DOI：10.16285/j.rsm.2016.1280

主动与被动状态下墙体侧向位移近似计算

谢 涛[1, 2]，罗 强[1, 2]，张 良[1, 2]，连继峰[1, 2]，于曰明[1, 2]

（1. 西南交通大学 土木工程学院，四川 成都 610031；2. 西南交通大学 高速铁路线路工程教育部重点实验室，四川 成都 610031）

摘 要：极限状态下墙体侧向位移对土压力计算和支挡结构设计影响显著。根据 Rankine 变形体和 Coulomb 刚塑体模型，将墙后土体变形分别当作单剪和直剪试验中试样的剪切过程，以达到极限剪切变形（剪应变或单位长度剪切位移）作为进入主被动状态标准，构建了土体变形与墙体位移的几何关系，提出了反映土体变形与强度特性，同时考虑静止时初始应力状态影响的墙体极限侧向位移近似计算模型。分析表明：土体极限剪切变形、滑移区范围、初始应力状态是影响墙体极限位移的核心要素，其中极限剪切变形占据主导作用，是导致不同颗粒组成及密实程度土体进入极限状态所需墙体位移差异显著的主要原因，而主被动区范围不同和因静止土压力系数 $k_0 < 1$ 引起的初始剪切变形，则是被动状态墙体位移远大于主动的关键因素；算例中主动与被动状态下墙体位移与墙高之比分别介于 0.5‰～13.2‰和–0.4%～–5.2%，且主动状态下细粒土墙体位移大于粗粒土，计算结果与工程经验及相关文献模型试验基本一致。

关 键 词：主动与被动状态；墙体侧向位移；Rankine 与 Coulomb 理论；土体极限剪切变形；单剪与直剪试验

中图分类号：TU 470 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－7598 (2018)05－1682－09

Calculation of wall displacement to reach active or passive earth pressure state

XIE Tao[1, 2], LUO Qiang[1, 2], ZHANG Liang[1, 2], LIAN Ji-feng[1, 2], YU Yue-ming[1, 2]

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;
2. MOE Key Laboratory of High-Speed Railway Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract: The movement of wall plays an important role in the calculation of lateral earth pressure and the design of retaining structure. Regarding the process of backfill approach active or passive pressure state as the shearing process of soil sample in simple shear test or direct shear test, the backfill process reaches active or passive earth pressure state when the soil deformation equals to the ultimate value (shear strain in the simple test or shear displacement per unit length in the direct shear test). Based on the geometric relationship between the soil shear deformation and wall displacement, the theoretical calculation method of wall displacement required to reach active or passive earth pressure is provided, where the soil stress-strain behavior and initial stress state are considered. The analysis indicates that the magnitude of needed wall displacement to reach active or passive earth pressure is controlled by soil ultimate shear deformation, the range of active or passive zone, and the initial earth pressure state. The first factor is the most important among them, which contributes to variation of wall displacement among different soils. The wall displacement in passive state is greater than that in active state, because the range of passive zone is larger than that of active zone. The theoretically calculated wall displacement attaining active state is about 0.5‰~13.2‰ H (where H is the height of the wall), of which the non-cohesive soil is larger than the cohesive soil. As to the case of passive state, the wall displacement is –0.4%~–5.2% H. The theories are concordant with the model test results from relevant literatures.

Keywords: active or passive earth pressure state; displacement of wall; Rankine and Coulomb earth pressure theories; soil ultimate shear deformation; simple shear test; direct shear test

1 引 言

土压力研究是土力学的一个古典课题，在支挡结构设计中占据着举足轻重的地位。极限土压力的计算有熟知的 Coulomb 理论和 Rankine 理论。其中，基于点应力状态的 Rankine 理论，主动或被动状态时墙后

收稿日期：2016-06-02
基金项目：国家重点基础研究发展计划(973 计划)（No. 2013CB036204）；中国铁路总公司科技研究开发计划（No. 2014G003-A）。
This work was supported by the National Program on Key Basic Research Project of China (973 Program) (2013CB036204) and the Research and Development Program of China Railway (2014G003-A).
第一作者简介：谢涛，男，1991 年生，博士研究生，主要从事土力学及路基工程方面的学习与研究。E-mail: 1535009557@qq.com
通讯作者：罗强，男，1963 年生，博士，教授，主要从事路基工程及土力学方面的研究工作。E-mail: LQrock@swjtu.cn

滑移区内每一点均处于极限状态，剪应力及剪应变同时达到极限，Rankine 视其为变形体；而 Coulomb 理论将整个楔形体滑移区当成一个整体，认为只要滑移面上剪应力达到极值即进入主、被动状态，并不关注滑移区内土体的应力或变形状态，类似于是刚塑体。如图 1 所示，土体达到主动与被动状态需要一定的墙体侧向位移，而传统的土压力理论却并不涉及。特别是被动状态，所需墙体侧向位移往往较大，而实际中的墙体变形不足以使墙后土体完全进入被动状态，导致土压力低于被动状态理论计算值。

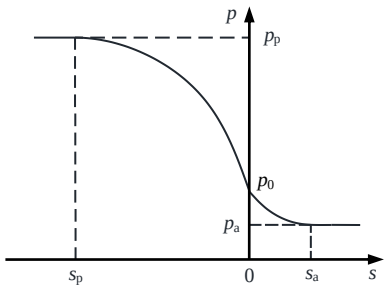


图 1　土压力-位移曲线

Fig.1　Earth pressure-displacement curve

目前，有关极限状态所需墙体侧向位移的研究主要基于室内模型试验和现场测试。模型试验方面，有 Terzaghi[1]关于密砂、Ishihara 等[2]关于中密砂的室内常规模型试验，以及岳祖润等[3]针对黏性土的离心模型试验；现场测试方面，Matsuo 等[4]进行了以粉细砂及矿渣作为墙后填土的现场足尺模型试验，谢涛等[5]针对密实粗颗粒土的高速铁路路肩桩板墙进行了现场测试。各研究者[1–5]测得极限状态下墙体侧向位移差异较大，如表 1 所示。究其原因，一方面是因为极限状态下的墙体侧向位移受土类及密实度、墙土摩擦影响较大，其本身浮动较大[6–7]；另一方面，则是试验误差，特别是主动状态，因极限时的位移较小，测试误差往往较大。即便如此，一般认为达到极限状态黏性土所需墙体侧向位移较砂性土大、密实土较松散土大。根据经验[8–9]，主动状态下砂性土墙体侧向位移 s 与墙高 H 之比约为 0.5‰～5.0‰，黏性土为 4.0‰～20.0‰；被动时砂性土为 2.0%～6.0%，黏性土为 2.0%～4.0%。

