

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.1504

层状地基中基于 Laplace 变换的 桩基横向振动阻抗计算

熊 辉, 江雅丰, 禹荣霞

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 基于 Laplace 变换, 对层状地基中桩土横向振动阻抗计算问题进行了研究。考虑土层天然分层的特性及桩顶轴向力的参与作用, 结合频域内桩-土动力文克尔理论, 采用传递矩阵法并通过拉普拉斯变换, 将振动微分方程变成代数方程以求解桩的横向振动响应参数, 并导出了单桩横向振动阻抗。基于所得解, 进一步计算出桩-土-桩水平动力相互作用因子。通过实例分析对比, 验证其有效性和可行性。该方法计算工作量小, 易于理解, 计算结果与已有结果具有良好的一致性, 并能保证解的连续性, 对桩-土动力相互作用的研究具有一定的实用意义。

关 键 词: 层状地基; 传递矩阵法; Laplace 变换; 桩-土相互作用; 横向振动阻抗

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018)05-1901-07

Lateral vibration impedance of piles embedded in layered soil based on Laplace transform

XIONG Hui, JIANG Ya-feng, YU Rong-xia

(Department of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: Using Laplace transform, the calculation on lateral vibration impedance of pile-soil interaction embedded in layered soil is investigated. Vibration differential equation of pile-head in layered-soil with axial loading is transformed into algebraic equations by means of transfer matrix method and Laplace transform to solve the parameters of piles for the lateral vibration response. Combined with dynamic Winkler model in the frequency domain, the lateral vibration impedance of a pile is derived. Based on the obtained solution, the pile-soil-pile lateral dynamic interaction factors is deduced. Through theoretical analyses of practical problems, the present method is verified to be applicable and efficient. The method is simple to use, and the calculated results agree well with the existing results. Moreover, the present method can give a continuous solution and applied to the analysis of pile-soil interaction.

Keywords: layered soil; transfer matrix method; Laplace transform; pile-soil interaction; lateral vibration impedance

1 引 言

桩基础作为一种特殊的埋置基础, 具有承载力高、沉降量小而均匀、抗震性能好、抗拉能力强等优点, 且能够很好地适应各种地质条件, 容易满足各种建筑物的不同要求, 使得桩在土木工程中有广泛的应用, 因此, 研究桩-土间的动力相互作用具有重大的工程意义。目前, 在桩-土动力相互作用的研究中主要是针对桩-土体系动力阻抗的研究。Elahi 等^[1]采用群桩动力相互作用中的边界元法, 并通过

对由土体位移引起的被动桩进行分析, 比较准确地评估了桩身内力与变形。蒯行成等^[2]采用有限单元法分析承台埋置在土中的群桩的动力阻抗。刘林超等^[3]基于有限元整体建模和单桩文克尔模型, 进行了阻抗特性研究。有限元法、边界元法等数值方法虽然较为精确, 但计算量大, 难以应用于大型问题^[4-5]。因此, 采用简化方法计算桩基动力阻抗成为桩土相互作用研究的重要部分。熊辉等^[6]基于动力文克尔梁模型, 充分考虑土天然分层的特性以及桩顶轴向力的影响, 导出了新的计算层状介质中水平动力因

收稿日期: 2016-06-20

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划项目 (No. NCET-13-190); 湖南省科技计划项目 (No. 2013FJ4214)。

This work was supported by the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-13-190) and the Science and Technology Project of Hunan Province (2013FJ4214).

第一作者简介: 熊辉, 男, 1975 年生, 博士, 副教授, 主要从事结构抗震及土-结构相互作用的研究工作。E-mail: xionghui5320@163.com

子的方法。蒯行成等^[7]采用 Winkler 模型导出了层状土中桩基竖向振动的单元复刚度矩阵,并提出了计算动力相互作用因子的方法。

采用 Laplace 变换技术可进一步简化桩基振动方程的计算。吴文兵等^[8]基于虚土桩模型,结合 Laplace 变换求得了瞬态荷载下桩基纵向振动响应的解析解。郑长杰等^[9]基于 Laplace 变换和分离变量方法,求得了桩周土和桩芯土频域响应解析解,并得出了桩顶复阻抗解析式。雷文军等^[10]运用 Laplace 变换,求得了桩基振动方程的解,并提出了计算群桩动力阻抗的新方法。本文根据已有的研究成果,结合传递矩阵法,将 Laplace 变换引入到计算桩-土相互作用的振动微分方程中,并运用弹性元件和黏性元件的组合单元,建立了层状地基中桩-土相互作用模型。

