

层状横观各向同性地基平面应变问题的扩展精细积分解

艾智勇^{1,2}, 张逸帆^{1,2}, 王路君^{1,2}

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 利用扩展精细积分法求解横观各向同性地基的平面应变问题。扩展精细积分法具有高精度和较高计算效率的特点, 是求解微分方程的有效方法, 相比于解析法可以节省大量理论推导工作量。从直角坐标下弹性力学控制方程出发, 推导出 Fourier 变换域内地基的常微分矩阵方程; 之后对地基微层元进行消元合并, 进一步得到荷载作用在地基内部时层状地基的扩展精细积分解。与已有文献的对比验证了方法的精确性, 并分析了横观各向同性参数、层状性质和荷载作用点对计算结果的影响。结果表明: 土体竖向位移随着横观各向同性参数 n 的增大而减小, 而随着横观各向同性参数 m 的增大而增大; 荷载作用点 z' 的变化只对作用点以上的土体有影响, 而上层土体的模量对竖向位移计算结果的影响更为显著, 土体成层性对沉降的影响要比对竖向应力的影响更为显著。

关 键 词: 横观各向同性; 层状地基; 平面应变; 扩展精细积分法

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)05-1885-07

Extended precise integration solution for plane strain problem of transversely isotropic multilayered soils

AI Zhi-yong^{1,2}, ZHANG Yi-fan^{1,2}, WANG Lu-jun^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In this paper, the extended precise integration method is used to solve the plane strain problem of transversely isotropic multilayered soils. Extended precise integration method is of high accuracy and efficiency, which is an effective method to solve differential equations. Compared with analytical methods, it can save a lot of time for theoretical derivation. Starting with the governing equations of elasticity in Cartesian coordinates, the matrix differential equation in the Fourier transform domain is derived. Then, the establishment and combination of adjacent layer elements are introduced, and the extended precise integration solution of multilayered soils subjected to internal loads can be obtained further. The comparison with existing results verifies the accuracy and correctness of this method, and numerical examples are presented to elucidate the influence of transverse isotropy, stratification and load position. It turns out that the vertical displacement decreases with the increase of modulus ratio n , and increases with the increase of modulus ratio m . Besides, soils above the loading point z' is more sensitive to change of load position, while the modulus of upper soils is more important to the results of vertical displacement, and stratification of the soils has more significant influence on vertical displacement compared with vertical stress.

Keywords: transverse isotropy; layered soil; plane strain; extended precise integration method

1 引 言

天然土体是长期自然沉积形成, 往往呈现出横观各向同性和层状的性质。岳中琦等^[1]利用双重

Fourier 变换研究了考虑体力的垂直不均匀横观各向同性弹性体问题; 王林生^[2]采用柔度矩阵递推法计算横观各向同性成层地基; 陈光敬等^[3]利用 Hankel 变换推导出轴对称横观各向同性地基的解;

顿志林等^[4]通过位移解法得到横观各向同性地基的通解；艾智勇等^[5]运用解析层元法求解出二维平面应变横观各向同性层状地基的精确解。

精细积分法^[6]是求解微分方程的有效方法，并已成功应用在层状介质中波的传播^[7]、多孔介质固结^[8]及热力耦合响应^[9]等问题中。对于比较复杂的地基模型问题，例如层状横观各向同性地基固结及层状横观各向同性地基热力耦合响应等问题，采用解析方法推导其显式表达的解析解是十分困难的，这时采用简单易行的数值解法反而可以节省大量理论推导和计算的工作量。精细积分法无需推导出问题的显式解答且具有高精度及较高计算效率的特点^[6-8]，无疑是最佳的选择之一，故本文尝试利用精细积分法来求解横观各向同性地基问题。扩展精细积分法是考虑任意位置受荷时层状地基时受力与变形问题的精细积分法，它是将文献^[6]中提到的第2类精细积分法与积分变换技术结合运用的一种尝试，也是对精细积分法应用的一个扩展。首先在Fourier变换域内推导出地基的常微分矩阵方程；之后对地基微层元进行消元合并，得到荷载作用在地基内部的扩展精细积分解。最后对扩展精细积分解的精确性和可行性进行验证，并分析横观各向同性参数、层状性质和荷载作用点对计算结果的影响。