已有研究为极限状态下墙体侧向位移的计算积累了丰富的工程经验。然而，总的来讲，依然是以模型试验及现场测试为主，其结果受人为因素、试验条件及土性影响较大，有关极限状态下墙体侧向位移的理论计算几乎一片空白。据此，分别基于 Rankine 变形体及 Coulomb 刚塑体模型，将墙后土体沿滑移面的滑动近似当作单剪试验中试样沿底盒，或直剪中沿剪切面的剪切过程。根据构建土体剪切变形与墙体位移的几何方程，建立极限状态下墙体侧向位移理论计算方法，并通过相关文献模型试验予以校验。

表 1　主动/被动土压力状态下墙体侧向位移

Table 1　Required wall displacement reaching active or passive earth pressure state

土体类别	$\frac{s}{H}$ / %		备注
	主动	被动	
密砂	0.1	–0.5	Terzaghi[1]
中密砂	0.4	–1.4	Ishihara 等[2]
粉细砂	0.6～0.8	/	Matsuo 等[4]
矿渣	0.3～0.5	/	
压实黏土	0.9～1.0	/	岳祖润等[3]
密实粗粒土	1.6	/	谢涛等[5]

2　极限状态下墙体侧向位移

2.1　Rankine 变形体模型

2.1.1 Rankine 主动状态

通常，在讨论土力学的稳定问题时，变形条件一般不予关注，土压力的研究亦是如此。Terzaghi 等[10–11]通过将图 2 中楔形体以外土体当成既没变形又无位移的刚体，对处于 Rankine 主动状态的楔形体 *ABC* 进行分析。土体从原来的静止转变成主动状态时，楔形体在水平方向伸长，图 2 所示的阴影部分宽度即代表水平伸长量。假定土体达到主动状态时楔形体内每一点单位长度水平伸长量 ε_x 相同，由此求得主动状态下距墙底 h 处墙体侧向位移 s_{ah} 为

$$s_{ah}=\varepsilon_x h\tan\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{1}$$

式中：φ 为土体内摩擦角，遗憾的是 Terzaghi 并没给出 ε_x 的具体值，仅指出 ε_x 与土的类别及密实度相关。

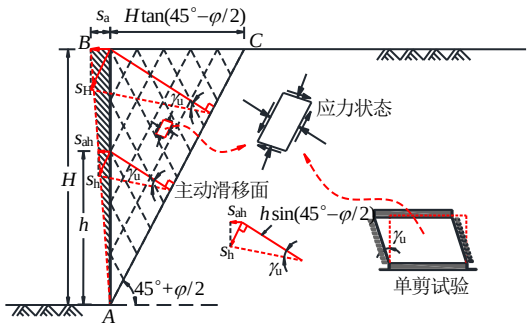


图 2　Rankine 模型下墙体侧向位移与剪应变关系（主动）

Fig.2　Relation between shear strain and wall displacement based on Rankine model (active state)

如图 2 所示，基于 Terzaghi 基本假设，将墙后土

体沿滑移面 AC 的变形，近似当作单剪试验中试样沿单剪仪底板的剪切过程，认为墙后土体剪切变形达到极限剪应变 γ_u 时即进入极限状态，并假定 γ_u 不随深度变化。对于多数挡土墙，墙高 H 一般不超过 10 m，其竖向应力在 200 kPa 以内，有关 γ_u 不随深度变化的假定在较小竖向应力范围内偏差不大。需要指出的是，土压力问题在传统理论中被视为稳定问题，极限状态往往是就应力而言的。然而，本文讨论是极限状态下的墙体侧向位移，其实质是稳定问题的变形条件。因此，必须关注土体变形，并引入极限剪应变（对应于极限剪应力）作为进入主被动状态标准。

根据图 2 中的几何关系，可得主动状态下距墙底 h 处墙体侧向位移 s'_{ah}，计算公式为

$$s'_{ah}=\gamma_u h\sin^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{2}$$

实际上，土体在静止状态时，AC 及其与之平行的滑移面上已经存在剪应力 τ_{0a}，表明墙后土体已经产生了初始剪应变 γ_{0a}。这部分变形在墙后土体填筑或自然沉积中就已经产生，并不包含在土体达到极限状态所需墙体侧向位移之中。因此，主动状态下的侧向位移计算中，应扣除这部分已经产生的变形，即距墙底 h 处墙体侧向位移 s_{ah} 应按下式确定：

$$s_{ah}=(\gamma_u-\gamma_{0a})h\sin^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{3}$$

墙顶处侧向位移与墙高之比 s_a/H，按下式计算：

$$\frac{s_a}{H}=(\gamma_u-\gamma_{0a})\sin^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{4}$$

由式（4）可知，土体处于 Rankine 主动状态时，墙顶侧向位移与墙高之比仅与土体极限剪应变 γ_u、静止时滑移面上初始剪应变 γ_{0a} 和内摩擦角 φ 相关。其中，γ_u 越大，土体达到主动状态所需侧向位移也就越大。通常细粒土极限剪应变 γ_u 大于粗粒土，松散土较密实土大，这是导致细粒土进入主动状态所需位移大于粗粒土，松散土大于密实土的主要原因。

