

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.1894

基于塑性极限分析上限法理论的 土质边坡可靠度分析

张小艳^{1,2}, 张立翔¹, 李 泽¹

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650500; 2. 昆明理工大学 电力工程学院, 云南 昆明 650500)

摘 要: 将极限分析的上限定理、有限元离散思想、随机规划理论和蒙特卡洛方法这四者结合起来, 提出了一种土质边坡可靠度分析的上限值方法。首先采用三节点有限单元离散土质边坡, 然后将土体的抗剪参数设为随机变量, 根据上限定理构建同时满足三角形单元的塑性流动约束条件、单元公共边的塑性流动约束条件和单元速度边界条件的机动许可速度场, 并根据内功率等于外功率条件建立目标函数, 构建土质边坡可靠度分析的上限法随机规划模型。采用蒙特卡洛方法求解上限法随机规划模型, 同时提出了一种基于上限法速度场的边坡失效风险系数估算方法, 该方法特别适用于具有多种失效模式的边坡风险分析。对 2 个经典算例进行了深入分析, 验证了方法的正确性。

关 键 词: 土质边坡; 可靠度; 风险分析; 上限法; 有限元离散; 线性规划

中图分类号: TU 433

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)05-1840-11

Reliability analysis of soil slope based on upper bound method of limit analysis

ZHANG Xiao-yan^{1,2}, ZHANG Li-xiang¹, LI Ze¹

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China;

2. Faculty of Electric Power Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract: The upper bound numerical method for reliability analysis of soil slopes is proposed, by combining the theory of upper bound limit analysis, finite element discretization, stochastic programming theory and Monte Carlo method. Firstly, three-node finite element is used to discrete the soil slope, and then shear strength parameters of soil are set as random variable. According to the upper bound theorem, kinematically admissible velocity fields are established to satisfy the plastic flow constraint conditions of triangular finite elements, the plastic flow constraint conditions of velocity discontinuities and the velocity boundary conditions. The objective function is established based on the internal and the energy-work balance equation. Then the upper bound limit method stochastic programming model of soil slope reliability analysis are established. The Monte Carlo method is used to solve the upper bound stochastic programming model. At the same time, an estimation method for coefficient of slope failure risk based on velocity field of upper bound method is proposed, it is especially suitable for slope risk analysis with multiple failure modes. Finally, two examples of soil slope are selected, and the results prove the correctness of the method.

Keywords: soil slope; reliability; risk analysis; upper bound method; finite element discretization; linear programming

1 引 言

土质边坡的失稳破坏是最常见的一种地质灾害, 引起土坡失稳的因素非常多, 而且其中很多因素都具有不确定性和随机性, 从而导致边坡的稳定性问题是一个与众多随机变量相关的不确定性问题; 因此, 在边坡工程的设计中常采用可靠度分析。

在当前, 边坡的可靠度分析方法主要有最优化法、蒙特卡洛模拟法、响应面法、随机有限元法等^[1-2]; 同时, 被广泛应用到边坡可靠度分析的稳定性分析方法主要包括两大类: 刚体极限平衡法 (LEM)^[3-7]、有限单元法 (FEM)^[8-13]。LEM 方法的思想是: 首先假设一个滑裂面, 然后将滑裂面以上的土体进行条分, 并对条间力的方向进行人为的假设, 将一个

收稿日期: 2017-09-14

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51564026)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51564026).

第一作者简介: 张小艳, 女, 1981 年生, 博士研究生, 讲师, 主要从事结构可靠度方面的教学和科研工作。E-mail: 8246603@qq.com

通讯作者: 李泽, 男, 1981 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程方面的科研工作。E-mail: lize999@qq.com

超静定问题化成静定问题求解; LEM 方法由于概念简单、计算效率高已被广泛应用于工程实践。有限单元法(FEM)能使土体同时满足静力平衡条件、应变相容条件和本构关系,可获得边坡详细的应力、应变分布,并可根据单元的应力水平求解安全系数和滑裂面^[13-14],基于 FEM 方法可获得比 LEM 方法更合理的边坡可靠度分析结果^[15]。

在边坡稳定性分析法中,还有一类方法是极限分析法,其通过构建静力许可应力场和机动许可速度场来求解岩土体的极限状态的下限解和上限解,由于忽略材料本构关系,其计算效率、精度都较高。在确定性问题分析中,极限分析主要形成了三类方法:塑性极限分析变分法^[16]、基于条分法的塑性极限分析法^[17]、基于有限元离散的极限分析数值方法^[18-21]。近年来,随着计算机容量的大幅提升,使用有限元离散思想来构建复杂岩土体的静力许可应力场和机动许可速度场成为了可能,基于数值离散的极限分析方法越来越受到重视。在使用极限分析理论进行边坡可靠度分析方面,众多学者采用极限分析理论对边坡的可靠度进行了一些初步的、有益的研究工作,这些研究主要集中在基于条分法的上限分析法领域^[22-24],而使用极限分析数值方法进行边坡可靠度研究的成果非常少^[25-26]。

鉴于此,本文将极限分析上限理论、有限元离散技术、随机规划理论和蒙特卡洛理论结合起来,提出一种土质边坡可靠度分析的上限数值方法。

2 土质边坡可靠度分析的功能函数的建立

为了求解土质边坡极限荷载的分布规律,本文设土质边坡可靠度计算的极限状态函数为

$$Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

式中: $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为边坡的极限荷载; (X_1, X_2, \dots, X_n) 为极限状态函数的随机变量,本文中设随机变量是土体的凝聚力 c^r 和摩擦角 φ^r 。

本文的目的是求解土质边坡的极限外荷载,即求解边坡外力荷载 F_a 的极限值 F_c ,定义外力超载系数如下:

$$\lambda_F = F_c / F_a \quad (2)$$

式中: λ_F 为边坡的外力超载系数; F_c 为边坡的极限荷载; F_a 为边坡的当前实际作用的荷载,超载的外荷载可以是自重,也可以是边坡边界上作用的外力。

定义边坡的强度储备系数如下:

$$\lambda_m = c^r / c^r = \tan \varphi^r / \tan \varphi^r \quad (3)$$

式中: λ_m 为边坡的强度储备系数; c^r 、 φ^r 分别为土体进行强度折减前的凝聚力和内摩擦角的随机量; c^r 、 φ^r 分别为土体进行强度折减以后的凝聚力和内摩擦角的随机量。

在计算极限外荷载时引入土体抗剪参数的随机变量 c^r 和 φ^r , 则外力超载系数 λ_F 变成一个与 c^r 和 φ^r 相关的随机量 $\lambda_F(c^r, \varphi^r)$, 因此可将极限状态方程式(1)改写成如下形式:

$$Z = g(X) = F_c(c^r, \varphi^r) = \lambda_F(c^r, \varphi^r) \cdot F_a \quad (4)$$

