% 和 90% 分位数, 同样采用对数正态随机变量模拟 b 的不确定性, 据此可得 b 的先验均值 μ'_b 和标准差 σ'_b 分别为 0.272 和 0.189, 与文献[7]统计的 s_u / σ'_v 均值和标准差的变化范围 [0.23, 1.4] 和 [0.01, 1.26] 完全吻合。

接着, 采用先验均值 $\mu'_w = 0$ 和标准差 $\sigma'_w = \sqrt{\ln(\delta^2 + 1)} \approx \delta$ 的正态平稳随机场模拟随机波动分量 $w(q)$ 的不确定性, 其中 δ 为 s_u / σ'_v 的变异系数, 即不排水抗剪强度去趋势分量后固有的变异性。由文献[2-3]可知, 由室内不固结不排水三轴压缩试验 (UU) 获得的 s_u 的变异系数 δ 的变化范围为 10%~30%, 由现场十字板剪切试验 (VST) 获得的 s_u 的变异系数 δ 的变化范围为 4%~44%, 均值为 24%, 本例取 $\sigma'_w \approx \delta = 24\%$ 。另外采用二维可分离的指数型自相关函数模拟 $w(q)$ 的空间自相关性。根据文献[2]中对 s_u 典型波动范围的总结, 本文水平和垂直波动范围分别取 $\delta_h = 38 \text{ m}$ 和 $\delta_v = 3.8 \text{ m}$ 。

最后, 将边坡区域共划分为 1 224 个水平和垂直尺寸分别为 $l_x = 3.0 \text{ m}$ 和 $l_y = 0.5 \text{ m}$ 的四边形和三角形混合随机场单元, 随机场单元网格如图1所示。随机场单元水平和垂直尺寸与水平和垂直波动范围的比值分别为 $l_x / \delta_h = 3.0 / 38 = 0.08$ 和 $l_y / \delta_v = 0.5 / 3.8 = 0.13$, 这与文献[24]的建议吻合, 即每个方向上随机场单元尺寸不可超过对应波动范围的 0.25 倍, 表明所选择的随机场单元尺寸可以满足计算精度要求。

4.2 试验数据及似然函数

本文以文献[4]收集的台湾某黏土地的不排水抗剪强度 s_u 的室内 UU 和现场 VST 试验数据为例, 采用提出方法概率反演空间变异参数统计特征并更新边坡可靠度。图 2 给出了 UU 和 VST 试验数据随土体埋深的变化关系曲线, 可见试验数据数值大小随埋深总体上呈现增加的趋势。需要说明的是, 为确保基于 UU 和 VST 试验数据反演得到的空间变异参数统计特征及可靠度更新结果适用于图 1 边坡模型, 假定图 1 边坡模型是在台湾某黏土地地上开挖得到。岩土工程实际中为揭示边坡稳定性状况, 通常是首先已知某特定场地的边坡模型, 然后开展相关现场和室内试验, 再根据试验结果来反演空间变异参数统计特征进而更新边坡可靠度评价。

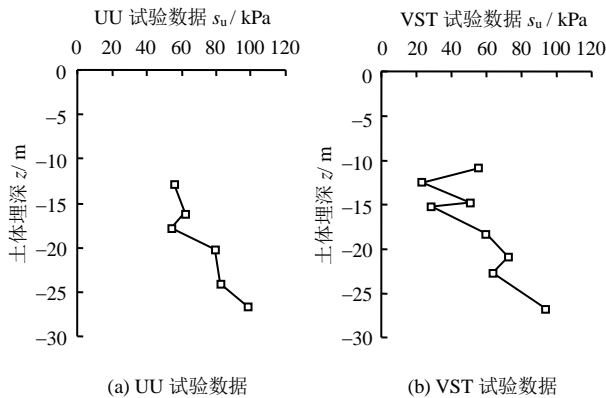


图 2 不排水抗剪强度 UU 和 VST 试验数据^[4]

Fig.2 UU and VST test data of undrained shear strength^[4]