2.1.2 Rankine 被动状态

土体由静止进入被动状态时，墙后土体沿被动滑移面朝着与主动状态相反的方向变形，墙体产生面向土体的侧向位移。与主动状态类似，当剪切变形达到极限剪应变 $-\gamma_u$ 时，土体进入极限状态。根据图 3 所示的几何关系，可得土体处于被动状态时距墙底 h 处侧向位移与相应位置墙高之比 s_{ph}/h：

$$\frac{s_{ph}}{h}=(-\gamma_u-\gamma_{0p})\sin^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{5}$$

式中：γ_{0p} 为静止时墙后土体潜在滑移面 AD 初始剪应变。其中，墙顶侧向位移与墙高之比 s_p/H 计算公式为

$$\frac{s_p}{H}=-(\gamma_u+\gamma_{0p})\sin^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{6}$$

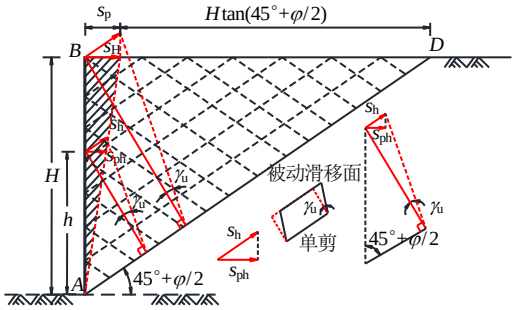


图 3 Rankine 模型下墙体侧向位移与剪应变关系（被动）

Fig.3 Relationship between shear strain and wall displacement based on Rankine model (passive state)

根据式（4）和式（6）可得，为了使单剪试验与墙后挡墙满足变形边界条件上的相似性，要求土体在进入主动或被动状态过程中，墙体位移模式始终为绕墙底转动。墙后土体进入 Rankine 被动与主动状态时墙顶侧向位移之比为

$$\frac{s_p}{s_a}=-\frac{\gamma_u+\gamma_{0p}}{\gamma_u-\gamma_{0a}}\tan^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{7}$$

由式（7）可知，达到被动状态所需墙体侧向位移远大于主动状态。这一方面是因为被动区范围大于主动区，另一方面则是由于土体从静止进入被动状态时的剪切变形（$\gamma_u+\gamma_{0p}$）大于从静止进入主动状态（$\gamma_u-\gamma_{0a}$）。

可见，达到主动与被动状态所需墙体侧向位移主要受 3 方面因素影响：一是滑移区范围，主要体现在内摩擦角 φ 上，主动与被动区范围随 φ 的增大分别呈现出减小和增大的趋势，这是导致达到被动状态所需墙体侧向位移远大于主动的主要原因；二是静止时初始应力状态，主要体现在墙后土体初始剪应力和剪应变上，这是被动状态下墙体侧向位移大于主动的又一因素，且静止土压力系数 k_0 越小，越接近主动状态，引起的初始剪应力和剪应变越大，两者的差异就越显著，这与 Potts 等[12]数值模拟结果一致；三是土体极限剪应变 γ_u，这是导致不同颗粒组成和不同密实度土体达到极限状态所需墙体侧向位移差异显著的主要原因。

2.2 Coulomb 刚塑体模型

2.2.1 Coulomb 主动状态

如图 4 所示，根据 Coulomb 刚体极限平衡原理，

把楔形体 *ABC* 看成仅有位移没有变形的刚塑体，将其沿滑移面 *AC* 的滑动并达到极限状态的过程，当成直剪试验中试样沿剪切面的剪切过程，认为滑移面 *AC* 上单位长度剪切位移由静止时的 ε_{0a} 增加至极限状态的 ε_u 时，即进入主动状态，并假定 ε_u 不随深度变化。

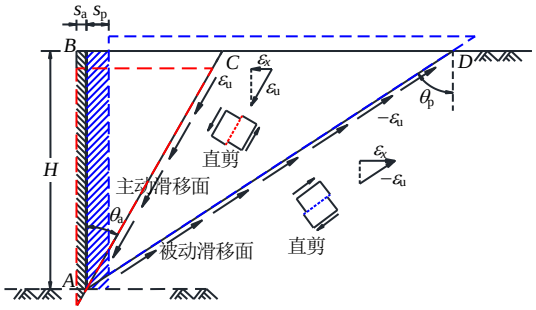


图 4　Coulomb 模型下的墙体侧向位移与土体剪切位移关系
Fig.4　Relationship between ultimate shear displacement and wall displacement based on Coulomb model

根据图 4 所示的滑移面单位长度极限剪切位移 ε_u 与墙体位移的几何关系可知，墙后土体达到主动状态时墙体侧向位移沿墙高均匀分布，相当于墙体平移，其墙顶侧向位移可按下式计算：

$$\frac{s_a}{H}=(\varepsilon_u-\varepsilon_{0a})\tan\theta_a \tag{8}$$

式中：θ_a 为滑移面 *AC* 的竖向夹角，其计算公式为

$$\tan\theta_a=\sqrt{\tan^2(\varphi+\delta)+\frac{\tan(\varphi+\delta)}{\tan\varphi}}-\tan(\varphi+\delta) \tag{9}$$

式中：δ 为墙土摩擦角。其中墙背光滑时 $\theta_a=45^\circ-\varphi/2$，式（8）可转化为

$$\frac{s_a}{H}=(\varepsilon_u-\varepsilon_{0a})\tan\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{10}$$

2.2.2　Coulomb 被动状态

当被动状态时根据几何关系可得墙顶侧向位移与墙高之比 s_p/H 为

$$\frac{s_p}{H}=(-\varepsilon_u-\varepsilon_{0p})\tan\theta_p \tag{11}$$

式中：ε_{0p} 为静止时被动滑移面土体单位长度剪切位移；θ_p 为被动滑移面竖向夹角，且有

$$\tan\theta_p=\sqrt{\tan^2(\varphi+\delta)+\frac{\tan(\varphi+\delta)}{\tan\varphi}}+\tan(\varphi+\delta) \tag{12}$$

墙背光滑时 $\theta_p=45^\circ+\varphi/2$，进入被动状态所需墙体侧向位移与墙高之比的计算公式为

$$\frac{s_p}{H}=-(\varepsilon_u+\varepsilon_{0p})\tan\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{13}$$

