DOI：10.16285/j.rsm.2016.1800

水平加筋地基极限承载力的极限上限分析法

曹文贵[1]，谭建辉[1]，胡卫东[1,2]

（1. 湖南大学 岩土工程研究所，湖南 长沙 410082；2. 湖南理工学院 土木建筑工程学院，湖南 岳阳 414000）

摘 要：水平加筋是广泛应用的软土地基处理方法之一，而水平加筋地基极限承载力的确定是其地基处理设计的重要依据。因此，首先结合条形基础下水平加筋地基的工程特点，在探讨其承载机制和破坏特点的基础上，考虑破坏间断面上筋材与地基土体的变形协调，构建出反映加筋参数变化影响的可变破坏模式及机动允许速度场；然后，在此基础上，通过重点研究筋材的能量耗散分析方法，并引入上限极限分析理论，建立出条形基础下水平加筋地基极限承载力分析模型，再引入序列二次规划优化分析理论，建立出条形基础下水平加筋地基极限承载力确定方法，它能充分反映加筋设计参数对地基破坏模式及承载力的影响；最后，通过试验结果与该方法及现有同类分析模型结果的比较分析，表明了该模型与方法的合理性与可行性。

关 键 词：水平加筋地基；极限承载力；上限极限分析；可变破坏模式；变形协调

中图分类号：TU 432 **文献识别码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 06－1955－08

Upper bound of ultimate bearing capacity for the reinforced grounds

CAO Wen-gui[1], TAN Jian-hui[1], HU Wei-dong[1,2]

(1. Geotechnical Engineering Institute, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;
2. College of Civil Engineering and Architecture, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang, Hunan 414000, China)

Abstract: The horizontal reinforcement is a method of ground treatment for soft soil. The calculation of the ultimate bearing capacity of the reinforced grounds is important to the design of ground foundation treatment. Firstly, combined with the engineering characteristics of reinforced grounds, a changeable failure mode varying with the reinforcement parameters and the kinematically admissible velocity field are established by its failure mechanism considering the influence of the coordinate deformation between soil and the horizontal reinforcement. Secondly, with the upper limit analysis, the ultimate bearing capacity calculation was deduced by the method of energy dissipation for the level reinforcement. Thirdly, a new approach for determining the ultimate bearing capacity of the reinforced grounds is introduced by the sequential quadratic programming optimization algorithm. Finally, the comparisons with experimental results find that this proposed method is reasonable, feasible, and superior to other existing methods, also can reflect the reinforcement design parameters effect on the failure mode and its ultimate bearing capacity.

Keywords: reinforced grounds; ultimate bearing capacity; upper limit analysis; movable failure mode; deformation coordination

1 引 言

水平加筋已广泛应用于软土地基处理中，致使水平加筋地基承载机制和破坏模式明显不同于普通地基，相应极限承载力的确定就不能简单套用普通地基承载力分析方法，它必须充分反映水平加筋对其承载力的影响。因此，开展水平加筋地基极限承载力分析方法的研究具有重要的理论与工程意义，这正是本文研究的出发点。

国内外学者经过大量加筋土地基的理论与试验研究，形成了包括极限平衡法、滑移线法和有限元法等多种加筋土地基极限承载力分析方法[1−4]。梁波等[1]采用极限平衡分析法，假设加筋地基破坏模式与普朗德尔破坏模式一致，获得了加筋土地基极限承载力确定方法，但由于没有考虑筋材对破坏模式的影响，致使其计算结果偏于保守；周建萍等[2]基于滑移线场理论进行加筋地基破坏机制和承载力分析，考虑了筋材对滑动破坏面的影响，得到了与普

收稿日期：2016-09-23
基金项目：国家自然科学基金项目（No.51378198）；高等学校博士学科点专项科研基金项目（No.20130161110017）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51378198) and the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20130161110017).
第一作者简介：曹文贵，男，1963 年生，博士，教授，主要从事岩土工程教学与研究工作。E-mail: cwglyp@hnu.edu.cn

通地基显著不同的破坏模式，但该方法没有考虑破坏间断面上筋材与地基土体的变形协调对承载力的影响；Yamamoto[3]、Kumar[4]等利用有限元分析法得到了筋材对加筋地基极限承载力的影响系数，并应用此影响系数对承载力公式进行修正，其结果的有效性仍需通过大量的工程应用来验证。在分析加筋土边坡稳定性时，Radoslaw[5]、崔新壮[6]等假设筋材的破坏形式为拉伸破坏，筋材的内力功为筋材拉力在滑动层内所做的功；乔丽平等[7]将其推广到广义塑性理论，利用极限分析方法研究了筋材能量耗散的计算，这为本文运用极限分析上限法研究水平加筋地基极限承载力打下了良好的研究基础。