根据文献[13–14], 通过室内试验如 UU 试验获得的空间某一位置 q_i^m 处的不排水抗剪强度试验数据 s_u^m 与测量误差 ε_{mi} 之间存在一定的乘法关系:

$$s_u^m = s_u(q_i^m)\varepsilon_{mi} \quad (i=1, 2, \dots, n_d) \quad (9)$$

式中: n_d 为室内试验样本数目; $q_i^m = (x_i^m, z_i^m)$ 为二维空间区域 Ω 内某钻孔的第 i 个取样点; $s_u(q_i^m)$ 为不排水抗剪强度参数随机场在 q_i^m 处的实现值。一般来说, 因试验装置与仪器问题以及人为操作不当造成的不同试验的测量误差 ε_{mi} 之间相互独立^[6], 并根据式 (9) 可假设 ε_{mi} 服从中位数为 1, 标准差为某一常数的对数正态分布。由此可基于 n_d 组室内 UU 试验数据建立贝叶斯分析所需的似然函数为

$$L(X) = k_1 \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{n_d} \frac{[\ln s_u^m - \ln s_u(q_i^m)]^2}{2\sigma_{\ln \varepsilon_m}^2} \right\} \quad (10)$$

式中: $k_1 = \left[(2\pi)^{n_d/2} \sigma_{\ln \varepsilon_m}^{n_d} \right]^{-1}$ 为比例常数; $\sigma_{\ln \varepsilon_m}$ 为 $\ln \varepsilon_{mi}$ 的标准差, 计算表达式为

$$\sigma_{\ln \varepsilon_m} = \sqrt{\ln(1 + COV_{\varepsilon_m}^2)} \quad (11)$$

式中: COV_{ε_m} 为测量误差 ε_{mi} 的变异系数。由文献[3]可知, 对于室内 UU 试验, COV_{ε_m} 的变化范围为 [0.05, 0.15], 本例取 $COV_{\varepsilon_m} = 0.05$ 。

相比于室内试验, 通过现场试验如 VST 试验获得的空间某一位置 q_i^m 处的 s_u^m 与因测量和转换不确定性导致的总误差 ε_i ^[3] 之间也存在一定的乘法关系:

$$s_u^m = s_u(q_i^m)\varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n_d) \quad (12)$$

并根据一阶近似, 将每个试验点处的总误差 ε_i 的自然对数可近似表示为测量误差 ε_{mi} 和转换误差 ε_{ui} 自然对数的线性关系,

$$\ln \varepsilon_i = \ln \varepsilon_{mi} + \ln \varepsilon_{ui} \quad (i=1, 2, \dots, n_d) \quad (13)$$

由于同一土层不同试验点处的转换误差 ε_{ui} 完全相关^[8], 同一试验点处的测量误差 ε_{mi} 与转换误差 ε_{ui} 之间通常相互独立, 由此可推导出不同试验点处的总误差 ε_i 之间存在一定的相关性。根据式 (13), 可推导某钻孔的任意两个取样点 q_i^m 和 q_j^m 处的 $\ln \varepsilon_i$ 和 $\ln \varepsilon_j$ 之间的相关系数 $(\rho_{\ln \varepsilon})_{i,j}$ 为

$$(\rho_{\ln \varepsilon})_{i,j} = \frac{\ln(COV_{\varepsilon_i}^2 + 1)}{\ln(COV_{\varepsilon_m}^2 + 1) + \ln(COV_{\varepsilon_i}^2 + 1)} \quad (14)$$

式中: COV_{ε_i} 为转换误差的变异系数。由文献[3]可知, 对于现场 VST 试验, COV_{ε_m} 和 COV_{ε_i} 的变化范围分别为 [0.1, 0.2] 和 [0.075, 0.15], 本例取 $COV_{\varepsilon_m} = 0.1$ 和 $COV_{\varepsilon_i} = 0.075$ 。同样根据式 (12) 可假设 ε_i 服从中位数为 1, 标准差为某一常数的对数正态分布, 相应的 $\ln \varepsilon_i$ 服从均值为 $\mu_{\ln \varepsilon}$ 和标准差为 $\sigma_{\ln \varepsilon}$ 的正态分布, 其中 $\mu_{\ln \varepsilon} = 0$, 由式 (13) 可得 $\sigma_{\ln \varepsilon}$ 的计算表达式为

$$\sigma_{\ln \varepsilon} = \sqrt{\ln(1 + COV_{\varepsilon}^2)} = \sqrt{\ln(COV_{\varepsilon_m}^2 + 1) + \ln(COV_{\varepsilon_i}^2 + 1)} \quad (15)$$