2 桩基横向振动阻抗求解

2.1 层状土中单桩的横向阻抗

本文在分析层状土中单桩的横向阻抗时考虑了轴力的作用^[11]。如图 1 所示,将土层分为 n 层,对第 k 层土,位移是关于深度和时间的函数,根据桩段单元的动力平衡条件可写出桩水平振动时的运动微分方程:

$$m_p \frac{\partial^2 u_k(z,t)}{\partial t^2} + f_{uk}^R u_k(z,t) + f_{uk}^I \frac{\partial u_k(z,t)}{\partial t} + E_p I_p \frac{\partial^4 u_k(z,t)}{\partial z^4} + N_k(z) \frac{\partial^2 u_k(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

式中: u_k 为第 k 层土位置处的桩水平位移; m_p 为桩身线质量; z 为土层深度; t 为时间; f_{uk}^R 、 f_{uk}^I 分别为第 k 层土的水平抗力的实部和虚部,按 Dobry 等^[12]给出的沿单位桩长土抗力的简化式计算; E_p 为桩体弹性模量; I_p 为桩体横截面惯性矩; $N_k(z)$ 为轴向力。

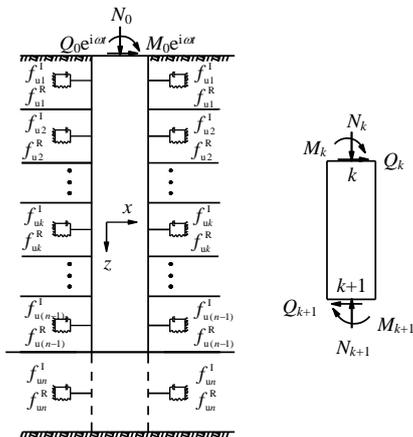


图 1 单桩计算模型

Fig.1 Computational model of single pile

图 1 中, M_k 和 Q_k 分别为第 k 层土位置处的桩身弯矩和剪力; i 为虚数单位, ω 为振动荷载圆频率。假设在水平谐荷载作用下,桩的激励位移为

$$u_k(z,t) = u_k(z) e^{i\omega t} \quad (2)$$

则有

$$E_p I_p \frac{\partial^4 u_k(z)}{\partial z^4} + N_k(z) \frac{\partial^2 u_k(z)}{\partial z^2} + (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I - m_p \omega^2) u_k(z) = 0 \quad (3)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{uk} &= \sqrt{N_k(z) / (E_p I_p)} \\ \eta_{uk} &= [(f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I - m_p \omega^2) / (E_p I_p)]^{1/4} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则式 (3) 化简为

$$\frac{\partial^4 u_k(z)}{\partial z^4} + \zeta_{uk}^2 \frac{\partial^2 u_k(z)}{\partial z^2} + \eta_{uk}^4 u_k(z) = 0 \quad (5)$$

对式 (5) 两边进行 Laplace 变换:

$$U_k(z) = \frac{u_k(0)s^3 + \zeta_{uk} u_k'(0)s^2 + [u_k''(0) + \zeta_{uk}^2 u_k(0)]s + u_k'''(0)}{s^4 + \zeta_{uk}^2 s^2 + \eta_{uk}^4} \quad (6)$$

将上式进行部分分式展开:

$$U_k(z) = \frac{a_k s + b_k}{s^2 + \alpha_k^2} + \frac{c_k s + d_k}{s^2 + \beta_k^2} \quad (7)$$

式中: s 为 Laplace 变换常数。且有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k^2 &= (\zeta_{uk}^2 + \sqrt{\zeta_{uk}^4 - 4\eta_{uk}^4}) / 2 \\ \beta_k^2 &= (\zeta_{uk}^2 - \sqrt{\zeta_{uk}^4 - 4\eta_{uk}^4}) / 2 \\ a_k &= \frac{\alpha_k^2 u_k(0) - [u_k''(0) + \zeta_{uk}^2 u_k(0)]}{\alpha_k^2 - \beta_k^2} \\ b_k &= \frac{\zeta_{uk}^2 \alpha_k^2 u_k'(0) - u_k'''(0)}{\alpha_k^2 - \beta_k^2} \\ c_k &= \frac{u_k''(0) + \zeta_{uk}^2 u_k(0) - \beta_k^2 u_k(0)}{\alpha_k^2 - \beta_k^2} \\ d_k &= \frac{u_k'''(0) - \beta_k^2 \zeta_{uk}^2 u_k'(0)}{\alpha_k^2 - \beta_k^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对上式进行 Laplace 逆变换, 可得

$$\left. \begin{aligned} u_k(z) &= a_k \cos(\alpha_k z) + b_k / \alpha_k \sin(\alpha_k z) + c_k \cos(\beta_k z) + d_k / \beta_k \sin(\beta_k z) \\ \phi_k(z) &= -a_k \alpha_k \sin(\alpha_k z) + b_k \cos(\alpha_k z) - c_k \beta_k \sin(\beta_k z) + d_k \cos(\beta_k z) \\ M_k(z) &= E_p I_p [a_k \alpha_k^2 \cos(\alpha_k z) + b_k \alpha_k \sin(\alpha_k z) + c_k \beta_k^2 \cos(\beta_k z) + d_k \beta_k \sin(\beta_k z)] \\ Q_k(z) &= E_p I_p [-a_k \alpha_k^3 \sin(\alpha_k z) + b_k \alpha_k^2 \cos(\alpha_k z) - c_k \beta_k^3 \sin(\beta_k z) + d_k \beta_k^2 \cos(\beta_k z)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中： ϕ_k 为第 k 层土位置处的桩身转角。