采用极限分析上限法分析水平加筋地基极限承载力时，无需准确确定破坏机构中各刚性块体内部的应力分布，直接研究加筋土地基的极限状态，通过计算外力作用下的能量耗散、速度间断面上的能量耗散及滑动面上的筋材能量耗散，最终确定水平加筋地基的极限承载力。而水平加筋地基的筋材能量耗散与破坏模式是应用上限分析方法确定其极限承载力的关键。由于受到筋材强度及加筋参数的影响，使得水平加筋地基的承载机制和破坏模式更加复杂。已有加筋土地基的加筋机制研究成果大都反映了筋-土界面上的摩擦作用，筋材限制土体侧向变形从而使其承载能力提高，这在一定程度上反映了其部分力学机制。但水平加筋地基在达到极限破坏临界状态时，破坏间断面上筋材与土体会产生协调变形，致使水平加筋地基协调变形的许可速度场发生改变，其极限承载力分析方法必然存在很大差别。因此，有必要针对破坏间断面上筋材与土体具有协调变形的特点，进行水平加筋地基极限承载力确定方法的研究，这正是本文研究的核心内容。

为此，本文将结合条形基础下水平加筋土地基的工程特点，将素土的内力功和筋材的内力功分开考虑，建立考虑破坏间断面上筋材与土体变形协调特点的筋材能量耗散计算公式。然后考虑水平加筋对其破坏模式的影响，构建出更为合理的加筋地基可变破坏模式。在此基础上，利用上限分析理论建立新的条形基础下水平加筋地基极限承载力分析模型，以期完善条形基础下水平加筋地基承载力分析理论与方法。

2 筋材的能量耗散分析方法

水平加筋地基的筋材能量耗散分析方法是应用极限上限分析理论确定其极限承载力的关键，而其筋材的能量耗散计算与筋材的强度及加筋参数直接相关。由于本文旨在探讨条形基础下水平加筋地基极限承载力分析新方法，因此，有必要首先对筋材的能量耗散分析方法进行研究。为了建立合理的筋材能量耗散分析方法，首先作如下基本假定：

（1）由 n 层筋材等间距 d 水平布置的半无限地基，土体内摩擦角为 φ，小变形条件下，加筋地基承载力问题可视为平面问题。

（2）假定破坏间断面上筋材与土体变形协调，地基土体达到极限状态破坏时，筋材产生拉伸断裂破坏，且筋材有足够的锚固长度而不被拔出。

（3）地基土体服从摩尔-库仑屈服准则及相关联流动法则，且本文的水平加筋材料为柔性筋材，即不考虑其抗弯刚度对承载能力的影响。

在上述假定的基础上对筋材的能量耗散进行分析，可在破坏间断面上取 Δl 微段作为研究对象，如图 1 所示。当加筋土体达到极限状态沿着某一速度间断面破坏时，筋材与土体在薄滑动层上会产生协调变形，设薄滑动层厚度为 t，破坏间断面与水平方向的夹角为 ξ。根据本文假定，地基土体服从摩尔-库仑屈服准则和相关联流动法则，则间断速度 $[V]$ 必与间断面成 φ 夹角。由于不考虑筋材的抗弯刚度，筋材只能承担拉力，随着荷载的增加，滑动层内的筋材会随土体的滑动变形而逐渐改变其受拉方向。根据 Leshchinsky 等[8]的研究成果，为了最大程度地阻止土体发生滑动，变位后滑动层内筋材的方向应被动调整为与滑块间断速度 $[V]$ 相反的方向，同理，当破坏间断面为螺旋面时，滑动层内变位后的筋材方向与该处的曲率半径相垂直。又筋材变位前是水平等距离 d 布置的，因此，筋材与土体产生协调变形后筋材的间距 d' 可由图 1 中的几何关系求得，即

$$d' = d\sin\varphi/\sin\xi \tag{1}$$

由于不考虑筋材的抗弯刚度，且筋材在极限状态时发生拉伸断裂破坏，所以变位后薄滑动层内垂直于斜筋材横截面单位长度内的抗拉强度为

$$\sigma_{\mathrm{t}} = T_{\mathrm{a}}/d' = \frac{T_{\mathrm{a}}}{d}\frac{\sin\xi}{\sin\varphi} \tag{2}$$

式中：σ_{t} 为筋材抗拉强度；T_{a} 为筋材容许拉力值，$T_{\mathrm{a}}=T/RF$，T 为筋材实测极限抗拉强度，RF 为综合强度折减系数，$RF=RF_{\mathrm{CR}}RF_{i\mathrm{D}}RF_{\mathrm{D}}$，$RF_{\mathrm{CR}}$ 为材料因蠕变影响的强度折减系数，$RF_{i\mathrm{D}}$ 为材料在施工过程中受损伤的强度折减系数，RF_{D} 为材料长期老化影