式中: $\lambda_F(c^r, \varphi^r)$ 为与土体的凝聚力随机量 c^r 和摩擦角随机量 φ^r 相关的超载系数随机量; $F_c(c^r, \varphi^r)$ 为与土体的凝聚力随机量 c^r 和摩擦角随机量 φ^r 相关的极限荷载随机量。

3 土质边坡可靠度分析的上限法随机规划模型

上限定理是求解岩土体极限承载力的高效工具。上限法的原理是:首先构建土体的机动许可速度场,每一个速度场对应一个外荷载,最小的荷载必然最接近于真实的极限荷载,所以上限法一般可归结为一个求最小外荷载的数学规划问题。自从有限元离散技术被引入上限分析以后,精确地构建复杂岩土体的机动许可速度场已经容易实现^[19]。基于有限元离散的上限数值分析方法是:首先通过有限单元离散岩土体,然后构建同时满足单元塑性流动约束条件、单元公共边塑性流动约束条件和速度边界条件的机动许可速度场,并将极限荷载设为目标函数建立上限法数学规划模型,最终可求解得到极限荷载的上限解和对应的破坏机构。本文采用类似文献[19, 21]的方法建立土质边坡的机动许可速度场。

3.1 边坡土体的离散

为了构建土质边坡的机动许可速度场,本文采用非共节点的三角形有限单元来离散土体(如图 1(a)、1(b)所示),并以节点的速度为未知量,同时允许相邻单元之间存在速度间断,即相邻单元之间的公共边为速度不连续面,如图 1(c)所示。

3.2 三角形单元塑性流动约束条件

如将土体假设成理想刚塑性材料并符合关联流动法则,则由变形协调条件得到应变分量应该等于由关联流动法则以及屈服条件得到塑性应变率分量,

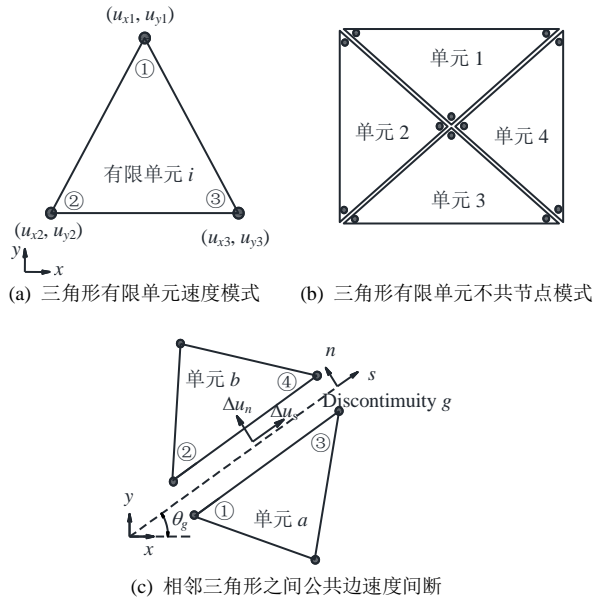


图 1 土体三角形有限单元离散

Fig.1 Numerical discretization of triangular finite element in soil

则三角形有限单元的塑性流动约束条件可表示如下:

$$\left. \begin{aligned} A_1^e u^e - A_2^e \lambda^e &= 0 \\ \lambda^e &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A_1^e &= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \\ A_2^e &= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_k & \cdots & A_p \\ B_1 & \cdots & B_k & \cdots & B_p \\ C_1 & \cdots & C_k & \cdots & C_p \end{bmatrix} \\ \lambda^e &= [\lambda_1^e \quad \cdots \quad \lambda_k^e \quad \cdots \quad \lambda_p^e]^T \\ u^e &= [u_1^e \quad u_2^e \quad u_3^e]^T \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $e = (1, \dots, n_1)$; n_1 为土体三角形有限单元单元的数量; A_e 为三角形单元的面积; λ_k^e ($k=1, \dots, p$) 为三角形单元的非负塑性乘子; p 为摩尔-库仑屈服面线性化时外接正多边形的边数; u_1^e 、 u_2^e 、 u_3^e 分别为三角形单元 e 3 个节点的速度向量分量; b_i 、 c_i 为线性三角形有限单元的形函数系数。

3.3 相邻单元之间公共边的塑性流动约束条件

为了满足机动许可的条件, 根据上限定理在相邻有限单元公共边上的不连续的切向、法向速度间断值必须符合关联流动准则, 则相邻有限单元 a 、 b 之间公共边 g 的塑性流动条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} A_1^g u^g - A_2^g \lambda^g &= 0 \\ \lambda^g &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A_1^g &= \begin{bmatrix} T^g & 0 \\ 0 & T^g \end{bmatrix} \\ u^g &= [u_{a1}^g \quad u_{b2}^g \quad u_{a3}^g \quad u_{b4}^g]^T \\ T^g &= \begin{bmatrix} \sin \theta_g & -\cos \theta_g & -\sin \theta_g & \cos \theta_g \\ -\cos \theta_g & -\sin \theta_g & \cos \theta_g & \sin \theta_g \end{bmatrix} \\ A_2^g &= \begin{bmatrix} \tan \varphi_g^r & \tan \varphi_g^r & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan \varphi_g^r & \tan \varphi_g^r \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda^g &= [\lambda_1^g \quad \lambda_2^g \quad \lambda_3^g \quad \lambda_4^g]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: $g = (1, \dots, n_2)$, λ^g 是公共边的塑性乘子, n_2 为土体中三角形有限单元公共边的数量; θ_g 为公共边的倾角(逆时针为正); φ_g^r 为公共边 g 的内摩擦角随机量(取 a 、 b 单元内摩擦角随机量的较小值)。

3.4 三角形单元速度边界条件

为了满足机动许可条件, 计算的速度场必须满足已知的速度边界条件。每个边界上的三角形单元有 2 个节点位于与 x 轴夹角为 θ_b 的边界上, 如果该边界上的速度为已知, 此时单元必须满足以下方程:

$$A^b u^b = B^b \quad (9)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A^b &= \begin{bmatrix} \cos \theta_b & \sin \theta_b \\ -\sin \theta_b & \cos \theta_b \end{bmatrix} \\ u^b &= [u_1^b \quad u_2^b]^T \\ B^b &= [\bar{u}_b^1, \bar{v}_b^1, \bar{u}_b^2, \bar{v}_b^2]^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $b = (1, \dots, n_3)$; n_3 为土体中边界三角形单元的数量; θ_b 为三角形单元边界的倾角; \bar{u}_b 、 \bar{v}_b 分别为边界上节点已知的切向速度和法向速度。