对于第 1 层，有

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \text{inv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ E_p I_p \alpha_1^2 & 0 & E_p I_p \beta_1^2 & 0 \\ 0 & E_p I_p \alpha_1^2 & 0 & E_p I_p \beta_1^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ \phi_1(0) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = J_{u,0} \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \phi_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ Q_1(h_1) \end{Bmatrix}$$

式中：inv 表示矩阵求逆计算。

$$\begin{Bmatrix} u_n(h_n) \\ \phi_n(h_n) \\ M_n(h_n) \\ Q_n(h_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_n h_n) & \frac{\sin(\alpha_n h_n)}{\alpha_n} & \cos(\beta_n h_n) & \frac{\sin(\beta_n h_n)}{\beta_n} \\ -\alpha_n \sin(\alpha_n h_n) & \cos(\alpha_n h_n) & -\beta_n \sin(\beta_n h_n) & \cos(\beta_n h_n) \\ E_p I_p \alpha_n^2 \cos(\alpha_n h_n) & E_p I_p \alpha_n \sin(\alpha_n h_n) & E_p I_p \beta_n^2 \cos(\beta_n h_n) & E_p I_p \beta_n \sin(\beta_n h_n) \\ -E_p I_p \alpha_n^3 \sin(\alpha_n h_n) & E_p I_p \alpha_n^2 \cos(\alpha_n h_n) & -E_p I_p \beta_n^3 \sin(\beta_n h_n) & E_p I_p \beta_n^2 \cos(\beta_n h_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{Bmatrix} =$$

$$J_{u,n} J_{u,n-1} J_{u,n-2} \cdots J_{u,1} J_{u,0} \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ \phi_1(0) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = J_{u,n}^* \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ \phi_1(0) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

对于端承桩，底端嵌固， $u_n(h_n) = 0$ ， $\phi_n(h_n) = 0$ ，代入上式可得

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ \phi_1(0) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = \text{inv}(J_{u,n}^*) \begin{Bmatrix} u_n(h_n) \\ \phi_n(h_n) \\ M_n(h_n) \\ Q_n(h_n) \end{Bmatrix} =$$

$$\text{inv} \begin{bmatrix} J_{u,11}^* & J_{u,12}^* & J_{u,13}^* & J_{u,14}^* \\ J_{u,21}^* & J_{u,22}^* & J_{u,23}^* & J_{u,24}^* \\ J_{u,31}^* & J_{u,32}^* & J_{u,33}^* & J_{u,34}^* \\ J_{u,41}^* & J_{u,42}^* & J_{u,43}^* & J_{u,44}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_n(h_n) \\ Q_n(h_n) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} J_{u,24}^* J_{u,33}^* K_1 + J_{u,34}^* J_{u,23}^* K_2 & -J_{u,34}^* J_{u,13}^* K_2 - J_{u,33}^* J_{u,14}^* K_1 \\ J_{u,24}^* J_{u,43}^* K_1 + J_{u,44}^* J_{u,23}^* K_2 & -J_{u,44}^* J_{u,13}^* K_2 - J_{u,43}^* J_{u,14}^* K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ \phi_1(0) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{J_{u,24}^* J_{u,13}^* - J_{u,23}^* J_{u,14}^*} \\ K_2 &= \frac{1}{J_{u,23}^* J_{u,14}^* - J_{u,13}^* J_{u,24}^*} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.2 群桩横向振动惯性相互作用因子的计算

本文的推导采用两桩间动力相互作用分析

根据界面不分离的原则，可知分层界面处的各项参数保持一致： $u_{k+1}(0) = u_k(h_k)$ ， $\phi_{k+1}(0) = \phi_k(h_k)$ ， $M_{k+1}(0) = M_k(h_k)$ ， $Q_{k+1}(0) = Q_k(h_k)$ ，其中 h_k 为第 k 层土层厚度。

$$\{a_{k+1} \ b_{k+1} \ c_{k+1} \ d_{k+1}\}^T = J_{u,k} \{a_k \ b_k \ c_k \ d_k\}^T \quad (12)$$

对于第 n 层，有

$$\{a_n \ b_n \ c_n \ d_n\}^T = J_{u,n-1} J_{u,n-2} \cdots J_{u,1} J_{u,0} \{u_1(0) \ \phi_1(0) \ M_1(0) \ Q_1(0)\}^T \quad (13)$$