响的强度折减系数。

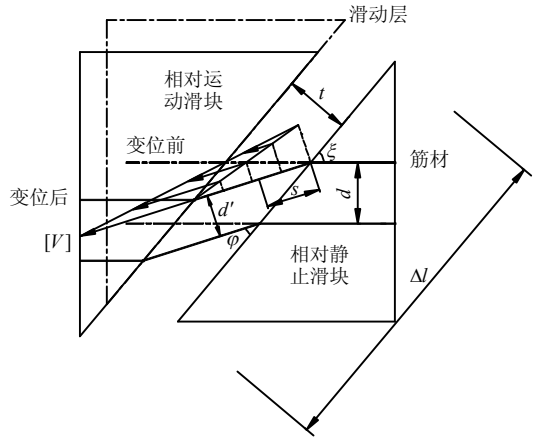


图 1　微段 Δ*l* 内筋材的能量耗散

Fig.1　Energy dissipation of reinforcement in segment

当运动滑块相对于静止滑块运动时，在薄滑动层内，从相对静止部分过渡到相对运动部分，筋材上任意连续点的速度满足变化的连续性，这里假设其为简单的线性变化，即

$$\boldsymbol{V}=\frac{[V]}{t/\sin\varphi}s' \tag{3}$$

式中：s' 为变位后滑动层内筋材的长度，方向为从相对静止部分过渡到相对运动部分；$\boldsymbol{V}$ 为滑动层内筋材任意点的速度矢量；$[V]$为间断速度矢量。

由应变率定义并考虑到 s 为常数即其对时间变量 T' 的导数为 $0\,(\mathrm{d}s/\mathrm{d}T'=0)$ 可知变位后薄滑动层内筋材上任意点的应变率为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}T'}=\frac{\mathrm{d}(\Delta s/s)}{\mathrm{d}T'}=\frac{\mathrm{d}(s'-s)}{s\mathrm{d}T'}=\frac{V}{t/\sin\varphi} \tag{4}$$

式中：$\dot{\varepsilon}$ 为筋材应变率；s 为滑动层内变位前筋材的长度（见图 1）。

综合上述，联立式（1）～（4），则可求出微段 Δl 破坏面上考虑变形协调的筋材能量耗散率 $\mathrm{d}r$ 为

$$\mathrm{d}r=\int_0^{t/\sin\varphi}\sigma_{\mathrm{t}}\dot{\varepsilon}\mathrm{d}s=\frac{T_{\mathrm{a}}\sin\xi}{2d\sin\varphi}[V] \tag{5}$$

3　水平加筋地基的承载机制及破坏模式分析

根据已有水平加筋地基破坏模式的研究成果[9]，水平加筋地基的破坏模式与普朗德尔破坏模式形式相似，但筋材的存在使其破坏模式发生一定程度的改变，因此，其极限承载力的分析不能简单套用普朗德尔破坏模式。为了探讨合理的破坏模式，再作如下基本假定：

（1）假设基础形式为刚性条形基础，基础宽度为 b(m)，基础埋深为 H(m)，基础上作用竖向均布荷载 Q_{u}。土体重度为 γ (kN/m^3)、黏聚力为 c(kPa)、内摩擦角为 φ (°)，土体均质且各向同性，不考虑孔隙水压力。

（2）埋深内土体视为等效均布荷载，即 $q=\gamma H$，但不计埋深土体抗剪强度对承载力的影响。

由于极限分析上限解对破坏机构的具体形态不太敏感，因此，如果采用的破坏机构与水平加筋地基的实际破坏机构近似，那么对于利用极限分析上限理论求解水平加筋地基极限承载力将非常有利。而在经典土力学理论中，普通地基采用的破坏模式大多是由螺旋线和直线组成的，这种破坏模式下得到的承载力与观测结果符合较好。因此，考虑到水平加筋地基与普通地基破坏模式的相似性，本文在经典土力学理论假定破坏模式的基础上，将水平加筋地基的实际破坏模式近似视为由 5 个可变滑块构成的可变破坏模式，如图 2 所示，具体分析如下：

（1）滑块Ⅰ(*ABC*)：滑块Ⅰ位于基础正下方，滑移线 *BC* 和 *AC* 均与基础底面 *AB* 成相同夹角 α，由于基础底面的粗糙度介于完全光滑和完全粗糙之间，这就致使 α 角为可变角，其容许区间为 $[\varphi,\pi/4+\varphi/2]$。

（2）滑块Ⅱ(*ACD*)和Ⅳ(*BCF*)：滑块Ⅱ(*ACD*)、Ⅳ(*BCF*)分别位于滑块Ⅰ(*ABC*)左、右两侧，且完全对称，但其辐射区顶角 θ 为不确定角，且随加筋参数的改变而变化。其中滑移线 *AD* 和 *BF* 与水平线的夹角为 $\beta=\pi-\alpha-\theta$，滑移线 *CD* 和 *CF* 为螺旋线，其滑移线方程为

$$r=r_0\exp[(\theta_{\mathrm{h}}-\theta_0)\tan\varphi] \tag{6}$$

式中：r 为滑裂线上的计算点到螺旋线原点的向量半径；r_0 为辐射区滑块起始向量半径，即 *AC* 长度；θ_0 为基础底面与辐射区滑块起始向量半径的夹角 α；θ_{h} 为计算点向量半径与基础底面的夹角。

（3）滑块Ⅲ(*ADE*)和Ⅴ(*BFG*)：这两个滑块均属于被动区。考虑到各滑块之间的挤压运动为刚体运动，必然具备连续性的特点，被动区滑块Ⅲ、Ⅴ分别在滑块Ⅱ、Ⅳ的挤压下将分别沿着螺旋线 *CD* 和 *CF* 的切线方向产生滑动，形成连续滑动面。其中 $\angle ADE=\angle BFG=\pi/2+\varphi$，则滑移线 *DE* 和 *FG* 与水平线的夹角为 $\mu=\alpha+\theta-\pi/2-\varphi$。