3.5 内功率等于外功率约束条件

土质边坡区域内所有三角形有限单元的内功率 W_{in1} 可按式计算:

$$W_{in1} = \sum_{e=1}^{n_1} (C^e \lambda^e) \quad (11)$$

式中: $C^e = 2A_e c^r \cos \varphi^r [l_1 \quad \cdots \quad l_k \quad \cdots \quad l_p]$ 。

相邻单元之间公共边的内功率 W_{in2} 为

$$W_{in2} = \sum_{g=1}^{n_2} (C^g \lambda^g) \quad (12)$$

式中: $C^g = 0.5 c_g^r l_g [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$; c_g^r 为土体公共边的凝聚力随机量(取 a 、 b 单元凝聚力随机量的较小值); l_g 为公共边的长度。

土体自重三角形单元节点速度上所做的外功功率 W_{Ex1} 为

$$W_{\text{Ex1}} = \sum_{e=1}^{n_2} (\mathbf{G}^e \mathbf{u}^e) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{G}^e = (-\gamma_e A_e / 3) [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$, 为单元自重三角形单元三个节点上形成的节点荷载的列向量; γ_e 为单元材料的重度。

外荷载 (边界的分布荷载、集中力等) 在单元节点速度 (位移增量) 上所做的外功功率 W_{Ex2} 为

$$W_{\text{Ex2}} = \sum_{e=1}^{n_2} (\mathbf{F}_a^e \mathbf{u}^e) \quad (14)$$

式中: $\mathbf{F}_a^e = [f_{x1} \ f_{y1} \ f_{x2} \ f_{y2} \ f_{x3} \ f_{y3}]$, 为是外荷载在三角形单元 3 个节点上形成的节点荷载的列向量; $(f_{xi}, f_{yi}, (i=1,2,3))$ 分别为有限单元 3 个节点的等效荷载沿 x 、 y 方向的分量。

由虚功原理得知, 土体有限单元中外力所做的虚功功率和物体内能的耗散功率相等, 并考虑超载系数 λ_F , 于是求解超载系数的内功功率与外功功率相等条件为

$$W_{\text{In1}} + W_{\text{In2}} = W_{\text{Ex1}} + \lambda_F W_{\text{Ex2}} \quad (15)$$

上式是一个非线性表达式, 为了避免求解非线性规划问题, 设 $W_{\text{Ex2}} = 1.0$, 则上式可等效成以下两个线性表达式:

$$W_{\text{In1}} + W_{\text{In2}} = W_{\text{Ex1}} + \lambda_F \quad (16)$$

$$W_{\text{Ex2}} = 1.0 \quad (17)$$

3.6 目标函数

本文的主要目的是求解土质边坡的极限荷载, 因此在构建上限法极限状态方程时将外力超载系数设为目标函数, 并求解目标函数的最小值。根据式 (16), 目标函数可写为

$$\text{Minimize: } \lambda_F = W_{\text{In1}} + W_{\text{In2}} - W_{\text{Ex1}} \quad (18)$$

3.7 上限法可靠度随机规划模型

根据极限状态函数式 (4), 目标函数式 (18), 约束条件式 (5)、(7)、(9)、(17), 可得到求解土质边坡可靠度的上限法随机规划模型如下:

$$\left. \begin{aligned} Z &= F_c(c^r, \varphi^r) = \lambda_F(c^r, \varphi^r) \cdot F_a \\ \text{Minimize: } \lambda_F &= W_{\text{In1}} + W_{\text{In2}} - W_{\text{Ex1}} \\ \text{Subject to: } \mathbf{A}_1^e \mathbf{u}^e - \mathbf{A}_2^e \lambda^e &= 0; \ e = (1, \dots, n_1) \\ \mathbf{A}_1^g \mathbf{u}^g - \mathbf{A}_2^g \lambda^g &= 0; \ g = (1, \dots, n_2) \\ \mathbf{A}^b \mathbf{u}^b &= \mathbf{B}^b \quad b = (1, \dots, n_3) \\ W_{\text{Ex2}} &= 1.0; \ \lambda^g \geq 0; \ \lambda^e \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式 (19) 是一个带有随机变量 (c^r, φ^r) 的随机规划问题, 决策变量是三角形有限单元节点的速度和塑性乘子, 求解的目标是: 由土体抗剪参数的随机变量 (c^r, φ^r) 求解极限荷载的随机量 $F_c(c^r, \varphi^r)$ 。

4 土质边坡的可靠度分析和风险评估

在传统的基于刚体极限平衡法或有限元法的边坡可靠度分析中, 一般是计算边坡的整体可靠度或失效风险^[4, 8, 15, 24], 即使用边坡的强度储备系数来求解边坡的整体失效概率, 当边坡的强度储备系数 ≥ 1 时边坡是稳定的 (整体安全)、当边坡的强度储备系数 < 1 时边坡发生失稳 (整体失效), 因此边坡的失效功能函数如下:

$$I_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_m(t) \geq 1 \\ 1 & \text{if } \lambda_m(t) < 1 \end{cases} \quad (20)$$

式中: $t = (1, \dots, N)$; N 为计算样本的数量。

则边坡的整体失效概率可按式计算:

$$P_{f,Z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N I_Z(t) \quad (21)$$

边坡的整体失效风险系数如下:

$$R = P_{f,Z} C_w \quad (22)$$

式中: C_w 为边坡整体失效的失效后果系数, 边坡失效后果系数为边坡失稳时的滑体的土体体积。

式 (22) 被广泛应用于边坡失效风险的计算, 但其也存在一些不足, 比如: 首先, 式 (22) 隐含地假定了边坡仅具有单一失效模式, 这与边坡存在多种失效模式是不相符的^[9, 26]; 其次, LEM 方法在求解前需要人为假设滑裂面, 因此其滑裂面并不一定是真实的滑裂面, 而 FEM 方法一般只能直接计算得到边坡的应力-应变分布规律, 边坡的安全系数和临界滑面的位置需要在后处理中单独使用辅助方法计算获得, 因此安全系数和滑面的位置并不是完全准确的, 从而导致 LEM 或 FEM 法对失效后果 (滑体体积) 进行统计时均存在不确定性^[9]。鉴于此, 李典庆^[9]、Huang^[26]等均提出了基于多滑动模式的边坡失效风险系数估算公式:

$$R = \sum_{i=1}^{N_f} P_i C_i \quad (23)$$

式中: P_i 为第 i 个失效模式的失效概率; C_i 为第 i 个失效模式的失效后果系数; N_f 为边坡失效模式的数目。

采用式 (23) 计算边坡的失效风险, 需要统计出边坡所有的失效模式, 然而, 无论是 LEM 法还

是 FEM 法, 在寻求边坡所有失效模式及其对应的安全系数时均需要在大样本空间中进行成千上万次反复的迭代, 其计算效率、计算精度均比较低^[15]。值得一提的是, 文献[26]根据式(23)提出了基于随机有限元(RFEM)的土质边坡可靠度极限分析法, 并在下限法中采用 K 聚类方法计算得到了边坡失效后果的下限解。由极限分析理论可知, 根据下限定理计算得到的下限解均小于真解, 因此, 在固定的失效模式下文献[26]的计算方法将会低估边坡的失效后果。