由式 (10) 可得

步法^[13]，计算模型如图 2 所示，根据达朗贝尔方程，可得被动桩的水平振动微分方程：

$$m_p \frac{\partial^2 u_{21}^k(z,t)}{\partial t^2} + F_{sp} + E_p I_p \frac{\partial^4 u_{21}^k(z,t)}{\partial z^4} + N_k(z) \frac{\partial^2 u_{21}^k(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

式中： $u_{21}^k(z,t)$ 为第 k 层土中被动桩 2 在源桩 1 的影响下产生的位移； F_{sp} 为桩土相互运动过程中土给予被动桩的桩侧土反力^[14]。考虑几何，材料等衰减，引入折减系数来表征能量耗散，桩侧土反力可写为

$$F_{sp} = \chi_k (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I) [u_{21}^k(z,t) - u_{11}^k(z,t)] \quad (19)$$

式中： $u_{11}^k(z,t)$ 为第 k 层土中源桩的动力位移； χ_k 为折减系数，表征桩-土运动时的衰减作用，与被动桩与源桩的距离和角度有关。当 $z \in (0, h_n)$ ，考虑在水平谐荷载作用下，则有

$$E_p I_p \frac{\partial^4 u_{21}^k(z)}{\partial z^4} + N_k(z) \frac{\partial^2 u_{21}^k(z)}{\partial z^2} + [\chi_k (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I) - m_p \omega^2] u_{21}^k(z) = \chi_k (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I) u_{11}^k(z) \quad (20)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{uk} &= \sqrt{N_k(z) / E_p I_p} \\ \kappa_{uk} &= \left[\chi_k (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I) - m_p \omega^2 \right] / E_p I_p \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

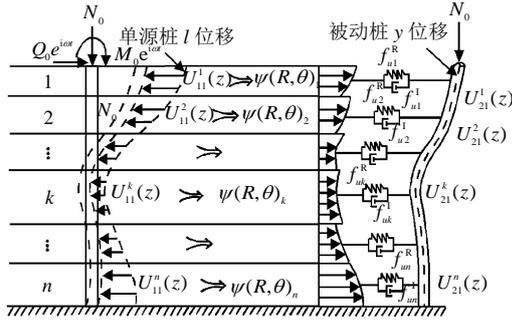


图2 桩-土相互作用模型
Fig.2 Model of pile-soil interaction

图2中, $\psi(R, \theta)_k$ 为衰减系数, 即运动波位移幅值散射至土中的减幅程度。

$$\frac{\partial^4 u_{21}^k(z)}{\partial z^4} + \zeta_{uk}^2 \frac{\partial^2 u_{21}^k(z)}{\partial z^2} + \kappa_{uk}^4 u_{21}^k(z) = \frac{\chi_k}{E_p I_p} (f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I) u_{11}^k(z) \quad (22)$$

在前述中已求得源桩动力反应的解, 令

$$\left. \begin{aligned} u_k(z) &= u_{11}^k(z), \phi_k(z) = \phi_{11}^k(z) \\ Q_k(z) &= Q_{11}^k(z), M_k(z) = M_{11}^k(z) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由此可得方程的解:

$$\left. \begin{aligned} u_{21}^k(z) &= a_k \cos(\alpha_k z) + b_k / \alpha_k \sin(\alpha_k z) + c_k \cos(\beta_k z) + d_k / \beta_k \sin(\beta_k z) + \lambda_k \chi_k u_{11}^k(z) \\ \phi_{21}^k(z) &= -a_k \alpha_k \sin(\alpha_k z) + b_k \cos(\alpha_k z) - c_k \beta_k \sin(\beta_k z) + d_k \cos(\beta_k z) + \lambda_k \chi_k \phi_{11}^k(z) \\ M_{21}^k(z) &= E_p I_p [a_k \alpha_k^2 \cos(\alpha_k z) + b_k \alpha_k \sin(\alpha_k z) + c_k \beta_k^2 \cos(\beta_k z) + d_k \beta_k \sin(\beta_k z)] + \lambda_k \chi_k M_{11}^k(z) \\ Q_{21}^k(z) &= E_p I_p [-a_k \alpha_k^3 \sin(\alpha_k z) + b_k \alpha_k^2 \cos(\alpha_k z) - c_k \beta_k^3 \sin(\beta_k z) + d_k \beta_k^2 \cos(\beta_k z)] + \lambda_k \chi_k Q_{11}^k(z) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中:

$$\lambda_k = \frac{f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I}{f_{uk}^R + i\omega f_{uk}^I - m_p \omega^2} \quad (25)$$

注意此处 a_k 、 b_k 、 c_k 、 d_k 、 α_k 、 β_k 与前述的同类符号所代表的值不同。根据界面不分离的原

则, 可知分层界面处的各项参数保持一致。引入层面条件:

$$\left. \begin{aligned} u_{21}^{k+1}(0) &= u_{21}^k(h_k), \phi_{21}^{k+1}(0) = \phi_{21}^k(h_k) \\ M_{21}^{k+1}(0) &= M_{21}^k(h_k), Q_{21}^{k+1}(0) = Q_{21}^k(h_k) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