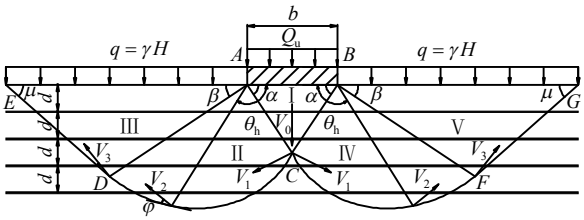


图 2 加筋地基的破坏模式

Fig.2 Failure mode of reinforced grounds

上述即为由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ 5 个滑块形成的水平加筋地基可变破坏模式。实际上，该破坏模式中的参数α和θ受到加筋参数的影响，即条形基础下水平加筋地基的极限承载力随着加筋参数的变化而发生改变。

4 水平加筋地基承载力上限分析模型

前文已经构建出条形基础下水平加筋地基的可变破坏模式，这为其极限承载力的确定奠定了基础，在此基础上，采用极限分析上限法就容易建立其极限承载力的分析模型，具体分析如下。

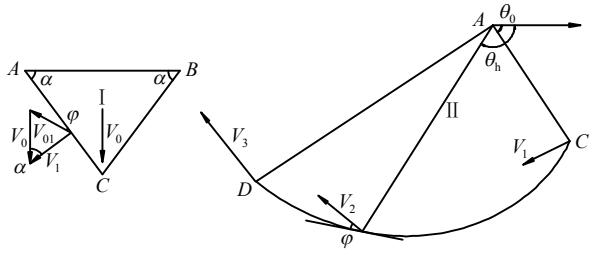
4.1 相容速度场的确定

为了确定条形基础下水平加筋地基的相容速度场，首先假定基础以速度 V_0 垂直向下运动，则滑块Ⅰ(*ABC*)以同样的速度 V_0 垂直向下运动。如图 3(a)所示，考虑到速度间断面 *AC*、*BC* 为真实破坏面，根据符合相关联流动法则的摩尔-库仑材料性质可知，在破坏面上各点的间断速度与速度间断面成φ角，因此，根据速度场三角闭合的几何关系，可以确定 *AC*、*BC* 速度间断面上各点的间断速度方向。

$$V_{01}=\sin\alpha\sec\varphi\cdot V_0 \tag{7}$$

$$V_1=\cos(\alpha-\varphi)\sec\varphi\cdot V_0 \tag{8}$$

式中：V_{01} 为滑块间的间断速度；V_1 为辐射剪切区滑块的初始速度。



(a) 滑块Ⅰ (b) 辐射剪切区滑块Ⅱ

图 3 速度关系图

Fig.3 Velocity relation

由于滑块Ⅱ(*ACD*)和滑块Ⅳ(*BCF*)为过渡辐射剪切区，其上质点运动必与过渡辐射区顶点的射线垂直，则在过渡辐射区上，从起始射线变化到最终边界射线，其滑移线 *CD*、*CF* 上质点的速度大小和方向在不断发生变化。又被动区滑块Ⅲ(*ADE*)、Ⅴ(*BFG*)分别在滑块Ⅱ(*ACD*)、Ⅳ(*BCF*)的挤压下将分别沿着螺旋线 *CD* 和 *CF* 的切线方向产生滑动，形成连续滑动面，所以滑块Ⅲ(*ADE*)、Ⅴ(*BFG*)的实际速度与为辐射剪切区滑块的终止边界的速度方向一致，大小相等。由此，可得知如图 3(b)所示极坐标系下破坏形式的速度场为

$$V_2=\cos(\alpha-\varphi)\sec\varphi\cdot e^{[(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi]}V_0=\cos(\alpha-\varphi)\sec\varphi\cdot e^{[(\theta_h-\alpha)\tan\varphi]}V_0 \tag{9}$$

$$V_3=\cos(\alpha-\varphi)\sec\varphi\cdot e^{(\theta\tan\varphi)}V_0 \tag{10}$$

式中：V_2 为滑移线 *CD*、*CF* 上任意一点（不包括始终点）的间断速度；V_3 为辐射剪切区滑块的终止间断速度。

4.2 素土的内能耗散率计算

本文研究的素土内能耗散率包括速度间断面和变形楔体内部的能量耗散率，速度间断面的能量散率为间断面黏聚力引起的内力(方向为间断面方向)与间断速度矢量的点乘，而变形楔体内部量耗散率为应力与塑性应变率之乘积，具体分析如下：

（1）主动破坏区滑块Ⅰ(*ABC*)在 *AC*、*BC* 滑移线上有内能耗散 D_{AC}、D_{BC}，其值为

$$D_{AC}=D_{BC}=c\overline{AC}V_{01}\cos\varphi=cb/(2\cos\alpha)\sin\alpha\sec\varphi\cdot V_0\cos\varphi=1/2bc\tan\alpha\cdot V_0 \tag{11}$$