本文提出的上限数值方法综合了 LEM 和 FEM 方法各自的优点, 通过数学规划求解可同时获得边坡的安全系数和对应的速度场(破坏机构)。鉴于式(22)、(23)存在的不足, 本文提出一种新的基于上限法速度场的边坡失效风险系数估算公式。根据上限法理论, 当单元发生塑性流动时其相对于边界上固定不动的单元会产生相对速度; 因此在由上限法求解得到的失效模式对应的速度场中, 当单元速度大于 0 时代表此单元已发生塑性流动(失效)、当单元速度等于 0 时代表此单元未发生塑性流动(安全)。因此, 定义单元的失效功能函数如下:

$$I_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_e^e(t) = 0 \text{ and } \lambda_m < 1.0 \\ 1 & \text{if } u_e^e(t) > 0 \text{ and } \lambda_m < 1.0 \end{cases} \quad (24)$$

式中: $t = (1, \dots, N)$; u_e^e 为单元 e 的形心速度, 对于三角形有限单元 $u_e^e = (u_1^e + u_2^e + u_3^e)/3$ 。

则边坡中每个单元的失效概率可按下式计算:

$$P_{f,e} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N I_e(t) \quad (25)$$

式中: $P_{f,e}$ 为单元 e 的失效概率。

根据每个单元的失效概率, 可以求解整个边坡的失效风险系数如下:

$$R = \sum_{e=1}^{n_l} P_{f,e} C_e \quad (26)$$

式中: C_e 为单元 e 的失效后果系数, 当单元 e 的速度根据式(24)计算得到, 即 $I_e(t) = 1.0$ 时, 单元 e 的失效后果系数 C_e 取单元的土体体积。

式(26)相对于式(22), 其考虑了土体每个单元发生失效的可能性, 而不仅仅是考虑边坡单一的失效模式; 同时, 相对于式(23), 其只用计算每个单元的失效概率, 而不用逐一去统计所有的失效模式, 避免了大量繁杂的滑裂面搜索计算。

5 上限法随机规划模型的求解策略

上限法可靠度分析模型(式(19))的求解的本

质是: 根据土体参数随机量的数学特征求解极限荷载或安全系数的数学特征。从数学上来看, 式(19)是一个大规模的随机规划模型, 现阶段还没有成熟、稳定的直接求解方法, 本文提出一种基于蒙特卡洛统计试验方法的迭代法进行求解, 具体步骤如下:

(1) 确定土体参数的均值 μ 、变异系数 δ 和标准差 σ , 将土体抗剪参数的随机量离散为 N 个符合正态(或对数)分布的蒙特卡洛随机数;

(2) 使用三角形有限单元离散边坡, 根据式(19)构建满足目标函数式、约束条件式的土质边坡上限法随机规划模型;

(3) 将土体抗剪参数随机数从 1 到 N 循环, 逐次代入式(19), 此时式(19)变成一个约束矩阵是定值的线性规划问题, 使用二阶锥规划算法(SOCP)算法^[27]求解得到对应的极限荷载或安全系数;

(4) 将随机规划模型求解结果代入极限状态方程, 并统计计算边坡安全系数的数学分布、失效概率、失效风险系数等。

本文采用 Matlab 编写了相应计算程序, 计算程序包括 3 个部分: 前处理模块、计算模块和后处理模块。具体的数值求解流程详见图 2。

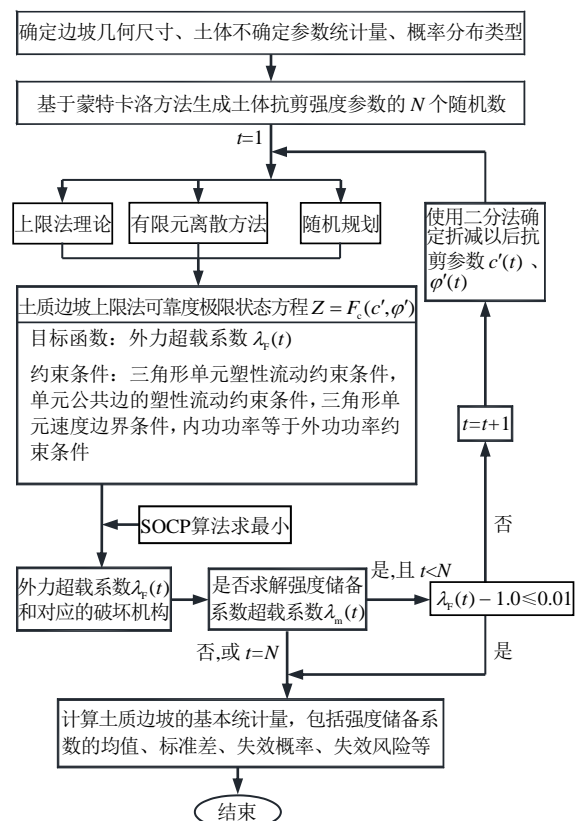


图 2 上限法可靠度分析的程序流程图
Fig.2 Flow chart of reliability analysis using upper bound method

6 算例分析

为了验证本文方法的正确性和有效性,选取了两个经典边坡进行了分析计算。

6.1 算例1 均质土坡可靠度分析

均质土坡如图3所示,坡高为8.0 m,坡顶宽度为4.0 m,坡比为1:2,坡顶作用有均布荷载 P 。诸多学者对此算例进行过分析^[25, 28]。当 $\gamma=0$, $\varphi=0$ 时,坡顶的极限荷载存在下限和上限的解析解,下限、上限解析解的计算公式分别为: $P_l=2c(1+\sin\alpha)$, $P_u=2c(1+\alpha)$, α 为坡面线与竖直线的夹角(如图3所示,单位为弧度)。在不排水状态下取土体凝聚力 $c_u=55.0$ kPa,同时取 $\gamma=0$, $\varphi=0$ 时,坡顶均布荷载的下限解、上限解分别为: $P_l=205.3$ kPa、 $P_u=225.2$ kPa。本文采用437个有限单元离散边坡,根据本文上限数值方法进行定值计算得到的极限荷载为 $P_c=233.2$ kPa,与上限法解析解的误差为3.54%。