2 地基的常微分矩阵方程

直角坐标下，不计体力时，横观各向同性体平面应变问题的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

用几何方程表示的物理方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： u_z 、 u_x 为位移分量。且有

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \lambda n(1 - n\mu_{vh}^2) \\ c_{13} &= \lambda n\mu_{vh}(1 + \mu_h) \\ c_{33} &= \lambda(1 - \mu_h^2) \\ c_{44} &= G_v \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$n = E_h / E_v \quad (4)$$

$$\lambda = E_v / [(1 + \mu_h)(1 - \mu_h - 2n\mu_{vh}^2)] \quad (5)$$

式中： E_h 为水平向弹性模量； E_v 为竖向弹性模量； G_v 为竖直面上的剪切模量； μ_h 为水平向应力引起的正交水平向应变的泊松比； μ_{vh} 为竖向应力引起的水平向应变的泊松比。

式(1)和式(2)中，3个应力分量 σ_z 、 σ_x 、 τ_{xz} 是 u_z 、 u_x 的函数，消去 σ_x ，推导可得

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_z \\ u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_3}{c_{33}} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_{44}} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{1}{c_{33}} & -\frac{c_3}{c_{33}} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \sigma_z \\ u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

为求解式(6)的偏微分方程组，对其进行Fourier变换，Fourier变换以及逆变换分别定义为

$$(\bar{\tau}_{xz}, \bar{\sigma}_z, \bar{u}_x, \bar{u}_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\tau_{xz}, \sigma_z, iu_x, u_z) e^{i\xi x} dx \quad (7)$$

$$(\tau_{xz}, \sigma_z, u_x, u_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\bar{\tau}_{xz}, \bar{\sigma}_z, -i\bar{u}_x, \bar{u}_z) e^{-i\xi x} d\xi \quad (8)$$

式中：含有上标“-”的符号代表Fourier域内的变量； ξ 为关于 x 的Fourier变换参数， $i = \sqrt{-1}$ 。

利用式(7)的Fourier变换，可将式(6)转化为如下常微分方程组：

$$\frac{d}{dz} [W(z)] = HW(z) \quad (9)$$

$$H = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$W(z) = [V(z), U(z)]^T = [i\bar{\tau}_{xz}, \bar{\sigma}_z, i\bar{u}_x, \bar{u}_z]^T \quad (11)$$

$$V(z) = [i\bar{\tau}_{xz}, \bar{\sigma}_z]^T \text{ 和 } U(z) = [i\bar{u}_x, \bar{u}_z]^T \quad (12)$$

式中： $W(z)$ 、 $V(z)$ 分别代表Fourier变换域内的应力和位移。Fourier变换域内的常微分方程矩阵 H 是由矩阵 A 及其转置 A^T 和对称矩阵 B 、 D 构成，且有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_{13}}{c_{33}} \xi \\ -\xi & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{44}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{33}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}} \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3 微层元的消元与合并

对于 z 向的一个区段 $[z_a, z_b]$ ，其状态空间向量分布如图 1 所示。

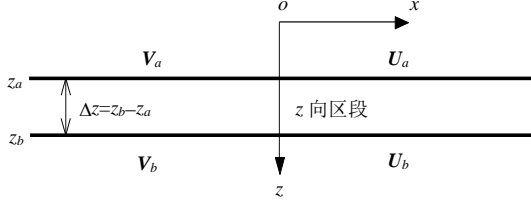


图 1 z 向区段

Fig.1 A layer element in z direction

保守系统中某区段上下界面处的状态空间向量存在如下典型的关联^[6]：

$$\begin{cases} V_b = FV_a - GU_b \\ U_a = QV_a + F^T U_b \end{cases} \quad (14)$$

式中： F 、 G 、 Q 都是待求的矩阵，它们皆是 z_a 与 z_b 的函数。

对于定常系统，即 H 矩阵与 z 无关时， F 、 G 、 Q 只是关于区段长 Δz 的函数。将矩阵 F 、 G 、 Q 进行四阶幂级数展开，可得

$$\begin{cases} F(\tau) = I + F^*(\tau) \\ F^*(\tau) = f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 \\ Q(\tau) = \theta_1\tau + \theta_2\tau^2 + \theta_3\tau^3 + \theta_4\tau^4 \\ G(\tau) = \gamma_1\tau + \gamma_2\tau^2 + \gamma_3\tau^3 + \gamma_4\tau^4 \end{cases} \quad (15)$$