（2）过渡辐射剪切区滑块Ⅱ(*ACD*)、Ⅳ(*BCF*)在螺旋线 *CD*、*CF* 上有能量耗散，同时滑块Ⅱ(*ACD*)、Ⅳ(*BCF*)内部又有因变形扭曲而消耗的内能。根据过渡辐射剪切区内的能量耗散率与螺旋线上的能量耗散率相等[10]，因此，有

$$D_{CD}=D_{ACD}=D_{CF}=D_{BCF}=c\int_0^{\theta_1}rV_2\mathrm{d}\theta=\frac{bc\cos(\alpha-\varphi)}{4\sin\varphi\cos\alpha}(e^{2\theta\tan\varphi}-1)V_0 \tag{12}$$

（3）被动破坏区滑块Ⅲ(*ADE*)、Ⅴ(*BFG*)在 *DE*、*FG* 上有能量耗散，其值为

$$D_{DE}=D_{FG}=c\overline{DE}V_3\cos\varphi=\frac{bc\cos(\alpha-\varphi)\sin(\alpha+\theta)}{2\cos(\alpha+\theta-\varphi)\cos\alpha}\mathrm{e}^{2\theta\tan\varphi}V_0 \quad (13)$$

4.3 筋材的能量耗散率计算

本文中研究的筋材能量耗散率主要是速度间断面上薄滑动层内筋材的能量耗散率，下面建立本文筋材能量耗散的计算公式，具体分析如下：

（1）主动破坏区滑块Ⅰ(*ABC*)、筋材在 *AC*、*BC* 速度间断线面上有能量耗散，其中滑移线与水平方向的夹角 $\xi=\alpha$。

当加筋深度 $H=nd<h_1=b/2\tan\alpha$ 时，(h_1 为 *C* 点到基础底面垂直距离)，筋材能量耗散率为

$$Dr_{AC}=Dr_{BC}=\int_L\frac{T_\mathrm{a}\sin\xi}{2d\sin\varphi}[V]\mathrm{d}l=nT_\mathrm{a}\frac{\sin\alpha}{2\sin\varphi\cos\varphi}V_0 \quad (14)$$

当加筋深度 $H=nd\geqslant h_1=b/2\tan\alpha$ 时，取 $H=h_1$，筋材能量耗散率为

$$Dr_{AC}=Dr_{BC}=\int_L\frac{T_\mathrm{a}\sin\xi}{2d\sin\varphi}[V]\mathrm{d}l=\frac{bT_\mathrm{a}\sin\alpha\tan\alpha}{4d\sin\varphi\cos\varphi}V_0 \quad (15)$$

（2）过渡辐射剪切区滑块Ⅱ(*ACD*)、Ⅳ(*BCF*)在螺旋线 *CD*、*CF* 上有能量耗散，此时滑裂面与水平方向的夹角 $\xi=\pi/2+\varphi-\theta$。根据前文假定筋材的抗弯刚度为 0，而滑动层内变位后筋材与变位前筋材的夹角为 $(\xi-\varphi)$，则当 $(\xi-\varphi)\leqslant 0$ 时，筋材的应变率 $\dot{\varepsilon}=0$，即 $\theta_\mathrm{h}=\pi/2$ 时，对应的加筋深度为有效加筋深度，此时加筋有效深度 $h_2=r\sin(\pi/2)$。

当 $h_1<H<h_2$ 时，此时筋材能量耗散速率为

$$Dr_{CD}=Dr_{CF}=\int_{\theta_0}^{\theta_\mathrm{h}}\frac{T_\mathrm{a}\sin\xi}{2d\sin\varphi}V_2\frac{r\mathrm{d}\theta}{\cos\varphi}=\frac{bT_\mathrm{a}\cos(\alpha-\varphi)}{4d\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\alpha}V_0\cdot\int_\alpha^{\theta_\mathrm{h}}\cos(\theta-\varphi)\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)\tan\varphi}\mathrm{d}\theta \quad (16)$$

式中：θ_h 为底层筋材与螺旋线滑裂面交点所对应的弧度角，其满足等式 $H=nd=r\sin\theta_\mathrm{h}$。

当加筋深度 $H\geqslant h_2$ 时，取 $H=h_2$，则 $\theta_\mathrm{h}=\pi/2$，此时筋材能量耗散速率为

$$Dr_{CD}=\int_\alpha^{(\pi/2)}\frac{T_\mathrm{a}\sin\xi}{2d\sin\varphi}V_2\frac{r\mathrm{d}\theta}{\cos\varphi}=\frac{bT_\mathrm{a}\cos(\alpha-\varphi)}{4d\cos^2\varphi\cos\alpha}V_0\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\sin\varphi}\mathrm{e}^{\pi\tan\varphi}\mathrm{d}\theta \quad (17)$$

（3）被动破坏区滑块Ⅲ(*ADE*)、Ⅴ(*BFG*)在 *DE*、*FG* 速度间断面上有能量耗散，这两个区域的土体处于被动受压状态，则此处的筋材处于推挤的受力状态。由于不考虑筋材的抗弯刚度，此时筋材的拉伸应变率 $\dot{\varepsilon}=0$，则筋材的能量耗散速率为

$$Dr_{DE}=Dr_{FG}=0 \quad (18)$$

4.4 外力功率计算

本文中研究的外力功率包括滑块Ⅰ(*ABC*)、Ⅱ(*ACD*)、Ⅲ(*ADE*)、Ⅳ(*BCF*)、Ⅴ(*BFG*)土体自重和 *AE*、*BG* 之上超载土体自重的等效荷载 *q* 以及基底极限压力 Q_u 的功率，具体计算如下：