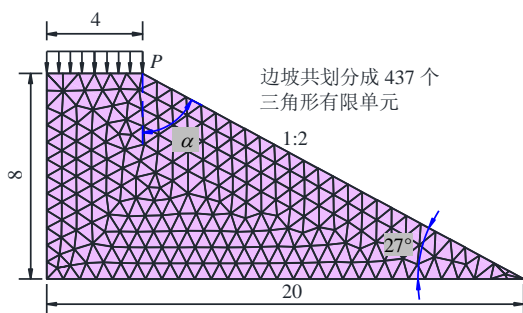


图3 算例1 土质边坡示意图(单位: m)
Fig.3 Sketch of soil slope of example 1 (unit: m)

当取凝聚力 $c_u=55.0$ kPa、变异系数 δ_c 分别为0.1、0.2、0.3,并设凝聚力为对数正态分布、样本数量取 $N=3\ 000$ 时计算得到的极限均布荷载的分布情况如图4和表1所示。根据结果可知,随着变异系数的增大,极限均布荷载的标准差、均值均增大,可靠度指标逐步减小;极限均布荷载的中位值基本不随变异系数的变化而变化,且中值比均值小,更接近于定值计算的上限解析解,这一规律与文献^[25]的结论是相同的,即对于抗剪参数服从正态(或对数)分布的边坡,极限荷载取中值比均值更有意义。经过多次试算,凝聚力的抽样样本数量 N 取2 000以上均可获得较好的模拟结果。在计算效率上,使用本文方法进行一次极限均布荷载的求解耗时需3.9 s(CPU是Intel i7 2.8 GHz,内存为12 GB),3 000次模拟计算耗时3.3 h;本文同时基于Matlab编制了并行计算程序,如使用4个CPU核心并行计

算,上述的计算时间分别是1.3 s和1.08 h;相比基于FEM的边坡可靠度计算本方法计算效率较高^[15]。

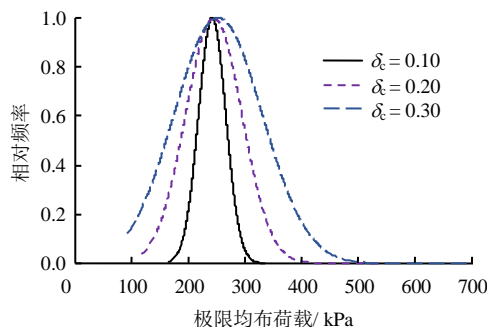


图4 算例1 坡顶极限均布荷载数学分布
Fig.4 Distribution of ultimate load of slope for example 1

表1 算例1 极限均布荷载统计
Table 1 Statistical table of uniformly distributed ultimate load for example 1

δ_c	均值 μ / kPa	中位值 / kPa	标准差 σ / kPa	可靠度 (μ/σ)	上限解析解 (定值求解) / kPa	均值与解 析解误差 / %	中值与解 析解误差 / %
0.10	242.02	241.21	24.12	10.03	225.19	7.47	7.11
0.20	244.99	240.22	49.76	4.92	225.19	8.79	6.67
0.30	252.64	240.88	78.10	3.23	225.19	12.19	6.97

在 $c_u=25.0$ kPa, $\gamma=18.0$ kN/m³, $\varphi=0$ 条件下,计算了5种变异系数条件下边坡的强度储备系数分布规律;本文采用如图2所示的迭代法计算边坡的强度储备系数,使用二分法思想进行迭代计算,平均迭代9次即可获得一个强度储备系数。同时为了对比分析,本文进行了基于LEM方法的可靠度计算,两种方法的计算结果如图5~7和表2所示。

由图5可知,凝聚力的变异系数越大,边坡的强度储备系数分布曲线越平缓、离散性越大,当凝聚力的变异系数从0.10增大至0.30时,强度储备系数上限解的标准差由0.15增加至0.47,均值也缓慢从1.46增加至1.52,但中值保持不变(为1.47)。

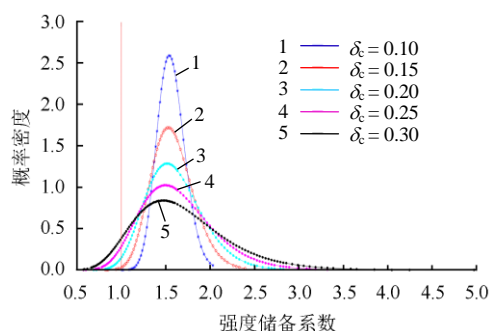


图5 算例1 强度储备系数概率密度分布
Fig.5 Probability density distribution of strength reserve coefficient of example 1

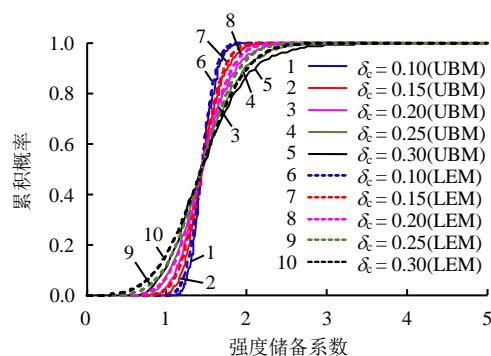


图6 算例1强度储备系数累计概率分布

Fig.6 Cumulative density distribution of strength reserve coefficient of example 1

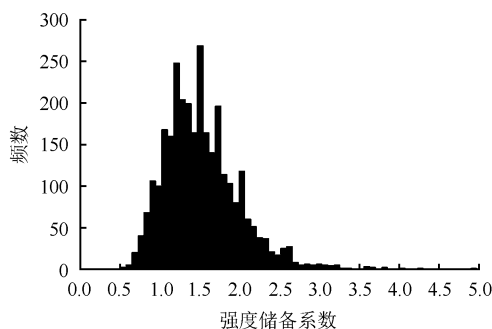
图7 算例1强度储备系数分布直方图($\delta_u = 0.3$)

Fig.7 Histogram of strength reserve coefficient of example 1

表2 算例1强度储备系数计算统计

Table 2 Statistical table of strength reserve coefficient

δ_c	本文上限法(UBM)					刚体极限平衡法(LEM)				
	均值	中位值	标准差	可靠度	$P_{f,z} / \%$	均值	中位值	标准差	可靠度	$P_{f,z} / \%$
0.10	1.46	1.47	0.15	10.04	0.00	1.43	1.42	0.15	9.53	0.10
0.15	1.47	1.47	0.22	6.66	0.40	1.43	1.42	0.23	6.22	1.04
0.20	1.48	1.47	0.30	4.98	2.83	1.43	1.42	0.30	4.76	4.40
0.25	1.50	1.47	0.39	3.96	6.53	1.44	1.42	0.38	4.66	9.35
0.30	1.52	1.47	0.47	3.24	10.37	1.44	1.42	0.45	3.79	14.39

本文方法计算得到的强度储备系数上限解的均值都大于相同条件下由 LEM 方法计算的均值,符合上限解的特性;图6中上限法得到的累计概率曲线均位于 LEM 方法曲线下方,两者误差均比较小。