系数矩阵 f_i 、 θ_i 、 γ_i ($i=1\sim 4$) 可由矩阵 A 、 B 、 D 表示如下：

$$\begin{cases} f_1 = A, f_2 = \frac{Af_1 + \gamma_1 B}{2}, f_3 = \frac{Af_2 + \gamma_2 B + \gamma_1 Bf_1}{3} \\ f_4 = \frac{Af_3 + \gamma_3 B + \gamma_2 Bf_1 + \gamma_1 Bf_2}{4} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = -B, \theta_2 = -\frac{f_1^T B + Bf_1}{2}, \theta_3 = -\frac{f_2^T B + Bf_2 + f_1^T Bf_1}{3} \\ \theta_4 = -\frac{f_3^T B + Bf_3 + f_1^T Bf_1 + f_1^T Bf_2}{4} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = -D, \gamma_2 = \frac{A\gamma_1 + \gamma_1 A^T}{2}, \gamma_3 = \frac{A\gamma_2 + \gamma_2 A^T + \gamma_1 B\gamma_1}{3} \\ \gamma_4 = \frac{A\gamma_3 + \gamma_3 A^T + \gamma_2 B\gamma_1 + \gamma_1 B\gamma_2}{4} \end{cases} \quad (18)$$

将式 (16) ~ (18) 代入式 (15)，则区段矩阵 F 、 G 、 Q 可由已知矩阵 A 、 B 、 D 表示。需要说明的是，式 (15) 中将 $F(\tau)$ 表示为单元矩阵 I 和 $F^*(\tau)$ 之和的形式，这是因为当 τ 很小时 $F^*(\tau)$ 相比于 I 是一个极小的矩阵，若在数值计算中直接用 $F(\tau)$ ，由于计算机储存精度的问题， $F^*(\tau)$ 可能被消去而得不到精确的结果，故实际计算过程中只进行关于 $F^*(\tau)$ 的运算，再得到 $F(\tau)$ 。

式 (14) 建立的关系具有普遍性，可以用来表达任意微层元上、下界面状态变量之间的关系。如图 2 所示，将相邻两个微层元 $[z_a, z_b]$ 和 $[z_b, z_c]$ 放在一起考虑，分别有

$$\begin{cases} V_b = F_1 V_a - G_1 U_b \\ U_a = Q_1 V_a + F_1^T U_b \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} V_c = F_2 V_b - G_2 U_c \\ U_b = Q_2 V_b + F_2^T U_c \end{cases} \quad (20)$$

式中： F_i 、 G_i 、 Q_i ($i=1, 2$) 都是对应于微层元 i 的待求关系矩阵。联立式 (19) 和式 (20)，消去中间界面状态变量 V_b 和 U_b ，便可建立起 z_a 与 z_c 界面上空间状态变量之间的联系，具体表达式为

$$\begin{cases} V_c = F_3 V_a - G_3 U_c \\ U_a = Q_3 V_a + F_3^T U_c \end{cases} \quad (21)$$

式中：合并后形成的微层元 3 的关系矩阵分别为

$$\begin{cases} F_3 = F_2 (I + G_1 Q_2)^{-1} F_1 \\ G_3 = G_2 + F_2 (G_1^{-1} + Q_2)^{-1} F_2^T \\ Q_3 = Q_1 + F_1^T (Q_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1 \end{cases} \quad (22)$$

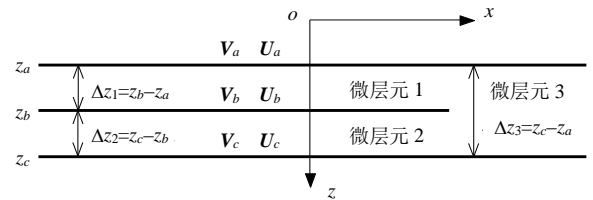


图 2 相邻微层元的合并

Fig.2 Combination of adjacent layer elements

4 层状地基的精细积分解答

如图 3 所示，对于成层地基，根据外力的作用深度 H_F 和计算点位置 H_C 的不同，一般都可划分为 3 个大层元（为表述方便，以下称为“层块”），分别为：地基表面至荷载作用深度（或计算点深度）之间的层块 $[a, b]$ ，荷载作用深度与计算点深度之间