联立式（8）和式（11）可得 Coulomb 被动与主动状态下的墙顶侧向位移之比 s_p/s_a 为

$$\frac{s_p}{s_a}=-\frac{(\varepsilon_u+\varepsilon_{0p})\tan\theta_p}{(\varepsilon_u-\varepsilon_{0a})\tan\theta_a} \tag{14}$$

当墙体光滑时，式（14）可简化为

$$\frac{s_p}{s_a}=-\frac{\varepsilon_u+\varepsilon_{0p}}{\varepsilon_u-\varepsilon_{0a}}\tan^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{15}$$

对比分析可知，基于 Coulomb 刚塑体模型，墙高范围内土体同时达到极限状态时土体侧向位移均匀分布，墙体位移模式为平移；而基于 Rankine 变形体模型，达到极限状态时的墙体侧向位移从墙底处沿墙高线性增加，其位移模式为绕墙底转动。

事实上，土体既不是 Coulomb 刚塑体也不是 Rankine 变形体，而是介于两者之间。墙后为密实的无黏性土时，由于整体性较好，可能更接近 Coulomb 刚体；墙后为松软黏性土时，相对而言整体性较差，可能更接近 Rankine 变形体。因此，土体同时达到极限状态，土压力沿墙高线性分布的墙体位移模式取决于土性及密实程度。这也许就是有关墙背土压力沿墙高为直线分布时，存在平移与绕墙底转动模式不同观点的原因。

2.3　静止状态潜在滑移面剪应力与剪切位移

由式（4）、（6）及式（8）、（11）可知，只要确定土体在静止时的初始剪切变形（单位长度剪切位移或剪应变），就可以求得极限状态下的墙体侧向位移。其求解思路为：首先，根据平衡原理和静止土压力系数 k_0 确定静止时滑移面初始剪应力；然后，通过简化的应变与应力函数关系（二次抛物线）及由 k_0 确定的初始剪应力，求得初始剪应变或单位长度初始剪切位移。

2.3.1　Rankine 变形体模型

通常 $k_0<1$，表明主动与被动潜在滑移面（图 5 中 *AC* 和 *AD*）已经产生了初始剪应力 τ_{0a}、τ_{0p} 和剪应变 γ_{0a}、γ_{0p}。静止时距墙底 *h* 处土压力 p_0 按下式确定：

$$p_0=k_0\sigma_h \tag{16}$$

式中：σ_h 为距墙底 *h* 处土体竖向应力；k_0 可按试验确定或取经验值 $1-\sin\varphi$。

如图 5 所示，忽略黏聚力 *c*，根据力的平衡可得静止状态时距墙底 *h* 处潜在滑移面上初始剪应力 τ_{0a}、

τ_{0p} 与 p_0 的关系。即

$$p_0=\sigma_h\frac{1-(\tau_{0a}/\tau_f)\sqrt{k_a}\tan\varphi}{1+(\tau_{0a}/\tau_f)\sqrt{k_p}\tan\varphi} \tag{17}$$

$$p_0=\sigma_h\frac{1-(\tau_{0p}/\tau_f)\sqrt{k_p}\tan\varphi}{1+(\tau_{0p}/\tau_f)\sqrt{k_a}\tan\varphi} \tag{18}$$

式中：τ_f 为极限剪应力，可根据试验或按 Mohr-Coulomb 强度准则确定；$k_p=\tan^2(45^\circ+\varphi/2)$、$k_a=\tan^2(45^\circ-\varphi/2)$，分别为 Rankine 主动与被动土压力系数。将式（16）分别代入式（17）、（18）中并化简，得到滑移面 *AC* 与 *AD* 初始剪应力 τ_{0a}、τ_{0p} 的计算公式为

$$\frac{\tau_{0a}}{\tau_f}=\frac{1-k_0}{(k_0\sqrt{k_p}+\sqrt{k_a})\tan\varphi} \tag{19}$$

$$\frac{\tau_{0p}}{\tau_f}=\frac{1-k_0}{(k_0\sqrt{k_a}+\sqrt{k_p})\tan\varphi} \tag{20}$$

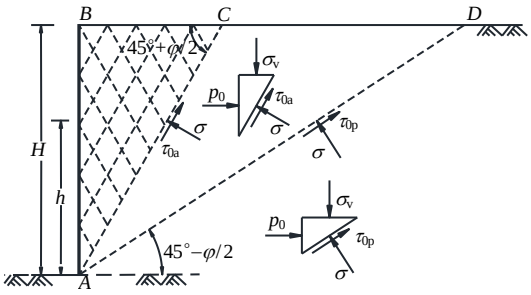


图 5 Rankine 变形体模型受力示意图

Fig.5 Force diagram of backfill based on Rankine model

剪应力与剪应变（或直剪试验中的剪切位移）关系曲线具有非线性的特点。假定应力-应变关系曲线为过原点的二次抛物线函数，即 $\gamma=m\tau^2$（m 为常数），将式（19）、（20）代入，可得初始剪应变与极限剪应变之比计算公式分别为

$$\frac{\gamma_{0a}}{\gamma_u}=\left(\frac{\tau_{0a}}{\tau_f}\right)^2=\frac{(1-k_0)^2}{(k_0^2k_p+k_a+2k_0)\tan^2\varphi} \tag{21}$$

$$\frac{\gamma_{0p}}{\gamma_u}=\left(\frac{\tau_{0p}}{\tau_f}\right)^2=\frac{(1-k_0)^2}{(k_0^2k_a+k_p+2k_0)\tan^2\varphi} \tag{22}$$

将式（21）、（22）代入式（4）和式（6），求得 Rankine 变形体模型下极限状态时墙顶侧向位移计算公式分别为

$$\frac{s_a}{H}=\lambda_a\gamma_u\sin^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{23}$$

$$\frac{s_p}{H}=\lambda_p\gamma_u\sin^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right) \tag{24}$$