本算例是一个不排水状态下的均质边坡,本文上限法和 LEM 方法均只搜索得到一种失效模式(如图8所示),根据式(21)由上限法得到的边坡整体失效概率 $P_{f,z}$ 略小于由 LEM 方法得到的失效概率。本文同时使用了式(22)和式(26)计算了边坡的失效风险系数,两种方法失效风险系数的统计结果如表3所示。图9显示了边坡的单元失效概率等值线,可非常直观地看出边坡每个部位的失效概率。使用整体概率法时上限法的失效风险系数小于 LEM

方法的结果,使用单元概率法时上限法的失效风险系数大于 LEM 方法的结果,误差均在 2% 以内。

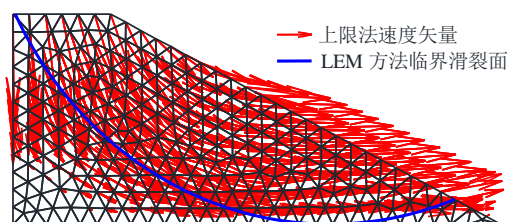


图8 算例1边坡失效模式对应的速度场(破坏机构)

Fig.8 Velocity field of failure mode of example 1

表3 算例1失效风险系数统计表

Table 3 Statistical table of coefficient of failure risk for example 1

方法	式(22) 计算结果			式(26) 计算结果
	$P_{f,z} / \%$	$C_w / (m^3/m)$	$R / (m^3/m)$	$R / (m^3/m)$
本文上限法	10.37	86.60	8.98	9.29
LEM 方法	14.39	63.30	9.11	

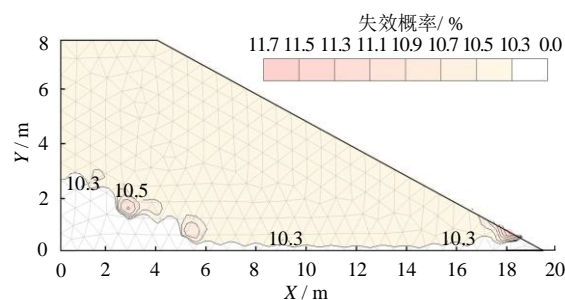


图9 算例1单元失效概率等值线(单位:%)

Fig.9 Contour of failure probability of element for example 1 (unit: %)

6.2 算例2 非均值土坡可靠度分析

非均质土坡如图10所示^[9, 15, 26],本算例的目的是检验本文方法对于存在多种失效模式边坡的可靠度计算的有效性。边坡上、下两层土的不排水抗剪强度均值分别取 80.0 kPa 和 120.0 kPa,变异系数均为 0.3,并假设抗剪强度的随机变量符合对数正态分布;两层土体重度设为定值,均取 19.0 kN/m³。边坡共离散为 922 个三角形单元,土体凝聚力参数的随机变量离散为 $N = 3\ 000$ 组样本。

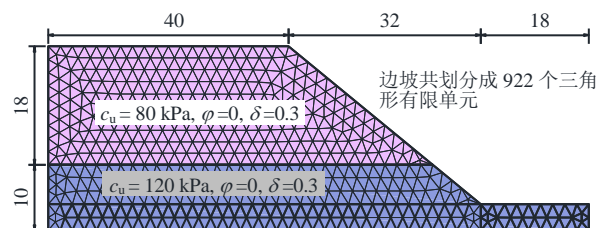


图10 算例2土质边坡示意图(单位:m)

Fig.10 Sketch of soil slope of example 2 (unit: m)

图 11 是本文方法计算得到的边坡强度储备系数分布规律, λ_m 的最大值为 2.97、最小值为 0.69、均值为 1.53、中位值为 1.51。图 12 和表 4 给出了本文方法与 LEM 方法的对比结果。上限法计算得到的均值略大于 LEM 法的结果、上限法计算得到的标准差略小于 LEM 法的结果, 但两者均非常接近。强度储备系数的累计概率分布曲线的上限解略低于 LEM 方法的解。

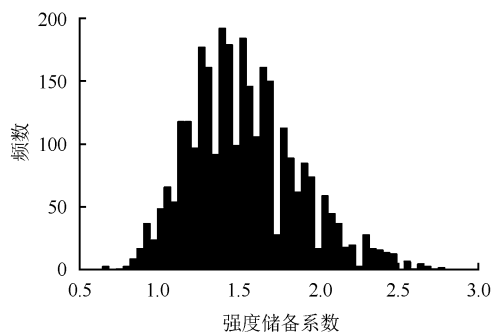


图 11 算例 2 强度储备系数分布

Fig.11 Distribution of strength reserve coefficient of example 2

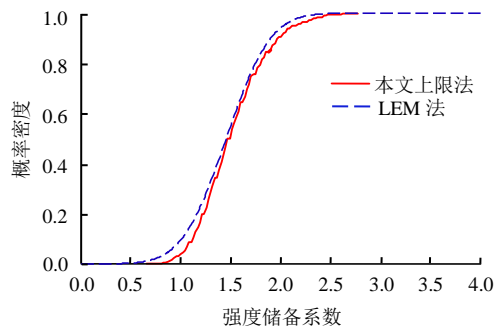


图 12 算例 2 强度储备系数累计概率分布

Fig.12 Cumulative density distribution of strength reserve coefficient of example 2

表 4 算例 2 强度储备系数计算统计

Table 4 Statistical table of strength reserve coefficient

方法	均值	标准差	$P_{tz} / \%$
本文上限法(UBM)	1.53	0.34	3.57
刚体极限平衡法(LEM)	1.52	0.35	6.39

使用 LEM 法, 此边坡默认只有一种失效模式: 如图 13 中的黑色圆弧滑裂面, 其对应的失效后果系数是 $737.85 \text{ m}^3/\text{m}$ 。但实际上, 此边坡存在多种失效模式, 文献[9]使用随机有限元法 (RFEM) 给出了边坡浅层滑坡、深层滑坡对应的两种典型的失效模式 (如图 13 中的蓝色线、粉红线)。

本文方法相比 LEM 法和 FEM 的最大优势在于可以捕捉到边坡所有的失效模式, 在 3 000 组计算

样本中共计获得了 107 组失效样本 ($\lambda_m < 1.0$); 根据每组失效模式对应的边坡失效后果系数的大小, 使用式 (23) 对失效样本进行了统计, 可将边坡的失效模式分成 8 种, 详见图 14 和表 5, 同时绘制了 8 种失效模式中第 1、2、3、8 种失效模式的破坏机构 (如图 13 所示)。由结果可知, 模式 1 (共计 41 个样本) 属于浅层滑坡, 失效后果系数在 $294 \sim 325 \text{ m}^3/\text{m}$; 模式 3~8 (共计 65 个样本) 属于深层滑坡, 失效后果系数在 $876 \sim 1\,095 \text{ m}^3/\text{m}$ 之间; 模式 2 (共计 1