的层块 $[b,c]$ ，以及计算点深度（或荷载作用深度）到地基地面之间的层块 $[c,d]$ 。显然，当 $H_F < H_C$ 时， b 指荷载作用深度， c 为计算点深度；而当 $H_F > H_C$ 时，则相反。各层块可以是单个天然土层，也可能是由多个天然土层组合而成（如图3虚线所对应）。通过各层块内部微层元的合并消元，分别形成各自的关系矩阵，即 \hat{F}_i 、 \hat{G}_i 、 \hat{Q}_i （ $i=1\sim 3$ ）。

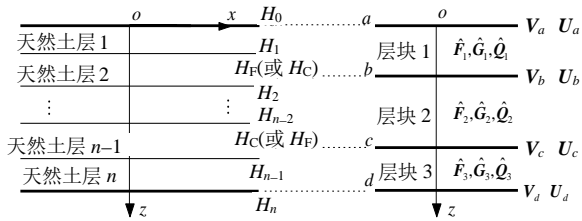


图3 划分地基的3个层元

Fig.3 A multilayered system of three blocks

首先讨论 $H_F < H_C$ 时的情况：

对于 $[a,b]$ 层块，有

$$\left. \begin{aligned} V_b^- &= \hat{F}_1 V_a - \hat{G}_1 U_b^- \\ U_a &= \hat{Q}_1 V_a + \hat{F}_1^T U_b^- \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

对于 $[b,c]$ 层块，有

$$\left. \begin{aligned} V_c &= \hat{F}_2 V_b^+ - \hat{G}_2 U_c \\ U_b^+ &= \hat{Q}_2 V_b^+ + \hat{F}_2^T U_c \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中： V_b^- 和 U_b^- 、 V_b^+ 和 U_b^+ 分别为界面 b 上、下面的应力与位移。

对于 $[c,d]$ 层块，有

$$\left. \begin{aligned} V_d &= \hat{F}_3 V_c - \hat{G}_3 U_d \\ U_c &= \hat{Q}_3 V_c + \hat{F}_3^T U_d \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由于界面 b 处可能有外荷载 P_V 的作用或是存在位移 P_U 的错位，则有

$$\left. \begin{aligned} V_b^+ &= V_b^- - P_V \\ U_b^+ &= U_b^- - P_U \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

通过关系式(23)、(24)、(26)，消去 b 界面处的状态空间向量，可得到 $[a,c]$ 层块上下表面变量之间的联系。再利用 $[c,d]$ 层块的关系式(25)，可得计算点界面 c 处应力与位移的表达式：

$$\left. \begin{aligned} V_c &= (I + \hat{G}_{12} \hat{Q}_3)^{-1} (\hat{F}_{12} V_a - \hat{G}_{12} \hat{F}_3^T U_d - \hat{R}_1 P_V - \hat{S}_1 P_U) \\ U_c &= \hat{Q}_3 V_c + \hat{F}_3^T U_d \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中，关系矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_{12} &= \hat{F}_2 (I + \hat{G}_1 \hat{Q}_2)^{-1} \hat{F}_1 \\ \hat{G}_{12} &= \hat{G}_2 + \hat{F}_2 (\hat{G}_1^{-1} + \hat{Q}_2)^{-1} \hat{F}_2^T \\ \hat{Q}_{12} &= \hat{Q}_1 + \hat{F}_1^T (\hat{Q}_2^{-1} + \hat{G}_1)^{-1} \hat{F}_1 \\ \hat{R}_1 &= \hat{F}_2 (I + \hat{G}_1 \hat{Q}_2)^{-1} \\ \hat{S}_1 &= \hat{R}_1 \hat{G}_1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