式中：λ_a、λ_p 为与 k_0 和 φ 相关的系数，且有

$$\lambda_a=1-\frac{(1-k_0)^2}{\tan^2\varphi(k_0^2k_p+k_a+2k_0)} \tag{25}$$

$$\lambda_p=-\left[1+\frac{(1-k_0)^2}{\tan^2\varphi(k_0^2k_a+k_p+2k_0)}\right] \tag{26}$$

式（23）、（24）是在假定黏聚力 $c=0$ 的基础上推导而来。当 $c\neq0$ 时，需假设摩擦力与黏聚力的发挥程度，根据平衡原理求解。事实上，根据 Rankine 理论，黏聚力对主动与被动区范围没有影响，而极限状态下的墙体侧向位移主要与主动或被动区范围和极限剪应变有关。因此，黏聚力的忽略对极限状态下的墙体侧向位移影响较小，仅对初始剪切变形的计算有略微影响。

2.3.2 Coulomb 刚塑体模型

对于 Coulomb 刚塑体模型，假定静止时土体与墙背没有相对滑移或滑移趋势。根据图 6 所示的平衡关系，可得静止时土压力合力 P_0 和 *AC* 与 *AD* 面上初始剪应力 τ_{0a}、τ_{0p} 的关系，按下式确定：

$$P_0=\rho gH^2\frac{1-(\tau_{0a}/\tau_f)\tan\theta_a\tan\varphi}{2[1+(\tau_{0a}/\tau_f)\tan\theta_p\tan\varphi]} \tag{27}$$

$$P_0=\rho gH^2\frac{1+(\tau_{0p}/\tau_f)\tan\theta_p\tan\varphi}{2[1-(\tau_{0p}/\tau_f)\tan\theta_a\tan\varphi]} \tag{28}$$

式中：ρg 为墙后土体重度。P_0 可按下式计算：

$$P_0=\frac{\rho gH^2k_0}{2} \tag{29}$$

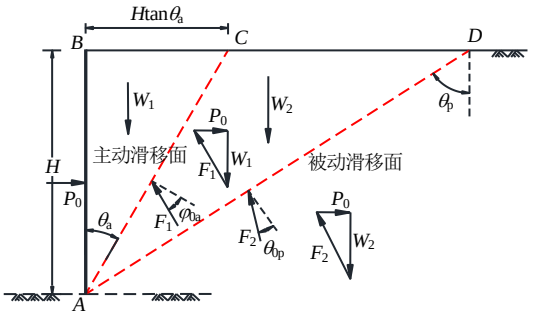


图 6 Coulomb 刚塑体模型受力示意图

Fig.6 Force diagram of soil wedge based on Coulomb model

将式（29）代入式（27）、（28）中，求得静止时初始剪应力 τ_{0a}、τ_{0p}，按下两式计算：

$$\frac{\tau_{0a}}{\tau_f}=\frac{(1-k_0)\tan\theta_a}{(k_0+\tan^2\theta_a)\tan\varphi} \tag{30}$$

$$\frac{\tau_{0p}}{\tau_f}=\frac{(1-k_0)\tan\theta_p}{(k_0+\tan^2\theta_p)\tan\varphi} \tag{31}$$

假定剪应力-单位长度剪切位移关系曲线为过原点的二次抛物线函数，即 $\varepsilon=n\tau^2$（n 为常数），将式（30）和式（31）代入，可得单位长度初始剪切位移与极限剪切位移之比分别为

$$\frac{\varepsilon_{0a}}{\varepsilon_u}=\left(\frac{\tau_{0a}}{\tau_f}\right)^2=\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_a}{(k_0+\tan^2\theta_a)\tan\varphi}\right]^2 \tag{32}$$

$$\frac{\varepsilon_{0p}}{\varepsilon_u}=\left(\frac{\tau_{0p}}{\tau_f}\right)^2=\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_p}{(k_0+\tan^2\theta_p)\tan\varphi}\right]^2 \tag{33}$$

将式（32）和式（33）代入式（8）和式（11）中，求得极限状态下的墙体侧向位移分别为

$$\frac{s_a}{H}=\beta_a\varepsilon_u\tan\theta_a \tag{34}$$

$$\frac{s_p}{H}=\beta_p\varepsilon_u\tan\theta_p \tag{35}$$

式中：β_a、β_p 为与 k_0 和 φ 相关的系数，计算公式分别为

$$\beta_a=1-\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_a}{(k_0+\tan^2\theta_a)\tan\varphi}\right]^2 \tag{36}$$

$$\beta_p=-\left(1+\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_p}{(k_0+\tan^2\theta_p)\tan\varphi}\right]^2\right) \tag{37}$$

当墙背光滑时，式（36）、（37）中 $\beta_a=\lambda_a$，$\beta_p=\lambda_p$。

以上讨论主要针对常见工况 $k_0\leqslant 1$，对于 $k_0>1$，只需将式（25）和式（26）转变成为

$$\lambda_a=1+\frac{(1-k_0)^2}{\tan^2\varphi(k_0^2k_p+k_a+2k_0)} \tag{38}$$

$$\lambda_p=\frac{(1-k_0)^2}{\tan^2\varphi(k_0^2k_a+k_p+2k_0)}-1 \tag{39}$$

将式（36）、（37）分别转变为

$$\beta_a=1+\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_a}{(k_0+\tan^2\theta_a)\tan\varphi}\right]^2 \tag{40}$$

$$\beta_p=\left[\frac{(1-k_0)\tan\theta_p}{(k_0+\tan^2\theta_p)\tan\varphi}\right]^2-1 \tag{41}$$

需要指出的是，式（34）、（35）仅适用于填土水平、墙背垂直的情况。如图 7 所示，对于一般挡墙，达到主动与被动状态时的墙体侧向位移，可根据与图 4 类似的几何关系确定，即

$$\frac{s_a}{H}=\frac{(\varepsilon_u-\varepsilon_{0a})l_a\sin\theta_a}{H} \tag{42}$$

$$\frac{s_p}{H}=\frac{(-\varepsilon_u-\varepsilon_{0p})l_p\sin\theta_p}{H} \tag{43}$$