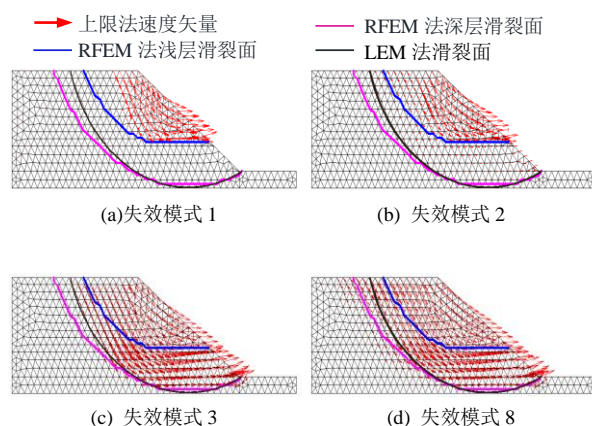


图 13 算例 2 典型的失效模式

Fig.13 Typical slope failure modes of example 2

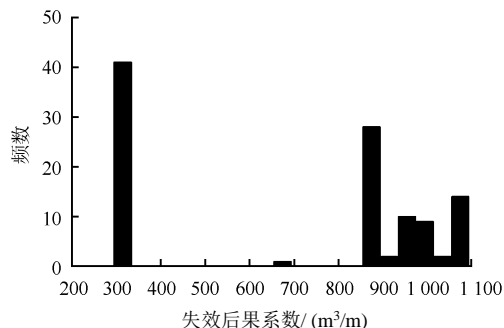


图 14 算例 2 失效后果系数直方图 ($\lambda_m < 1.0$)

Fig.14 Histogram of coefficient of failure consequence for example 2 ($\lambda_m < 1.0$)

表 5 多种失效模式的失效风险系数统计表

Table 5 Statistical table of coefficient of failure risk for multiple failure modes

失效模式	N_i	$P_i / \%$	$C_i / (\text{m}^3/\text{m})$	$R_i / (\text{m}^3/\text{m})$
模式 1	41	1.37	294~325	4.08
模式 2	1	0.03	670	0.23
模式 3	25	0.83	876~887	7.31
模式 4	5	0.17	889~902	1.49
模式 5	10	0.33	939~959	3.16
模式 6	10	0.33	980~1 016	3.35
模式 7	3	0.10	1 049~1 064	1.06
模式 8	12	0.40	1 065~1 095	4.32
总和	107	3.57		24.99

个样本) 介于浅层滑坡和深层滑坡之间, 失效后果系数在 $670 \text{ m}^3/\text{m}$ 左右。本文方法得到的发生浅层滑坡和深层滑坡的位置与 RFEM 法比较接近^[9], 但相比 RFEM 法本文方法能够给出更为详细的失效模式和对应的失效后果系数统计值。

图 15 是根据本文上限法计算结果绘制的边坡单元失效概率等值线, 其反映了边坡每个部位不同的失效概率。从理论上来说, 如果边坡只有一种失效模式(算例 1), 那么边坡滑体区域各个单元的失效概率应该都是基本相同的(如图 9 所示); 反之, 如果边坡有多种失效模式, 那么边坡体内每个部位的失效概率是不同的(如图 15 所示)。从图中可知, 浅层滑坡的土体区域的失效概率在 $2.8\% \sim 3.6\%$ 之间, 而发生深层滑坡的土体区域其失效概率在 $2.0\% \sim 2.8\%$ 之间; 多种失效模式中重叠的土体区域的失效概率最大, 如图 15 中黄色区域。

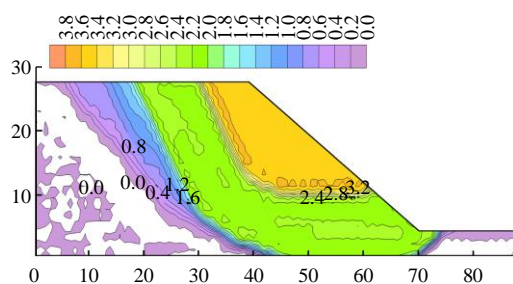


图 15 算例 2 单元失效概率等值线 (单位: %)
Fig.15 Contour of failure probability of element for example 2 (unit: %)

为了得到边坡的失效风险水平, 本算例使用了 3 种方法计算了边坡的失效风险系数如表 6 所示。首先根据 LEM 法的结果使用式 (22) 统计了边坡的失效风险系数, 然后使用上限法计算结果, 分别根据式 (23)、(26) 计算了边坡的失效风险系数。由于 LEM 默认边坡只发生深层滑坡, 深层滑坡的失效后果系数较大, 因此其计算得到的失效风险系数比根据本文上限解计算的结果大得多。根据本文上限解使用式 (23)、(26) 计算得到的失效风险系数则是近乎相等的, 这说明在已知边坡所有的失效模式和对应的失效风险系数的条件下, 式 (23)、(26) 是等价的, 但问题在于使用 LEM 法、FEM 或 RFEM 法计算时, 准确获取边坡所有的失效模式是较为困难的^[9, 15, 26]。

在本文上限法的计算中式 (23)、(26) 是两种不同的原理, 式 (23) 需要统计所有的失效模式和对应的失效后果系数, 本算例对应的是 107 种失效

模式; 式 (26) 只需根据上限法计算结果一次性计算边坡每个单元的失效概率, 而且每个单元的失效后果系数(单元面积)是固定的。因此, 从计算上来说, 式 (26) 比式 (23) 更为简捷; 而且根据式 (26) 得到的边坡失效概率等值线对于判断边坡每个部位的安全度更加直观。

表 6 算例 2 失效风险系数统计表 (单位: m^3/m)
Table 6 Statistical table of coefficient of failure risk of example 2 (unit: m^3/m)

LEM 法式 (22)	上限法式 (23)	上限法式 (26)
47.15	24.97	24.99

7 结 论

(1) 本文将有限元离散技术、上限定理、数学规划手段和蒙特卡洛模拟方法结合起来, 提出了一种基于边坡可靠度计算的上限法, 能够获得边坡承载力上限解的可靠度指标, 该方法具有坚实的数学基础和鲜明物理意义。

(2) 本文提出了一种基于上限法速度场的单元失效概率估算方法, 在单一破坏模式下此方法与传统整体失效概率法的计算结果相近; 但在具有多失效模式的边坡可靠度计算中, 本文方法就体现出了优越性, 可同时获得每种失效模式发生的概率以及边坡每个部位(单元)的失效概率, 这对全面判断边坡的安全度更具有参考意义。