基于试验误差 ε_i 的统计特征, 可建立与 n_d 组现场 VST 试验数据对应的似然函数为

$$L(X) = k_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\ln s_u^m - \ln s_u(q^m) \right]^T \cdot \Sigma^{-1} \left[\ln s_u^m - \ln s_u(q^m) \right] \right\} \quad (16)$$

式中: $k_2 = \left[(2\pi)^{n_d/2} |\Sigma|^{1/2} \right]^{-1}$ 为比例常数; $s_u^m = (s_{u_1}^m, \dots, s_{u_{n_d}}^m)^T$; $q^m = (q_1^m, q_2^m, \dots, q_{n_d}^m)^T$; Σ^{-1} 为协方差矩阵 Σ 的逆矩阵, 其中 Σ 可由某钻孔不同取样点处的方差 $\sigma_{\ln \varepsilon}^2$ 和相关系数 $(\rho_{\ln \varepsilon})_{i,j}$ 构成。

4.3 计算结果

下面首先不考虑试验数据等场地信息的影响, 直接根据第2节和第4.1节不排水抗剪强度 s_u 先验信息计算边坡安全系数和先验失效概率。根据式(2)可以得到 s_u 先验均值 μ'_{s_u} , 将其赋给边坡稳定性模型, 如图1所示, 图中颜色较深部分表示参数值较大区域, 颜色较浅部分表示参数值较小区域。在此基础上, 采用简化毕肖普法计算的最小安全系数 FS_{\min} 为1.851, 最危险滑动面如图1虚线所示, 其不受边坡边界条件的约束, 表现为沿坡趾发生浅层失稳破坏, 与实际情况吻合。此外, 根据第2节方法模拟二维非平稳随机场 $s_u(q)$ 实现值, 采用子集模拟方法计算边坡先验失效概率 $P(F)$ 。为保证计算精度, 子集模拟每层样本数目 N_1 和条件概率 p_0 分别取为2 000和0.1, 重复进行20次独立的子集模拟计算取平均值, 得到 $P(F)=9.55 \times 10^{-2}$ 。

接着在边坡表面任意选取某一钻孔位置, 以 $x=22.5$ m 为例, 钻孔A位置如图1所示, 假设通过该钻孔可获取图2(a)中的6组UU试验数据和图2(b)中的8组VST试验数据。然后分别基于UU试验数据、VST试验数据和UU与VST联合试验数据, 采用提出方法概率反演空间变异参数统计特征。为了保证计算精度, 下文子集模拟计算同样取 $N_1=2 000$ 和 $p_0=0.1$, 重复进行20次独立子集模拟计算参数后验统计特征和边坡后验失效概率 $P(F|Z)$, 再取平均值作为最终计算结果。为了说明不同试验数据对 $s_u(q)$ 均值和标准差更新的影响, 图3(a)和图3(b)分别比较了基于3种不同试验数据获得的 $s_u(q)$ 的后验均值 μ''_{s_u} 与标准差 σ''_{s_u} 沿土体埋深的变化关系, 图3中同时列入了UU与VST试验数据以及 $s_u(q)$ 的先验均值 μ'_{s_u} 与标准差 σ'_{s_u} 以用于比较。由图3(a)可知, 尽管先验均值 μ'_{s_u} 与试验数据相差较远, 但提出方法基于单源(UU或VST)试验数据概率反演得到的 μ''_{s_u} 在钻孔取样点处与其对应的试验数据吻合, 获得的 σ''_{s_u} 明显小于先验标准差 σ'_{s_u} 。相比之下, 基于UU和VST联合试验数据获得的 μ''_{s_u} 有效兼顾了UU和VST两种不同来源试验数据的影响, 并且获得的 σ''_{s_u} 显然更小。尽管只利用了6组UU和8组VST试验数据, 但概率反演得到的 $s_u(q)$ 的不确定性却明显降低, 均值与试验数据保持一致, 充分说明了本文提出方法的有效性。此外, 图4(a)和图4(b)分别给出了基于UU和VST联合试验数据概率反演得到的 μ''_{s_u} 和 σ''_{s_u} 在整个边坡剖面上的分布, 同样图中颜色较深部分表示统计参数值较大区域。由图4可知, μ''_{s_u} 和 σ''_{s_u} 不仅与先验均值和标准