式中：l_a、l_p 分别为主动与被动滑移面长度。初始剪应变 ε_{0a} 与 ε_{0p} 可根据平衡原理及静止土压力系数 k_0 得到的初始剪应力，再通过应力-应变关系 $\varepsilon=n\tau^2$ 求解。

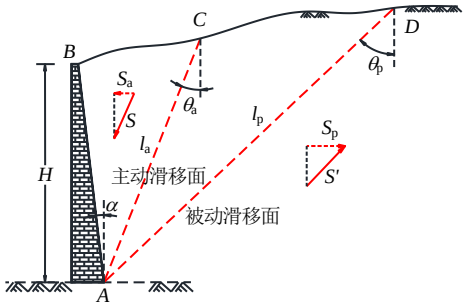


图 7　Coulomb 模式下的一般挡墙侧向位移与剪切位移关系

Fig.7　Relationship between shear displacement of soil and wall displacement under general conditions based on Coulomb model

滑移面竖向夹角 θ_a 与 θ_p 需根据 Coulomb 极限平衡原理、结合作图法或试算法确定，其大小主要受墙背倾斜角及填土面影响。可见，墙背倾斜及填土面主要是通过改变主动滑移面夹角（θ_a 与 θ_p），进而影响极限状态下的墙体侧向位移，体现为 θ_a 与 θ_p 以及 l_a 与 l_p 的数值大小。

3　模型试验验证及算例分析

3.1　模型试验验证

3.1.1　主动状态

宋飞[13]开展了以南京云母砂作为试验材料的挡墙主动土压力离心模型试验。其中，模型墙高 $H=190$ mm、离心加速度为 $50g$，土体详细的物理力学指标见文献[13]。

根据排水剪试验测得土体内摩擦角 $\varphi=40.23°$，其应力-应变关系曲线如图 8 所示。极限剪应变 $\gamma_u\approx 1.0\%$，将其和实测 $k_0=0.43$ 代入基于 Rankine 变形体模型的理论计算式（23）中，求得主动状态下墙顶侧向位移与墙高之比 $s_a/H=1.24‰$。

试验测得不同深度处侧向土压力随墙体位移的变化曲线如图 9 所示。土压力随墙体位移的增加呈现出幅度逐渐衰减的减小趋势，墙体位移与墙高之比（即图中的 s/H）达到 1‰～1.5‰时基本稳定，土体进入主动状态，实测结果与理论计算基本吻合。

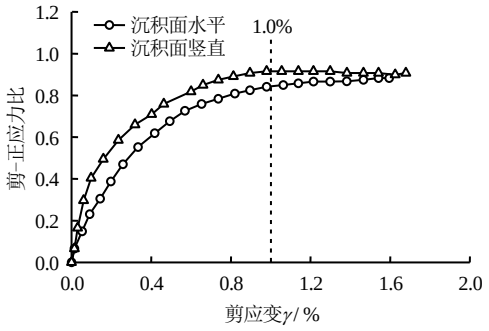


图 8 应力−应变关系曲线[13]

Fig.8 Shear stress-shear strain curves of measured soil

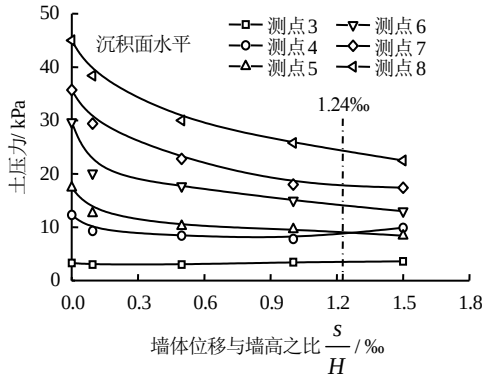


图 9 静止与主动状态之间不同墙高处土压力与位移关系[13]

Fig.9 Measured earth pressure-displacement curves from initial state to active earth pressure state[13]

岳祖润等[3]开展了模型墙高 $H=25$ cm、模型率 $N=80.18$ 的挡土墙主动土压力土工离心模型试验，试验土体为黏性土，详细物理力学参数见文献[3]。

根据大型直剪试验（230 mm×230 mm），测得土体抗剪强度指标 $c=38.2$ kPa、$\varphi=22.7°$，其剪切位移与剪应力关系曲线如图 10 所示（图中 σ 表示竖向应力）。极限剪切位移约为 7.0 mm，相应的 $\varepsilon_u=3.0\%$。根据实测土压力换算得到土体综合内摩擦角 $\varphi_0\approx 39°$、$k_0=0.37$，将其代入式（34）中，求得主动状态下墙体侧向位移与墙高之比为 8.7‰，介于实测值 8‰～10‰之间，如图 11 所示。

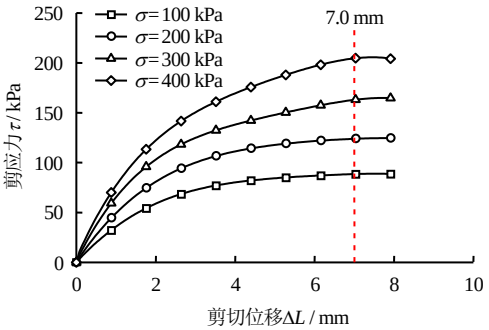


图 10 试验黏土的剪切位移与剪应力曲线[14]

Fig.10 Measured shear displacement-shear stress curves of cohesive soil[14]

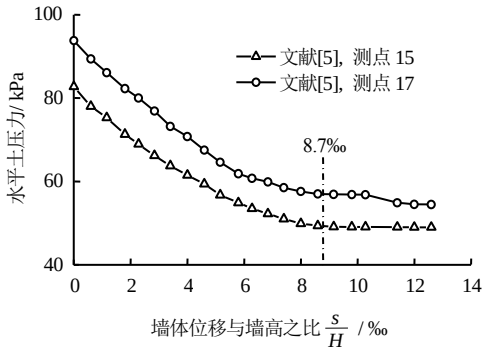
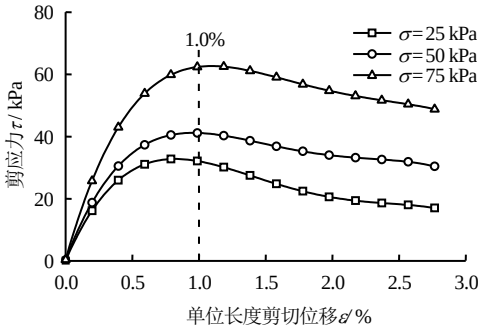