当 $H_F > H_C$ 时，同样可列出各层块的关系矩阵方程，并推导出计算点所在界面 b 处应力与位移：

$$\left. \begin{aligned} V_b &= \hat{F}_1 V_a - \hat{G}_1 U_b \\ U_b &= (I + \hat{Q}_{23} \hat{G}_1)^{-1} (\hat{Q}_{23} \hat{F}_1 V_a + \hat{F}_{23}^T U_d - \hat{R}_2 P_V - \hat{S}_2 P_U) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

显然，式(29)中关系矩阵 \hat{F}_{23} 、 \hat{G}_{23} 、 \hat{Q}_{23} 、 \hat{R}_2 、 \hat{S}_2 分别同式(28)中的 \hat{F}_{12} 、 \hat{G}_{12} 、 \hat{Q}_{12} 、 \hat{R}_1 、 \hat{S}_1 对应，这时只需将式(28)中等式右边各元素的下标1、2分别用2、3轮替，就可很方便地获得它们的表达式。

若假定地基表面应力为0，而地基地面的位移受到约束也为0，则地基的边界条件可以表示为

$$\left. \begin{aligned} V(0) &= [0, 0]^T \\ U(H_n) &= [0, 0]^T \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

则式(27)与式(29)可分别简化为

$$\left. \begin{aligned} V_c &= -(I + \hat{G}_{12} \hat{Q}_3)^{-1} (\hat{R}_1 P_V + \hat{S}_1 P_U), U_c = \hat{Q}_3 V_c \\ U_b &= -(I + \hat{Q}_{23} \hat{G}_1)^{-1} (\hat{R}_2 P_V + \hat{S}_2 P_U), V_b = -\hat{G}_1 U_b \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

对于 $H_F = H_C$ ，或是 $H_F = 0$ ，或是 $H_C = 0$ 的情况，属于以上3层块划分法的特例。这时只需根据不同情况，将那些不存在的层块的关系矩阵 \hat{F} 、 \hat{G} 、 \hat{Q} 分别用 I 、0、0取代，那么仍然可以套用上述理论，实现对多层地基问题的计算。

5 验证

5.1 横观各向同性地基的验证

本文计算过程通过Matlab软件编制程序完成，采用多层次结构算法来实现数值运算，其详细过程可参考文献[7]。为了方便分析，假定地基表面受到集度为 p ，宽度为 $2a$ 的均布荷载。定义各项参数如下：横观各向同性参数 $n = E_h / E_v$ ， $m = G_v / E_v$ ；作用点作用深度为 z' ，无量纲位移 $u_z^* = G_v u_z / (pa)$ 。为验证本文理论的正确性，取单层横观各向同性地

基，并与解析层元解^[5]进行比较。算例条件为：土层厚度 $\Delta h = 30 \text{ m}$ ， $n = 2$ ， $m = 0.3$ ， $\mu_{vh} = \mu_h = 0.25$ ，作用点作用深度为 $z'/a = 0$ 。沿 z 轴竖向位移见图4，由图可见，本文计算结果与解析层元解^[5]所得的结果吻合度非常高。

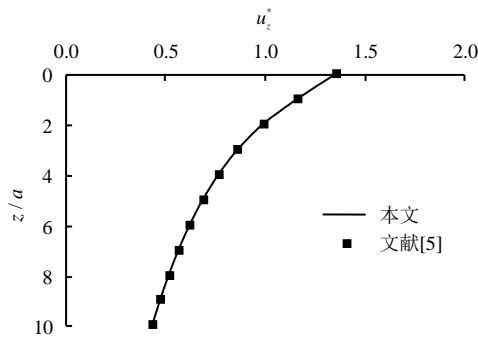


图4 沿 z 轴竖向位移

Fig.4 Vertical displacement along the z -axis

5.2 层状地基的验证

为验证本文扩展精细积分法在层状体系中的适用性，本节对均布荷载作用下的3层地基进行计算，并与文献[10]进行对比。地基表面作用有强度为 p 、宽度为 $2a$ 的均布荷载，每层厚度分别为 $h_1 = a$ ， $h_2 = 2a$ ， $h_3 = 100a$ 以模拟平面半空间。每层土体为各向同性介质，且计算参数有如下关系： $E_1 = 0.2E_2$ ， $E_1 = 0.1E_3$ ， $\mu_1 = \mu_2 = 0.25$ ， $\mu_3 = 0.35$ 。不同计算点处竖向应力的计算结果如表1所示，其中 i 表示第 i 层， $\sigma_z^* = \sigma_z/q$ 。对比表中结果可知，在不同计算点处，本文结果与文献[10]均吻合较好。