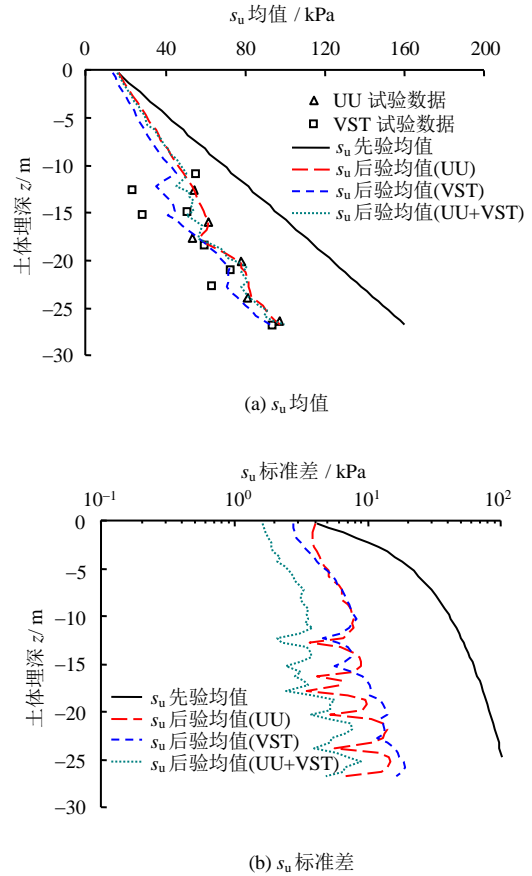


图3 不排水抗剪强度 $s_u(q)$ 后验均值和标准差的比较
Fig.3 Comparison of the posterior mean and standard deviation of undrained shear strength

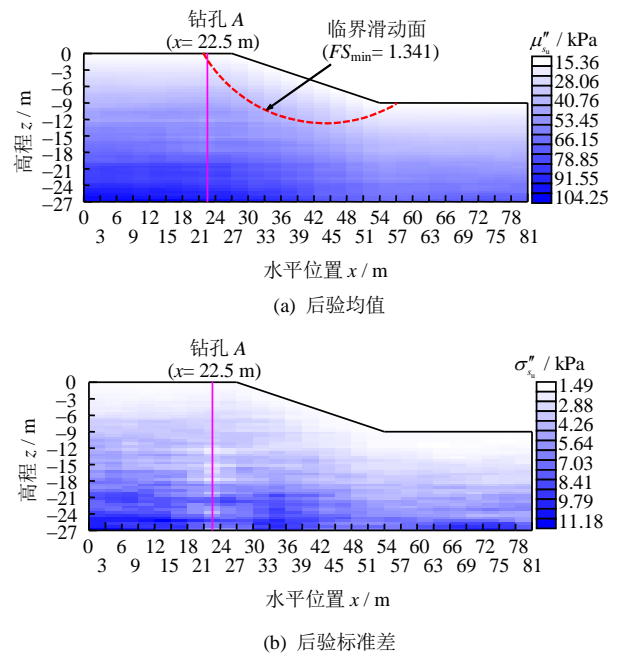


图4 基于UU和VST联合试验数据的不排水抗剪强度 $s_u(q)$ 的后验均值和标准差

Fig.4 The posterior mean and standard deviation of $s_u(q)$ updated with combined UU and VST test data

此外受土体参数空间自相关性的影响, 试验数据对

钻孔取样点附近区域参数统计特征更新的影响明显大于距离钻孔取样点较远区域。基于 μ'_{su} 采用简化毕肖普法计算的边坡安全系数为 1.341, 如图 4(a) 所示, 明显小于图 1 中由 μ'_{su} 计算的 1.851。