对于第 n 层, 有

$$\left\{ \begin{aligned} u_{21}^n(h_n) \\ \phi_{21}^n(h_n) \\ M_{21}^n(h_n) \\ Q_{21}^n(h_n) \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_n h_n) & \frac{\sin(\alpha_n h_n)}{\alpha_n} & \cos(\beta_n h_n) & \frac{\sin(\beta_n h_n)}{\beta_n} \\ -\alpha_n \sin(\alpha_n h_n) & \cos(\alpha_n h_n) & -\beta_n \sin(\beta_n h_n) & \cos(\beta_n h_n) \\ E_p I_p \alpha_n^2 \cos(\alpha_n h_n) & E_p I_p \alpha_n \sin(\alpha_n h_n) & E_p I_p \beta_n^2 \cos(\beta_n h_n) & E_p I_p \beta_n \sin(\beta_n h_n) \\ -E_p I_p \alpha_n^3 \sin(\alpha_n h_n) & E_p I_p \alpha_n^2 \cos(\alpha_n h_n) & -E_p I_p \beta_n^3 \sin(\beta_n h_n) & E_p I_p \beta_n^2 \cos(\beta_n h_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_n \chi_n u_{11}^n(z) \\ \lambda_n \chi_n \phi_{11}^n(z) \\ \lambda_n \chi_n M_{11}^n(z) \\ \lambda_n \chi_n Q_{11}^n(z) \end{bmatrix} = H_n \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_1^n \\ I_2^n \\ I_3^n \\ I_4^n \end{Bmatrix} \quad (27)$$

引入桩顶边界条件: $\{u_{21}^1(0) \ \phi_{21}^1(0) \ 0 \ 0\}^T$, 可得

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \text{inv} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ E_p I_p \alpha_1^2 & 0 & E_p I_p \beta_1^2 & 0 \\ 0 & E_p I_p \alpha_1^2 & 0 & E_p I_p \beta_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 u_{11}^1(0) \\ \phi_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 \phi_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0) \end{Bmatrix} = H_0 \begin{Bmatrix} u_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 u_{11}^1(0) \\ \phi_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 \phi_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

由式 (27) 递推关系可得

$$\begin{Bmatrix} u_{21}^k(h_k) \\ \phi_{21}^k(h_k) \\ M_{21}^k(h_k) \\ Q_{21}^k(h_k) \end{Bmatrix} = H_k \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_1^k \\ I_2^k \\ I_3^k \\ I_4^k \end{Bmatrix} = H_k H_{k-1} \cdots H_0 \cdot \begin{Bmatrix} u_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 u_{11}^1(0) \\ \phi_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 \phi_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_1^1 \\ I_2^1 \\ I_3^1 \\ I_4^1 \end{Bmatrix} + H_k \begin{Bmatrix} I_1^{k-1} \\ I_2^{k-1} \\ I_3^{k-1} \\ I_4^{k-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_1^k \\ I_2^k \\ I_3^k \\ I_4^k \end{Bmatrix} = H_k^* \begin{Bmatrix} u_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 u_{11}^1(0) \\ \phi_{21}^1(0) - \lambda_1 \chi_1 \phi_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0) \\ -\lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \\ \xi_3^k \\ \xi_4^k \end{Bmatrix} \quad (29)$$

对于端承桩，引入边界条件，即桩端嵌固时位移和转角为 0，则可得到被动桩的位移：

$$\left. \begin{aligned} u_{21}^1(0) &= \frac{-\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0)(H_{n,12}^* H_{n,23}^* - H_{n,22}^* H_{n,13}^*) - \lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0)(H_{n,12}^* H_{n,24}^* - H_{n,22}^* H_{n,14}^*) + (H_{n,12}^* \xi_2^0 - H_{n,22}^* \xi_1^0)}{H_{n,22}^* H_{n,11}^* - H_{n,12}^* H_{n,21}^*} + \lambda_1 \chi_1 u_{11}^1(0) \\ \phi_{21}^1(0) &= \frac{\lambda_1 \chi_1 M_{11}^1(0)(H_{n,11}^* H_{n,23}^* - H_{n,21}^* H_{n,13}^*) + \lambda_1 \chi_1 Q_{11}^1(0)(H_{n,11}^* H_{n,24}^* - H_{n,21}^* H_{n,14}^*) - (H_{n,11}^* \xi_2^0 - H_{n,21}^* \xi_1^0)}{H_{n,22}^* H_{n,11}^* - H_{n,12}^* H_{n,21}^*} + \lambda_1 \chi_1 \phi_{11}^1(0) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (22)，可得出层状地基中考虑轴向力影响下的两桩间的水平及摇摆动力相互作用因子（谐荷载作用下）：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{u,k} &= \frac{u_{21}^k(0)}{u_{11}^k(0)} \quad (\text{水平}) \\ \varepsilon_{\phi,k} &= \frac{\phi_{21}^k(0)}{\phi_{11}^k(0)} \quad (\text{摇摆}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