表1 竖向应力结果对比
Table 1 Comparisons of vertical stresses

$\frac{x}{a}$	$\frac{z}{h_i}$	i	σ_z^*	
			文献[10]	本文
0	0	1	-1.000	-1.040
1	0	1	-0.500	-0.490
0	1	1	-0.388	-0.382
0	1	2	-0.388	-0.382

6 算例分析

6.1 横观各向同性参数 n 的影响

令 $n = 1, 2, 3$ 进行计算，其他算例条件均同验证算例 5.1。在随后算例中，除被研究参数，其他参数也均同验证算例。沿 z 轴竖向位移见图5，由图可见，土体竖向位移随着横观各向同性参数 n 的增大而减小；但其影响会随着 n 的增大而逐渐减小。

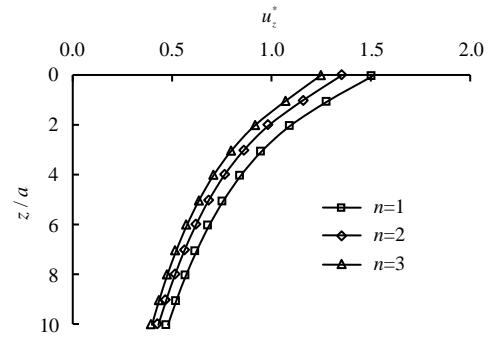


图5 参数 n 对 z 轴竖向位移的影响

Fig.5 Influences of n on vertical displacement along the z -axis

6.2 横观各向同性参数 m 的影响

m 分别取 0.2、0.3、0.4 进行计算。沿 x 轴的沉降见图6。由图可以发现，土体沿 x 轴的沉降随着横观各向同性参数 m 的增大而增大；并且相对于横观各向同性参数 n ，参数 m 的影响更为明显。

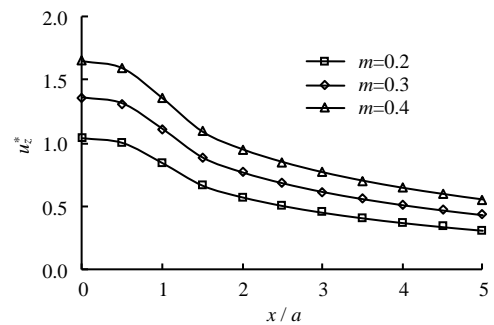


图6 参数 m 对 x 轴竖向位移的影响

Fig.6 Influences of m on vertical displacement along the x -axis

6.3 荷载作用点 z' 的影响

z'/a 分别取 0、2、4 进行计算。沿 z 轴竖向位移见图7。由图可以发现，荷载作用点以上的土体竖向位移受影响较大，其绝对值随着荷载深度增加而减小；而荷载作用点下部的土体受影响较小。

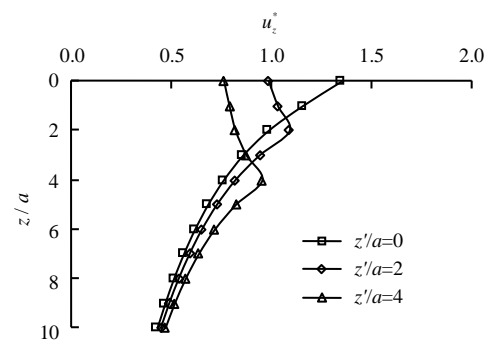


图7 参数 z'/a 对 z 轴竖向位移的影响

Fig.7 Influences of z'/a on vertical displacement along the z -axis

6.4 地基成层性的影响

取 3 层横观各向同性地基来分析成层性对计算结果的影响。地基每层厚度 $\Delta h = 10 \text{ m}$ ，其竖向弹性模量见表 2。沿 x 轴沉降及沿 z 轴竖向应力分布分别如图 8 和 9 所示。由图 8 可知，上层土体的模量对竖向位移的计算结果影响较为显著。由图 9 可知，靠近地基上表面处，3 种工况下的竖向应力基本相同，随着深度的增加，土体模量的影响逐渐凸显。对比图 8 和 9 还可以发现：地基的分层特性对沉降的影响要比对竖向应力的影响更为显著。