岩土工程地质勘察通常需要提前确定最佳的钻孔位置, 据此便可以耗费最低的勘察成本获得更有价值的试验数据。下面探讨不同试验数据和钻孔位置对边坡后验失效概率的影响, 分别基于 3 种不同试验数据采用提出方法计算了不同钻孔位置处的边坡后验失效概率 $P(F|Z)$, 如图 5 所示。图中也列入了先验失效概率 $P(F)=9.55 \times 10^{-2}$ 以用于比较。由图 5 可知, 融合试验数据更新得到的 $P(F|Z)$ 小于 $P(F)$, 并且基于 VST 试验数据得到的 $P(F|Z)$ 明显小于 UU 试验数据。主要因为贝叶斯分析充分利用了试验数据, 在较大程度上降低了对土体参数不确定性的估计, 从而提高了边坡可靠度水平。如钻孔 A 水平位置为 $x=34.5$, 基于 UU 试验数据、VST 试验数据和 UU 与 VST 联合试验数据更新得到的 $P(F|Z)$ 分别为 8.39×10^{-3} , 4.41×10^{-3} 和 1.43×10^{-4} , 均明显小于 $P(F)=9.55 \times 10^{-2}$, 最大相差近 3 个数量级。这也说明如果忽略试验数据所提供的场地信息, 直接根据边坡先验失效概率进行边坡可靠度评价, 可能会明显低估边坡可靠度水平, 造成偏保守的边坡工程设计方案。此外, 钻孔位置对边坡可靠度更新也具有明显的影响, 由图 5 可知, 当钻孔 A 水平位置位于坡面靠近坡顶区域 (如 $x=34.5$) 获得的 $P(F|Z)$ 最小, 位于坡顶左侧区域获得的 $P(F|Z)$ 其次, 位于坡趾右侧区域获得的 $P(F|Z)$ 相对最大, 由此可推导坡面靠近坡顶区域可选作该边坡现场地质勘察的最佳钻孔位置。换句话说, 从这一区域钻孔取样获得的现场或室内试验数据有助于更加客观实际地评价该边坡的稳定性状况。

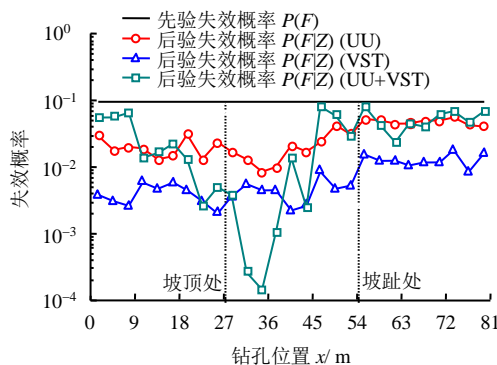


图 5 边坡后验失效概率随钻孔位置的变化关系
Fig. 5 Variation of the posterior probability of slope failure with the borehole location

5 结 论

本文提出了考虑土体参数空间变异性的概率反演和边坡可靠度更新方法, 给出了计算流程, 并发展了不排水抗剪强度非平稳随机场模型用于合理地描述土体参数先验信息。最后以不排水饱和黏土边坡为例基于多源 (UU 与 VST) 试验数据概率反演空间变异参数统计特征及更新边坡可靠度, 并探讨了不同试验数据和钻孔位置对边坡可靠度更新的影响。主要结论如下:

(1) 提出方法可以充分利用有限的多源试验数据获得服从高维后验概率分布的样本, 进而较好地概率反演空间变异参数统计特征和更新边坡可靠度水平, 为解决考虑土体参数空间变异性的多源边坡可靠度更新难题提供了一条有效的途径。

(2) 提出方法通过贝叶斯分析融合非平稳随机场模型、室内与现场多源试验数据较好地量化了不排水抗剪强度参数的真实空间变异性。尽管土体参数先验均值与试验数据相差较远, 但获得的后验均值与试验数据非常吻合, 后验标准差远小于先验标准差, 明显降低了对参数不确定性的估计。受土体参数空间自相关性的影响, 试验数据对钻孔取样点附近区域土体参数统计特征更新的影响更加明显。

(3) 试验数据和钻孔位置对边坡后验失效概率均具有重要的影响, 根据边坡后验失效概率随钻孔位置的变化关系可推断文中边坡算例最佳钻孔位置位于坡面靠近坡顶区域。此外, 如果忽略试验数据提供的场地信息直接根据先验失效概率进行边坡可靠度评价, 会明显低估边坡可靠度水平, 造成偏保守的边坡工程设计方案。

参 考 文 献

- [1] 张继周, 缪林昌, 王华敬. 土性参数不确定性描述方法的探讨[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(12): 1936—1940.
ZHANG Ji-zhou, MIAO Lin-chang, WANG Hua-jing. Methods for characterizing variability of soil parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(12): 1936—1940.
- [2] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 612—624.
- [3] PHOON K K, KULHAWY F H. Evaluation of geotechnical property variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 625—639.
- [4] CHING J, PHOON K K, CHEN Y C. Reducing shear strength uncertainties in clays by multivariate