（1）基底极限压力的功率 W_{Q_u} 为

$$W_{Q_\mathrm{u}}=Q_\mathrm{u}bV_0 \quad (19)$$

（2）超载土体等效荷载的功率 W_{AE}、W_{BG} 为

$$W_{AE}=W_{BG}=-q\overline{AE}V_3\cos(\pi-\alpha-\theta)=-\frac{bq\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\varphi)\tan\alpha}{2\cos\alpha\cos(\alpha+\theta-\varphi)}\mathrm{e}^{2\theta\tan\varphi}V_0 \quad (20)$$

(3)滑块Ⅰ(*ABC*)、Ⅱ(*ACD*)、Ⅲ(*ADE*)、Ⅳ(*BCF*)、Ⅴ(*BFG*)土体自重功率 $W_\mathrm{Ⅰ}\sim W_\mathrm{Ⅴ}$ 计算如下：

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}b\frac{b}{2}\tan\alpha=\frac{b^2}{4}\tan\alpha \quad (21)$$

$$S_{\Delta ADE}=S_{\Delta BFG}=\frac{1}{2}\sin(\pi/2+\varphi)\overline{AD}\,\overline{DE}=\frac{-b^2\cos\varphi\sin(\alpha+\theta)}{8\cos(\alpha+\theta-\varphi)\cos^2\alpha}\mathrm{e}^{2\theta\tan\varphi} \quad (22)$$

$$W_\mathrm{Ⅰ}=G_\mathrm{Ⅰ}V_0=S_{\Delta ABC}\gamma V_0=\frac{b^2\gamma}{4}\tan\alpha V_0 \quad (23)$$

$$W_\mathrm{Ⅱ}=W_\mathrm{Ⅳ}=\int_{\theta_0}^{\theta_\mathrm{h}}(\frac{1}{3}\gamma r_0^2V_1\mathrm{e}^{3(\theta-\theta_0)\tan\varphi}\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{b^2\gamma\cos(\alpha-\varphi)}{12(1+9\tan^2\varphi)\cos^2\alpha\cos\varphi}\{\mathrm{e}^{3\theta\tan\varphi}\cdot\left[\sin(\theta+\alpha)+3\tan\varphi\cos(\theta+\alpha)\right]-\sin\alpha-3\tan\varphi\cos\alpha\}V_0 \quad (24)$$

$$W_{\mathrm{III}}=W_{\mathrm{V}}=-G_{\mathrm{III}}V_3\cos(\pi-\alpha-\theta)=-\frac{b^2\gamma\sin(2\alpha+2\theta)\cos(\alpha-\varphi)}{16\cos(\alpha+\theta-\varphi)\cos^2\alpha}\mathrm{e}^{3\theta\tan\varphi}V_0 \quad (25)$$

4.5 极限承载力公式推导

根据极限分析上限定理，将上述得到的外力功率、素土内能耗散率以及筋材的能量耗散率建立虚功率方程，即可求得条形基础下水平加筋地基极限承载力Q_{u}的解析公式为

$$Q_{\mathrm{u}}=(D_{AC}+D_{BC}+D_{CD}+D_{CF}+D_{ACD}+D_{BCF}+Dr_{AC}+Dr_{BC}+Dr_{CD}+Dr_{CF}-W_{AE}-W_{BG}-W_{\mathrm{I}}-W_{\mathrm{II}}-W_{\mathrm{III}}-W_{\mathrm{IV}}-W_{\mathrm{V}})/bV_0 \quad (26)$$

5 水平加筋地基极限承载力确定方法

上述分析已得到了条形基础下水平加筋地基极限承载力Q_{u}的解析公式，由此可以看出，其极限承载力Q_{u}与参数α、θ密切相关。根据上限定理，最优的上限解应是加筋地基处于极限状态时，其极限承载力Q_{u}上限解的最小值，因此，必须引进极值优化分析方法方能得到条形基础下水平加筋地基极限承载力，下面将具体介绍其分析方法。

设$Q_{\mathrm{u}}=f(a,\theta)$，则条形基础下水平加筋地基最终极限承载力$Q_{\mathrm{u}}$可表示为优化分析问题$Q_{\mathrm{u}}=\min f(a,\theta)$。在进行优化求解时，需对优化变量施加约束条件，以满足边界条件，以下为本文中加筋地基可变破坏模式优化变量的约束条件：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi\leqslant\alpha\leqslant\pi/4+\varphi/2\\&0\leqslant\theta\leqslant\pi\\&0\leqslant\alpha+\theta\leqslant\pi\\&0\leqslant\beta=\pi-\alpha-\theta\leqslant\pi\\&0\leqslant\mu=\alpha+\theta-\pi/2-\varphi\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