上述推导给出了两桩间的动力相互作用因子的求取过程，基于文献[6]，可进一步计算群桩的水平动力阻抗。

3 算例分析

3.1 单桩水平动力阻抗计算与分析

基于上述推导，给出一计算实例：单桩长度为 37.6 m，桩的半径为 0.5 m，弹性模量为 38 GPa，质量密度为 2.35×10³ kg/m³，计算土层共分为 9 层，桩身范围内的土层为 8 层，桩底 1 层，该桩为端承桩，底端嵌固于基岩上，其各土层属性参数见表 1。

表 1 土层材料参数

层号	质量密度 ρ_k / (10 ³ kg/m ³)	泊松比 ν_k	剪切波速 V_{sk} / (m/s)	压缩模量 E_{sk} / MPa	厚度 / m
1	1.95	0.30	85	36.630	2.5
2	1.85	0.25	105	51.000	5.7
3	1.85	0.35	142	96.800	4.0
4	2.00	0.30	100	52.000	2.6
5	1.90	0.30	150	106.875	3.3
6	1.90	0.25	184	160.816	6.3
7	2.00	0.25	169	142.805	7.0
8	2.00	0.25	115	106.125	6.2
9	2.05	0.25	180	160.000	2.1
基岩	2.30	/	1 500	/	/

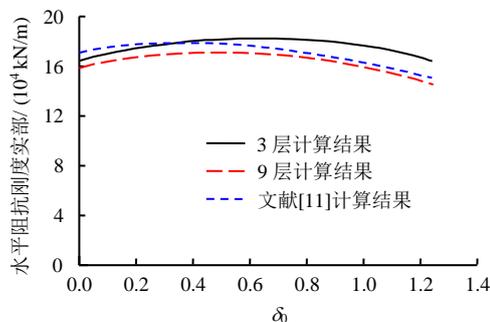
下面用于比较的土层参数采用表 1 的加权平均值，即 2~8 层作为一层，则计算土层共分为 3 层，桩身范围内的土层为 2 层，桩底 1 层，桩尖嵌入基岩中。具体参数见表 2。

表 2 土层材料参数

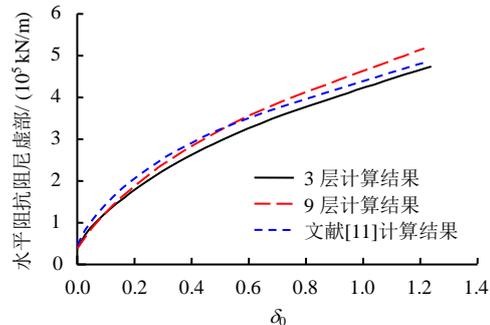
Table 2 Material parameters of soil layer

层号	质量密度 ρ_k / (10 ³ kg/m ³)	泊松比 ν_k	剪切波速 V_{sk} / (m/s)	压缩模量 E_{sk} / MPa	厚度 / m
1	1.95	0.30	85	36.630	2.5
2	1.93	0.27	142	109.300	35.1
3	2.05	0.25	180	160.000	2.1
基岩	2.30	/	1 500	/	/

桩顶轴力在计算过程中不变，图 3 是单桩的水平阻抗随无量纲频率变化的对比图（ δ_0 为无量纲频率）。通过同一算例的不同分层对比可看出，对于实部刚度，将土层分为 3 层较分为 9 层的计算结果偏大，可见分层对横向阻抗的实部刚度是有影响的，同样虚部阻尼在不同分层条件下得到的值也不同，但表现不明显。与文献[11]的计算结果对比有良好



(a) 实部刚度



(b) 虚部阻尼

图 3 单桩水平动力阻抗对比

Fig.3 Comparisons of horizontal dynamic impedance of single pile

的一致性,同时本文的计算结果连续性更好,没有出现跳跃点,是可取的计算结果,能够产生连续结果的原因是由于本文在桩基横向动力阻抗的推导过程中采用了 Laplace 变换方法,由此得到的广义力以及位移的解是连续函数的线性组合,保证了其解的连续性,避免了奇异点的出现。

3.2 群桩动力相互作用因子计算与分析

3.2.1 两桩算例

首先对两桩的水平动力相互作用进行分析,再对群桩横向动力阻抗计算进行研究。两桩分析实例采用单桩分析的算例,具体土层参数如表 1 所示,两桩长度均为 37.6 m,桩的半径为 0.6 m,弹性模量为 21 GPa,质量密度为 $2.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,两桩间距为 4.0 m,沿两桩直线方向在源桩上作用一谐振力。