- correlations[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2010, 47(1): 16—33.
- [5] 蒋水华, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(3): 508—518.
- JIANG Shui-hua, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Slope reliability analysis considering effect of autocorrelation functions[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2014, 36(3): 508—518.
- [6] EL-RAMLY H, MORGENSTERN N R, CRUDEN D M. Probabilistic slope stability analysis for practice[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2002, 39(3): 665—683.
- [7] CAO Z J, WANG Y, LI D Q. Quantification of prior knowledge in geotechnical site characterization[J]. **Engineering Geology**, 2016, 203: 107—116.
- [8] CAO Z J, WANG Y, LI D Q. Site-specific characterization of soil properties using multiple measurements from different test procedures at different locations—A Bayesian sequential updating approach[J]. **Engineering Geology**, 2016, 211: 150—161.
- [9] ZHANG J, TANG W H, ZHANG L M. Efficient probabilistic back-analysis of slope stability model parameters[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2010, 136(1): 99—109.
- [10] ZHANG L L, ZHANG J, ZHANG L M, et al. Back analysis of slope failure with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(7): 905—912.
- [11] WANG L, HWANG J H, LUO Z, et al. Probabilistic back analysis of slope failure—A case study in Taiwan[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 51: 12—23.
- [12] ERING P, SIVAKUMAR BABU G L. Probabilistic back analysis of rainfall induced landslide—A case study of Malin landslide, India[J]. **Engineering Geology**, 2016, 208: 154—164.
- [13] STRAUB D, PAPAIOANNOU I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2014, 141(3): 04014134.
- [14] STRAUB D, PAPAIOANNOU I, BETZ W. Bayesian analysis of rare events[J]. **Journal of Computational Physics**, 2016, 314: 538—556.
- [15] 陈静瑜, 赵炼恒, 李亮, 等. 基于 Excel 数据表和极限分析法的滑坡抗剪强度参数反演分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(3): 827—834.
- CHEN Jing-yu, ZHAO Lian-heng, LI Liang, et al. Back analysis of shear strength parameters based on Excel spreadsheet and upper bound limit analysis method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(3): 827—834.
- [16] LI D Q, QI X H, PHOON K K, et al. Effect of spatially variable shear strength parameters with linearly increasing mean trend on reliability of infinite slopes[J]. **Structural safety**, 2014, 49: 45—55.
- [17] GRIFFITHS D V, HUANG J, FENTON G A. Probabilistic slope stability analysis using RFEM with non-stationary random fields[C]//SCHWECKENDIEK T, VAN TOL A F, PEREBOOM D, et al. Geotechnical Safety and Risk V. [S. l.]: [s. n.], 2015: 704—709.
- [18] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2001, 16(4): 263—277.
- [19] PAPAIOANNOU I, BETZ W, ZWIRGLMAIER K, et al. MCMC algorithms for subset simulation[J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2015, 41: 89—103.
- [20] BETZ W, PAPAIOANNOU I, STRAUB D. Adaptive variant of the BUS approach to Bayesian updating[C]//CUNHA A, CAETANO E, RIBEIRO P, et al. Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics (EURODYN). Porto, Portugal: [s. n.], 2014: 3021—3028.
- [21] 蒋水华, 姚池, 杨建华, 等. 基于 BUS 方法的无限长边坡可靠度更新[J]. 岩土力学, 2017, 38(12): 3555—3564.
- JIANG Shui-hua, YAO Chi, YANG Jian-hua, et al. Reliability updating for infinite soil slopes using BUS method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(12): 3555—3564.
- [22] RACKWITZ R. Reviewing probabilistic soils modelling[J]. **Computers and Geotechnics**, 2000, 26(3): 199—223.
- [23] NG I T, YUEN K V, DONG L. Estimation of undrained shear strength in moderately OC clays based on field vane test data[J]. **Acta Geotechnica**, 2017, 12(1): 145—156.
- [24] DER KIUREGHIAN A, KE J B. The stochastic finite element method in structural reliability[J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 1988, 3(2): 83—91.