图 11 实测墙体位移−土压力曲线[3]

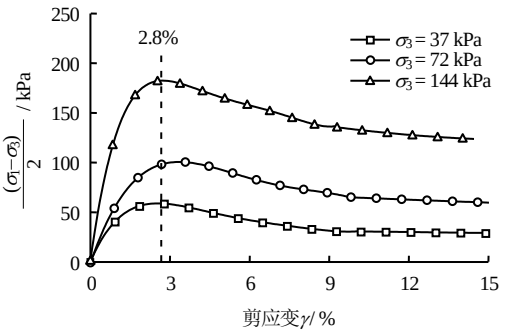
Fig.11 Measured earth pressure-displacement curves[3]

3.1.2 被动状态

Wilson[15]开展了试验材料为砂土、墙高 $H=1.68$ m 的大比例尺挡墙被动土压力试验。土体的应力−应变（或剪切位移）关系曲线如图 12 所示（图中 σ_1、σ_3 分别表示大、小主应力，σ 为竖向应力）。其中，极限剪应变 $\gamma_u=2.8\%$，对应的强度指标 $c=14$ kPa，$\varphi=44°$；单位长度极限剪切位移 $\varepsilon_u=1.0\%$，对应的 $c=14$ kPa，$\varphi=48°$。



(a) 剪切位移−剪应力



(b) 剪应变−剪应力

图 12 应力(单位长度剪切位移)−应变关系曲线[15]

Fig.12 Relationships between shear stress and shear strain (or shear displacement per unit length)

忽略墙土摩擦（实测 $\delta=2.3°$～$2.7°$），根据式（24）、（35）得到被动状态下墙体侧向位移与墙高之

比分别为 2.7%和 2.8%，两者极为接近。如图 13 所示，根据实测墙体位移土压力关系曲线可知，被动状态下的墙体侧向位移与墙高之比介于 2.0%～3.0%，理论计算与实测结果基本吻合。

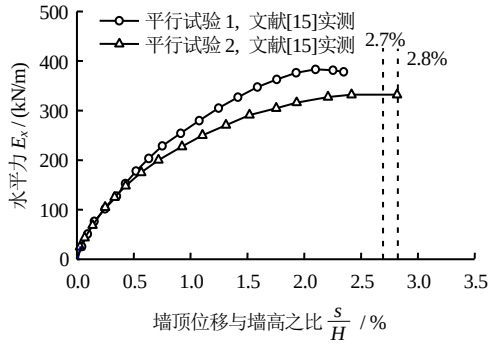


图 13　Wilson 模型试验的土压力−墙体位移−关系曲线[15]
Fig.13　Measured earth pressure-displacement curves based on Wilson model

可见，无论是基于 Rankine 变形体还是 Coulomb 刚塑体模型，无论是主动状态还是被动，极限状态下的墙体侧向位移理论计算值与实测结果均有较好一致性，计算模型能基本反映实际情况。

3.2　算例分析

通过改变内摩擦角 φ 和单位长度极限剪切位移 ε_u（或极限剪应变 γ_u）两主要影响因素，根据理论计算主动与被动状态下墙体侧向位移的大致范围，进一步检验理论模型与工程经验在数值范围上是否一致。需要指出的是，ε_u 和 γ_u 虽然均无量纲，其数学含义却完全不同。γ_u 表示的是角度，而 ε_u 则是单位长度平均剪切位移的概念。正是因为数学含义上的不同，导致二者在数值大小上也存在显著差异。文献[15–17]的实测数据表明，同一土体的 γ_u 值远大于 ε_u，前者约为后者的 2 倍左右，部分土体甚至可达 3 倍。例如，在 Wilson[15]的模型试验中，同一土体的 γ_u 与 ε_u 分别为 2.8%和 1.0%，前者远大于后者。由于试验数据缺乏，算例分析时近似取 $\varepsilon_u = 0.5\gamma_u$ 进行计算，k_0 按 $1-\sin\varphi$ 确定。

极限状态下墙体侧向位移随极限剪切变形和滑移区范围的增加而增大。如表 2 所示，极限剪切变形相同时，达到主动或被动状态的墙体侧向位移随土体内摩擦角 φ 增加（主动区减小、被动区增加）而增大或减小；φ 相同时，即主动或被动区范围一定，极限状态下墙体侧向位移随极限剪切变形的增加而增大。但总的来讲，极限剪切变形对墙体侧向位移起着主导作用。例如，被动状态下，虽然被动区范围随土体的强度，即 φ 的增加而增大，达到极限状态的墙体侧向位移理应越大，但由于极限剪切变形的减小，导致最终的墙体侧向位移随土体强度的增加呈现出减小的趋势。

表 2　极限状态下墙顶侧向位移
Table 2　Calculated wall displacement required to reach active or passive earth pressure state

土性	φ /(°)	γ_u / %	ε_u / %	Rankine 模型		Coulomb 模型			
				$\frac{s_a}{H}$ / ‰	$\frac{s_p}{H}$ / %	$\frac{s_a}{H}$ / ‰		$\frac{s_p}{H}$ / %	
						$\delta=\varphi/2$	$\delta=0$	$\delta=\varphi/2$	$\delta=0$
粗粒土	30	3.0	1.5	4.8	−2.7	5.5	6.1	−3.1	−4.3
	34	2.0	1.0	2.8	−1.8	3.3	3.7	−2.2	−3.3
	37	1.0	0.5	1.2	−0.9	1.5	1.7	−1.1	−1.8
	40	0.5	0.2	0.5	−0.5	0.6	0.6	−0.4	−0.5
细粒土	32	2.0	1.0	3.0	−1.8	3.5	3.9	−2.1	−3.1
	26	3.0	1.5	5.5	−2.6	6.1	6.9	−2.9	−3.9
	20	4.0	2.0	8.8	−3.3	9.4	10.7	−3.6	−4.6
	15	5.0	2.5	12.8	−4.0	13.2	15.4	−4.1	−5.2