(3) 本文方法同时结合了 LEM 法和 FEM 的优点, 不用假设边坡的滑裂面, 也不使用土体材料的本构方程, 可获得安全系数和对应的破坏机构, 计算较为便捷; 该方法特别适用于具有多种失效模式的边坡可靠度分析, 能界定边坡所有的失效模式和对应的极限状态, 并合理地计算不同失效模式下边坡的失效概率和风险水平。

(4) 本文在求解上限法随机规划问题时使用了蒙特卡洛方法, 需要进行上千次的抽样模拟, 本文编制了基于 Matlab 的并行计算程序, 大大地提升了计算效率。

(5) 根据上限理论, 本文方法获得的安全系数属于上限解, 其必然大于真解, 因此使用强度储备系数的上限解来统计边坡的整体失效概率时, 一定会低估边坡的失效概率; 同时上限法获得的边坡破坏机构的范围一般会大于真实的破坏机构的范围, 因此使用上限解对应的速度场来统计边坡的失效后果系数一般会高估边坡的失效后果系数; 那么失效概率、失效后果系数两者乘积得到的失效风险系数

的误差区间是不容易判断的。要解决这一问题,需要在今后的研究工作中进行基于下限理论的边坡可靠度计算方法的研究;如果通过下限、上限分析能够同时获得边坡失效概率、失效后果系数的下限解、上限解,则可准确判断真实失效概率、失效后果系数所处的区间范围,可更精确地量化边坡的可靠度指标。由于研究工作的复杂性,本文研究工作仅仅限于上限法范畴。

参考文献

- [1] WANG Y, CAO Z J, AU S K. Efficient Monte Carlo simulation of parameter sensitivity in probabilistic slope stability analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(7/8): 1015—1022.
- [2] CHO S E. Probabilistic stability analyses of slopes using the ANN-based response surface[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(5): 787—797.
- [3] HASSAN A M, WOLFF T F. Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, 127(2): 301—308.
- [4] 吴振君, 王水林, 葛修润. LHS 方法在边坡可靠度分析中的应用[J]. 岩土力学, 2010, 31(4): 1047—1054.
WU Zhen-jun, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of Latin hypercube sampling technique to slope reliability analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(4): 1047—1054.
- [5] CAO Z, WANG Y, LI D. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2011, 48(1): 162—172.
- [6] CHING J, PHOON K K, HU Y G. Efficient evaluation of reliability for slopes with circular slip surfaces using importance sampling[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2009, 135(6): 768—777.
- [7] 郑栋, 李典庆, 曹子君, 等. 土体参数空间变异性对边坡失效模式间相关性及其系统可靠度的影响[J]. 岩土力学, 2017, 38(2): 517—524.
ZHENG Dong, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. Effect of spatial variability on correlation between slope failure modes and system reliability of slope stability[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(2): 517—524.
- [8] 谭晓慧, 王建国. 边坡的弹塑性有限元可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(1): 44—50.
TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo. Slope reliability analysis using elasto-plastic finite element method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(1): 44—50.
- [9] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于高效随机有限元法的边坡风险评估[J]. 岩土力学, 2016, 37(7): 1994—2003.
LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-jun, et al. Slope risk assessment using efficient random finite element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(7): 1994—2003.
- [10] 谭晓慧, 王建国, 刘新荣, 等. 边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(1): 115—122.
TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo, LIU Xin-rong, et al. Finite element reliability computation and sensitivity analysis of slope stability[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(1): 115—122.
- [11] 吴振君, 王水林, 葛修润. 约束随机场下的边坡可靠度随机有限元分析方法[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 3086—3092.
WU Zhen-jun, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Slope reliability analysis by random FEM under constraint random field[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(10): 3086—3092.
- [12] 蒋水华, 魏博文, 姚池, 等. 考虑概率分布影响的低概率水平边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6): 1071—1080.
JIANG Shui-hua, WEI Bo-wen, YAO Chi, et al. Reliability analysis of soil slopes at low-probability levels considering effect of probability distributions[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(6): 1071—1080.
- [13] 谭晓慧, 王建国, 刘新荣, 等. 边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(1): 115—122.
TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo, LIU Xin-rong, et al. Finite element reliability computation and sensitivity analysis of slope stability[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(1): 115—122.
- [14] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by

- finite elements[J]. **Geotechnique**, 2004, 51(7): 653—654.
- [15] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于极限平衡法和有限元法的边坡协同式可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6): 1004—1013.
- LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-jun, et al. Auxiliary slope reliability analysis using limit equilibrium method and finite element method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(6): 1004—1013.
- [16] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, 125(1): 59—68.
- [17] DONALD L, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1997, 34(6): 853—862.
- [18] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1988, 12(1): 61—77.
- [19] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1995, 127(1): 293—314.
- [20] 王均星, 李泽, 陈炜. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的有限元下限分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(8): 1258—1262.
- WANG Jun-xing, LI Ze, CHEN Wei. Lower bound analysis of soil slope stability using finite elements subjected to pore water pressure[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(8): 1258—1257.
- [21] 王均星, 李泽. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的有限元上限分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(2): 213—218.
- WANG Jun-xing, LI Ze. Upper bound analysis of stability of soil slope subjected to pore water pressure using finite elements[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(2): 213—218.
- [22] 梧松, 吴玉山. 边坡可靠度的随机斜条分法上限解[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(10): 1727—1729.
- WU Song, WU Yu-shan. Random slope stability analysis by upper bound approach[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(10): 1727—1729.
- [23] 吴贲. 基于极限分析上限法条分形式的边坡可靠度分析[J]. 现代矿业, 2017, (5): 212—214.
- WU Ben. Reliability analysis of slope based on upper bound method of limit analysis by using slices method[J]. **Modern Mining**, 2015, 577(5): 212—214.
- [24] 张道兵, 潘秋景, 杨小礼, 等. 用极限分析方法计算边坡可靠度上限值[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2014, 37(7): 59—65.
- ZHANG Dao-bing, PAN Qiu-jing, YANG Xiao-li, et al. Upper bound solution of reliability for slope based on limit analysis method[J]. **Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)**, 2014, 37(7): 59—65.
- [25] 李亮, 刘宝琛. 边坡极限承载力的下限分析法及其可靠度理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(4): 508—508.
- LI Liang, LIU Bao-chen. Lower bound limit analysis on bearing capacity of slope and its reliability[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2001, 20(4): 508—513.
- [26] HUANG J, LYAMIN A V, GRIFFITHS D V, et al. Quantitative risk assessment of landslide by limit analysis and random fields[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 53(3): 60—67.
- [27] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. **International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 31(6): 835—865.
- [28] 王均星, 李泽. 基于非线性规划的有限元塑性极限分析下限法研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1471—1476.
- WANG Jun-xing, LI Ze. Research on lower bound method of plastic limit analysis using finite element based on nonlinear programming[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(6): 1471—1476.