图 4 中 ε 为动力相互作用因子。从计算结果可看出,在惯性作用下层状地基中的动力相互作用因子的实部和虚部都表现出了较强的频率相关性,通过与文献[11]和文献[13]的对比,可知本文的计算结果与已有结果具有良好的一致性,同时本文的计算结果具有良好的连续性,是可取的计算结果。

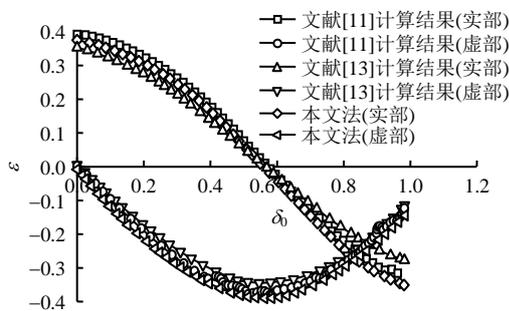


图 4 两桩动力相互作用因子

Fig.4 Dynamic interaction factors of two piles

3.2.2 四桩算例

群桩计算以四桩为例,横向间距为 5.0 m,纵向间距为 4.0 m,每根桩长度为 37.6 m,桩的半径为 0.6 m,弹性模量为 21 GPa,质量密度为 $2.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,其余参数与单桩 9 层相同。

图 5 给出了以 1 桩为源桩时在惯性作用下各桩的动力相互作用因子簇,其中 $l-y$ 是桩号的运动标识,表征为桩 l 对桩 y 的影响作用分析曲线, $\text{Re}\varepsilon$ 和 $\text{Im}\varepsilon$ 分别为实部和虚部动力相互作用因子。通过比较可发现,惯性作用下的动力相互作用因子表现出较强的频率相关性,并且对桩间距的改变较为敏感,在低频率区,桩间距越小,惯性作用下桩间的动力相互作用因子越大,同时源桩对沿振动方向的

被动桩和非振动方向的被动桩的影响程度是不一样的,后者表现为更强的频域相关性,其幅值也有不同程度的减小,同时与文献[11]的结果对比吻合一致。此外,在桩 1 对桩 2 的影响作用分析中,采用本文法的计算结果与文献[13]建议的简化式计算结果比较可发现,本文法考虑了轴向力的参与作用,增大了源桩对受动桩的影响作用,实、虚部均表现为正值增大,负值减小的一致性。但两者曲线具有相同的频率强弱相关特性,其趋势保持良好的一致性。

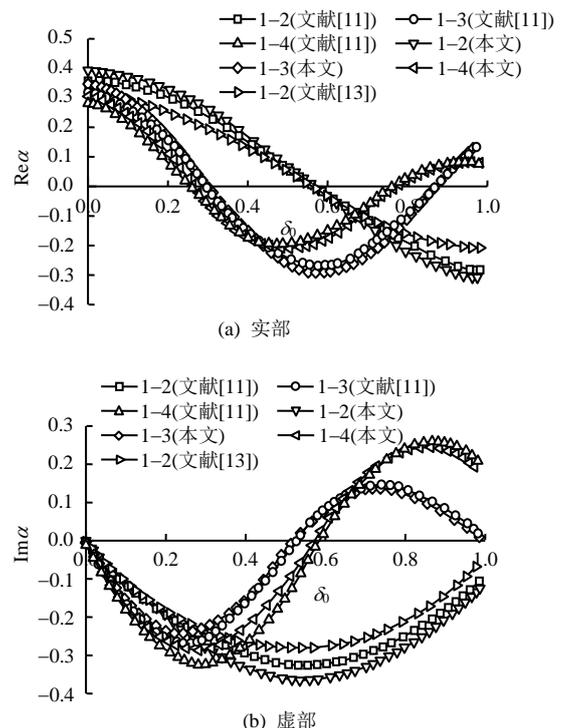


图 5 动力相互作用因子对比

Fig.5 Comparisons of dynamic interaction factors

4 结论

根据桩-土间动力响应的传递函数特性,采用动力文克尔模型模拟层状介质中桩-土动力相互作用,引入 Laplace 变换求解出桩-土-桩水平动力相互作用因子,得出群桩-土系统在频域下的动力阻抗特性,通过实例计算得到一些结论:

(1) 该模型运用弹性元件和黏性元件的有效组合,既能很好地反映地基的刚度,又能模拟应力波传递过程中能量的耗散;同时考虑到土具有天然分层的特性,将动力文克尔地基模型和层状地基相结合,分析表明该模型能够在特定分析范围内对桩-土动力相互作用作出合理的解释。

(2) 利用传递矩阵法和拉普拉斯变换推导出层状土中考虑轴向力影响的水平动力阻抗,在推导中

运用了拉普拉斯变换及其逆变换。Laplace 变换将频率 ω 变成复频率 s , 不仅能描述函数的振荡频率, 还可以刻画振荡幅度的增长速率。该法将微分方程变成代数方程, 同时将微分方程中的初值条件包含进变换式中, 能够有效求解桩土相互作用的振动微分方程, 进一步得到了连续函数线性组合的连续解, 避免了奇异点的产生。