当 φ 为 30°～40°、γ_u 为 0.5%～3.0%时（近似粗粒土），基于 Rankine 变形体模型计算得到主动与被动状态墙顶侧向位移与墙高之比分别介于 0.5‰～4.8‰和 −0.5%～−2.7%，Coulomb 模型计算值为 0.6‰～5.5‰和 −0.4%～−3.1%；当 φ = 15°～32°、γ_u = 2.0%～5.0%时（近似细粒土），基于 Rankine 变形体模型计算达到主动与被动状态墙顶侧向位移与墙高之比分别为 3.0‰～12.8‰和 −1.8%～−4.0%，Coulomb 刚塑体模式下的计算值为 3.5‰～13.2‰和 −2.1%～−4.1%。

可见，无论是基于 Rankine 还是 Coulomb 模型，理论计算结果差异不大，且与现有工程经验在墙体侧向位移数值范围上大体一致。其中，墙背粗糙时的墙体极限位移均大于墙背光滑的情况，且被动状态下更加明显。这是因为墙土摩擦的存在会使得滑移区的扩大，导致极限状态下的墙体位移增加。

4 结 论

根据主动和被动区土体剪切变形与墙体位移的几何关系，进行了极限状态下墙体位移的计算分析，形成以下结论：

（1）根据 Rankine 变形体与 Coulomb 刚塑体模型，通过构建土体极限剪切变形与墙体位移的几何关系，建立了基于土体强度与变形特性，同时考虑静止时初始应力的极限状态下墙体位移理论计算模型。分析表明，Rankine 与 Coulomb 模型下，土体同步进入极限状态的墙体位移模式分别为绕墙底转动和平移。

（2）土体极限剪切变形、主被动区范围及静止时初始应力状态对极限状态下墙体侧向位移影响显著。其中，极限剪切变形占据主导作用，是导致主被动状态下粗粒土较细粒土、松散土较密实土墙体位移大的主要原因；而主被动区范围不同和因静止土压力系数 $k_0<1$ 引起的初始剪切变形，则是被动状态墙体位移远大于主动的关键因素。

（3）极限状态下墙体侧向位移理论计算值与墙高成正比，并与工程经验及相关模型试验结果基本吻合。算例表明，常规物理力学指标下的粗、细粒土，达到主动状态所需墙体侧向位移与墙高之比分别介于 0.5‰～6.1‰和 3.0‰～13.2‰，被动时为 0.4%～4.3%和 1.8%～5.2%。

参 考 文 献

[1] TERZAGHI K. Large retaining wall tests Ⅰ－pressure of dry sand[J]. **Engineering News Record**, 1934, 112(1): 136－140.

[2] ISHIHARA K, ARAKAWA T, SAITO T, et al. Study on the earth pressure by using a large-size soil box with a movable wall[C]//Proceedings of the 30th Japan National Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. [S. l.]: [s. n.], 1995: 1717－1720.

[3] 岳祖润, 彭胤宗, 张师德. 压实黏性填土挡土墙土压力离心模型试验[J]. 岩土工程学报, 1992, 14(6): 90－96.
YUE Zu-run, PENG Yin-zong, ZHANG Shi-de. Centrifuge model test on lateral pressure on walls retaining compacted clayed backfill[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 14(6): 90－96.

[4] MATSUO M, KENMOCHI S, YAGI H. Experimental study on earth pressure of retaining wall by field tests[J]. **Soils and Foundations,** 1978, 18(3): 27－41.

[5] 谢涛, 罗强, 周成, 等. 高速铁路小变形下陡坡地基路肩桩板墙力学响应[J]. 岩土力学, 2018, 39(1): 45－52.
XIE Tao, LUO Qiang, ZHOU Cheng, et al. Mechanical response of shoulder sheet-pile wall under the condition of strictly restricted deformation on steep slope ground in high-speed railway[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(1): 45－52.

[6] DUNCAN J M, MOKWA R L. Passive earth pressures: theories and tests[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2001, 127(3): 248－257.

[7] FANG Y S, CHEN T J, WU B F. Passive earth pressures with various wall movements[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1994, 120(8): 1307－1323.

[8] Pritish Standards Institution. Eurocode7: geotechnical design-part 1: general rules[S]. Milton Keynes: [s. n.], 2005.

[9] Canadian Geotechnical Society. Foundations Committee. Canadian foundation engineering manual[M]. Richmond: Bitech Publishers, 1978.

[10] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1948.

[11] TERZAGHI K, PECK R B, MESRI G. Soil mechanics in engineering practice[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.

[12] POTTS D M, FOURIE A B. A numerical study of the effects of wall deformation on earth pressures[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1986, 10(4): 383－405.

[13] 宋飞. 考虑侧向变形的各向异性填土土压力计算方法及试验研究[D]. 北京: 清华大学, 2009.
SONG Fei. Evaluation and experimental study of earth pressure for anisotropic sand under any lateral deformation [D]. Beijing: Tsinghua University, 2009.

[14] 陈国芳. 挡土墙与填土间相互作用的研究[D]. 成都: 西南交通大学, 1989.
CHEN Guo-fang. Study on interaction between retaining wall and backfill[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 1989.

[15] WILSON P. Large scale passive force-displacement and dynamic earth pressure experiments and simulations[D]. San Diego: University of California, 2009.

[16] GAN J K M, FREDLUND D G. Shear strength characteristics of two saprolitic soils[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1996, 33(4): 595－609.

[17] MASANOBU O, JUNICHI K. Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear[J]. **Janpanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering**, 1974, 14(4): 25－38.