上述优化问题是一个有约束的高度非线性优化问题，本文中拟采用 Matlab 优化工具箱里的序列二次规划优化算法编制程序进行优化求解。

6 实例分析与讨论

前文已经建立了基于上限分析法的条形基础下水平加筋地基极限承载力分析模型及其优化求解方法。为了验证其合理性与可行性，仍需结合实例进行分析计算，并与已有研究方法分析结果进行对比分析与讨论，具体情况如下。

6.1 实例验证与计算结果对比

采用文献[11]中的工程实例进行分析。某条形基础下水平加筋地基，基础宽度$b=0.1$ m，无埋深，地基土体为均匀密砂，相对密实度$D_{\mathrm{r}}=75\%$，重度$\gamma=15.5$ kN/m^3，内摩擦角$\varphi=44°$，筋材为土工网格，极限抗拉强度$T=2$ kN/m，筋材铺设总长为$6b$，最上层筋材埋深与筋材垂直间距均为$d=0.024$ m。文献[11]通过模型试验分别测得了筋材层数为 0～6 层砂土的水平加筋地基极限承载力。为验证本文方法，计算了筋材层数为 0～9 层砂土水平加筋地基极限承载力，然后再将本文方法计算结果与文献[11]的模型试验结果及文献[12]的改进极限平衡法的计算结果进行比较分析，如表 1 所示。

表 1 计算结果的比较

Table 1 Comparison of computation results

筋材层数	文献[11]试验值/ kPa	文献[12]计算值/ kPa	文献[12]计算误差/ %	本文计算值/ kPa	本文计算误差值/ %
0	162	163	0.6	164	1.23
1	196	170	−13.3	199	1.53
2	271	185	−31.7	230	−15.13
3	274	207	−24.5	259	−5.47
4	317	236	−25.6	286	−9.78
5	319	276	−13.5	313	−1.88
6	340	328	−3.5	345	1.47
7				367	
8				385	
9				385	

根据表 1 的实例对比分析可知：

（1）本文方法计算的水平加筋地基极限承载力值与文献[11]的模型试验结果对比除个别结果相差较大外（例如表 1 中筋材层数$n=2$时），其他大体上较为接近，且总的变化趋势一致。

（2）与文献[12]的改进极限平衡方法计算结果对比，由于采用的破坏模式和计算方法不同，本文方法计算加筋地基承载力结果大于文献[12]的计算值，克服了现有分析方法结果偏于保守的缺陷。

（3）当筋材层数为$n=1$～8 时，可以看出水平加筋地基极限承载力随着加筋层数的增加而逐渐提高，当筋材层数增加到$n=9$时，其值已经不再增加，原因是在此种筋材设计参数下，筋材层数为$n=8$时加筋深度已经达到临界有效深度。

（4）本文构建的可变破坏模式考虑了加筋设计参数对地基破坏模式及承载力的影响，也更能反映工程实际情况。

图 4 为本文采用优化方法计算水平加筋地基承载力得到的真实滑裂面。由图可知：当筋材层数$n=0$时，图中虚线所示的滑裂面即为本文破坏模式下优化得到的无加筋地基滑裂面，与水平加筋地基的滑裂面相比，两者之间具有一定的差异，水平加

筋地基滑裂面的垂直深度随着加筋层数的增加而向下发展，同时水平影响距离也向外扩展，这是因为筋材能有效地扩散和均化地基中的土压力，改变地基土体破裂面产生的位置和形状；随着加筋层数增加，滑裂面的变化幅度明显越来越小，这说明筋材的影响范围是有限的，即在有效的加筋深度内，水平加筋地基的承载力随着加筋层数的增加而增大，但超过临界有效加筋深度时，由于本文假定筋材的抗弯刚度为 0，此时筋材处于抗推挤的状态，其能量耗散率为 0，水平加筋地基的极限承载力将趋于恒定。

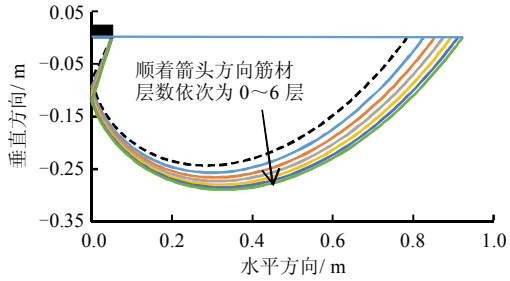


图 4　不同加筋层数的滑裂面

Fig.4　Sliding surfaces for reinforcement layer numbers

6.2　参数分析与讨论

为了探讨本文水平加筋地基极限承载力分析模型能反映筋材抗拉强度、加筋间距及土体内摩擦角的影响，选取文献[11]中 1～3 层筋材，通过变参数研究筋材抗拉强度、加筋间距及土体内摩擦角对水平加筋地基极限承载力的影响，具体分析过程如下。

6.2.1 水平筋材抗拉强度的影响

由于水平筋材的抗拉强度对水平加筋地基极限承载力有较大影响，因此，筋材的抗拉强度是进行地基处理设计时选取筋材种类的重要依据。若水平加筋地基采用抗拉强度较大的筋材，其极限承载力也会得到很大的提高，但其经济成本也会相应大幅增加，因此，有必要探讨筋材的抗拉强度对水平加筋土地基极限承载力的影响规律。其中取水平筋材抗拉强度 T_a = 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5、3.0 kN/m，其他参数保持不变。