(3) 对分层介质中群桩-土计算结果表明: 桩的端承条件对刚度和阻尼的发挥有影响; 桩和土的属性参数以及桩-土相对的刚度比会使得桩-土动力作用下产生不同的结果; 地基的分层的层数和每层的属性也是影响桩-土动力相互作用因子的重要因素, 同时桩间动力相互作用因子与桩距、振动方向有密切的关系, 并表现为较强的频率相关性。

参考文献

- [1] ELAHI H, MORADI M, POULOS H G, et al. Pseudostatic approach for seismic of pile group[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(1/2): 25-39.
- [2] 蒯行成, 田建华. 低承台群桩动力阻抗的有限元分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2004, 31(4): 55-59.
KUAI Xing-cheng, TIAN Jian-hua. Finite element analysis of dynamic impedance of pile groups with embedded caps[J]. **Journal of Hunan University (Natural Sciences)**, 2004, 31(4): 55-59.
- [3] 刘林超, 杨晓. 地震作用下饱和土-桩-上部结构动力相互作用研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(1): 120-128.
LIU Lin-chao, YANG Xiao. Dynamic interaction of saturated soil-pile-structure system under seismic loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(1): 120-128.
- [4] 门玉明, 黄义. 土-结构动力相互作用问题的研究现状及展望[J]. 力学与实践, 2000, 22(4): 1-7.
MEN Yu-ming, HUANG Yi. A review on dynamic soil-structure interaction research[J]. **Mechanics in Engineering**, 2000, 22(4): 1-7.
- [5] 高广运, 赵元一, 高盟, 等. 分层土中群桩水平动力阻抗的改进计算[J]. 岩土力学, 2010, 31(2): 509-515.
GAO Guang-yun, ZHAO Yuan-yi, GAO Meng, et al. Improved calculation for lateral dynamic impedance of pile groups in layered soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(2): 509-515.
- [6] 熊辉, 邹银生. 层状土中考虑频域内轴向力分担的群桩水平动力阻抗[J]. 计算力学学报, 2004, 23(4): 757-763.
XIONG Hui, ZOU Yin-sheng. Horizontal vibration impedance of pile-groups considering allocated frequency-dependent axial forces in layered soil field[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2004, 23(4): 757-763.
- [7] 蒯行成, 沈蒲生. 层状介质中群桩水平动力阻抗的简化计算方法[J]. 振动工程学报, 1998, 11(3): 258-264.
KUAI Xing-cheng, SHEN Pu-sheng. Simplified method for calculating horizontal dynamic impedances of pile groups in layered media[J]. **Journal of Vibration Engineering**, 1998, 11(3): 258-264.
- [8] 吴文兵, 王奎华, 杨冬英, 等. 成层地基中基于虚土桩模型的桩基纵向振动响应[J]. 中国公路学报, 2012, 25(2): 72-80.
WU Wen-bing, WANG Kui-hua, YANG Dong-ying, et al. Longitudinal dynamic response to the pile embedded in layered soil based on fictitious soil pile model[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2012, 25(2): 72-80.
- [9] 郑长杰, 刘汉龙, 丁选明, 等. 饱和黏性土地基中现浇大直径管桩水平振动响应解析解[J]. 岩土工程学报, 2014, 38(8): 1447-1454.
ZHENG Chang-jie, LIU Han-long, DING Xuan-ming, et al. Analytical solution of horizontal vibration of cast-in-place large-diameter pipe piles in saturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2014, 38(8): 1447-1454.
- [10] 雷文军, 魏德敏. 分层土中单桩和群桩的水平动力阻抗计算[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 36-40.
LEI Wen-jun, WEI De-min. The lateral impedance of single pile and pile groups in layered soils[J]. **Engineering Mechanics**, 2004, 21(5): 36-40.
- [11] 熊辉. 层状场域内上、下部结构动力相互作用分析及其优化设计[D]. 长沙: 湖南大学, 2003.
XIONG Hui. Dynamical analysis and optimizing design of interactive effect on upper-lower structural parts in multilayer-soil field[D]. Changsha: Hunan University, 2003.
- [12] DOBRY R, GAZETAS G. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups[J]. **Geotechnique**, 1988, 38(4): 557-574.
- [13] MAKRIS N, GAZETAS G. Dynamic pile-soil-pile interaction, Part II: lateral and seismic response[J]. **Earthquake Engineering and Structure Dynamic**, 1992, 21(2): 145-161.
- [14] NOVAK M, SHARMOUHY B EI. Stiffness constants of single piles[J]. **Journal of Geotechnical Engineering, ASCE**, 1983, 109(7): 961-974.