表 2 计算工况一览

Table 2 The list of different calculation cases

工况	E_{v1} / MPa	E_{v2} / MPa	E_{v3} / MPa
工况 1	3	2	1
工况 2	3	2	2
工况 3	6	2	2

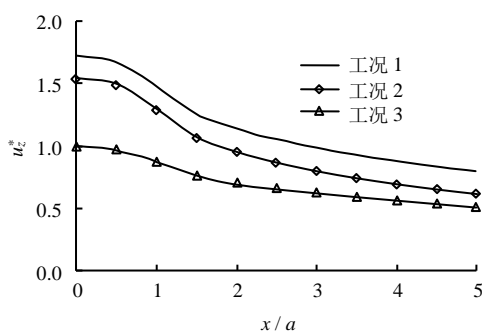


图 8 地基成层性对 x 轴竖向位移的影响
Fig.8 Influences of stratification on vertical displacement along x -axis

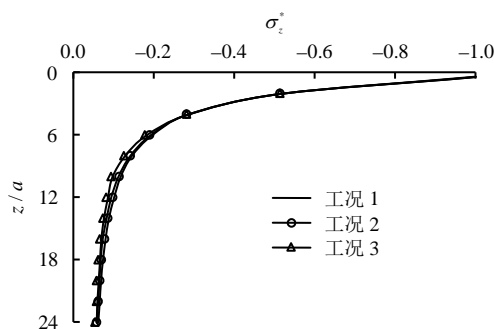


图 9 地基成层性对 z 轴竖向应力的影响
Fig.9 Influences of stratification on vertical stress along z -axis

7 结 论

利用扩展精细积分法求解横观各向同性地基平面应变问题。首先在 Fourier 变换域内推导出单层横

观各向同性地基的常微分矩阵方程；之后对地基微层元进行消元合并，得到荷载作用在地基内部时层状地基的扩展精细积分解。通过与已有文献进行对照，验证精细积分法的精确性；分析横观各向同性参数、层状性质和荷载作用点对计算结果的影响。结果表明：

- (1) 土体竖向位移随着参数 n 的增大而减小，随着参数 m 的增大而增大。
- (2) 荷载作用点 z'/a 的变化对作用点以上的土体有较大影响。
- (3) 地基的分层特性对沉降的影响要比对竖向应力的影响更为显著。

参 考 文 献

- [1] 岳中琦, 王仁. 多层横观各向同性弹性体静力学问题的解[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1988, 24(2): 202—211.
YUE Zhong-qi, WANG Ren. Static solution for transversely isotropic elastic N -layered systems[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 1988, 24(2): 202—211.
- [2] 王林生. 用柔度矩阵递推法计算横观各向同性成层地基[J]. 河海大学学报, 1989, 17(2): 104—110.
WANG Lin-sheng. Flexibility matrix recursion method to solve transversely isotropic multilayered soil[J]. *Journal of Hohai University*, 1989, 17(2): 104—110.
- [3] 陈光敬, 赵锡宏, 于立. 传递矩阵法求解成层横观各向同性弹性体轴对称问题[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 105—108.
CHEN Guang-jing, ZHAO Xi-hong, YU Li. Transferring matrix method to solve axisymmetric problems of layered cross-anisotropic elastic body[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1998, 20(5): 105—108.
- [4] 顿志林, 刘干斌, 苒向阳. 层状横观各向同性地基轴对称问题的位移解法[J]. 焦作工学院学报(自然科学版), 2002, 21(6): 420—426.
DUN Zhi-lin, LIU Gan-bin, CHANG Xiang-yang. Displacement function method of axisymmetrical problem with transversely isotropic layers[J]. *Journal of Jiaozuo Institute of Technology(Natural Science)*, 2002, 21(6): 420—426.