图 5 为筋材的抗拉强度对水平加筋地基极限承载力的影响。由图可知，随着水平筋材抗拉强度的增大及加筋层数的增多，水平加筋地基的极限承载力都随之增大。但显然在加筋层数较多的情况下，水平加筋地基极限承载力提高的幅度要大，因此，在实际工程中，采用多层加筋的方式比采用单层加筋的效果要好。

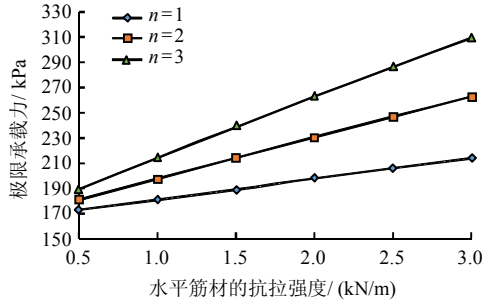


图 5　筋材抗拉强度对极限承载力的影响

Fig.5　Effect of tensile strength of reinforcement on ultimate bearing capacity

6.2.2 水平筋材加筋间距的影响

采用的筋材相同时，筋材的加筋间距不同也会影响水平加筋地基的极限承载力。在加筋深度相同的情况下，加筋间距 d/B 的变化意味着加筋层数的改变。为了探讨加筋间距对水平加筋地基极限承载力的影响规律，取文献[11]中 3 层筋材的加筋深度 0.072 m 固定不变，变化加筋间距进行分析，其他参数保持不变。

图 6 为筋材加筋间距对水平加筋地基的极限承载力的影响。由图可知，随着加筋间距 d/B 的减小，水平加筋地基的极限承载力增加，但增加的幅度不明显。因此，在实际工程中，试图通过加密布置筋材来提高水平加筋地基极限承载力的做法是不可取的，且由此还会增加工程的经济成本和施工的难度。

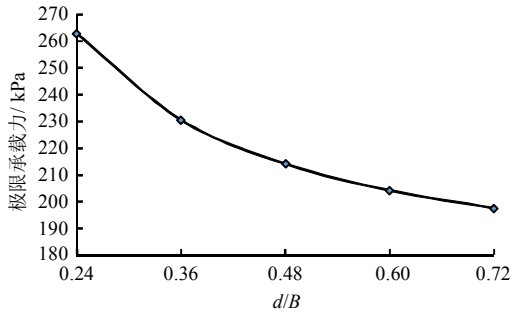


图 6　筋材加筋间距对极限承载力的影响

Fig.6　Effect of bar spacing on ultimate bearing capacity

6.2.3 土体内摩擦角的影响

水平加筋土地基的工程经济成本很大程度上取决于回填土体的种类及当地材料的可用性，而回填土体的类型直接决定土体的力学参数，因此，有必要探讨填土内摩擦角对水平加筋地基极限承载力的影响规律。计算中取 φ = 10° ～50°，其他参数保持不变。

图 7 为土体内摩擦角对水平加筋地基极限承载力的影响。由图可知，水平加筋地基的极限承载力随土体内摩擦角增大及加筋层数的增多都明显增

加。但土体内摩擦角对水平加筋地基极限承载力的影响更为敏感。因此，实际工程中应优先选取内摩擦角大的土体作为填料。

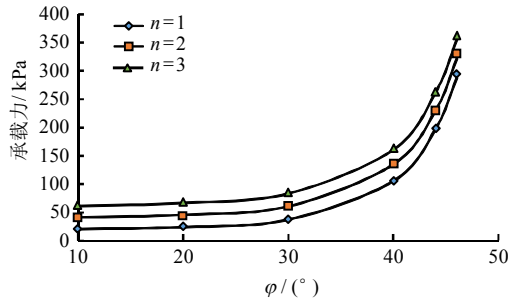


图 7 土体内摩擦角对极限承载力的影响

Fig.7 Effect of friction angle on ultimate bearing capacity

7 结 论

（1）本文结合条形基础下水平加筋地基的工程特点，假定筋材与土体变形协调，在经典土力学理论的基础上，构建了反映加筋参数变化影响的可变破坏新模式及相应变形协调速度场，为水平加筋地基承载力分析确定了坚实的理论基础。

（2）在条形基础下水平加筋地基可变破坏模式的基础上，引进上限极限分析方法，建立了条形基础下水平加筋地基极限承载力分析模型，再引入优化算法解决了水平加筋极限承载力分析模型的不确定问题，从而建立出条形基础加筋地基极限承载力确定方法。

（3）通过已有模型试验结果与本文方法及现有同类方法结果的对比分析，结果表明，本文方法克服了现有方法计算结果偏于保守的缺陷，且本文的计算结果和模型试验结果具有较好的吻合性，这验证了本文理论分析的可行性与合理性。

参 考 文 献

[1] 梁波, 杨有海. 加筋砂土地基承载力理论与试验分析研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(1):123－127.
LIANG Bo, YANG You-hai. Theory and experiment on bearing capacity of reinforced sandy soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2008, 30(1): 123－127.

[2] 周建萍, 阎澍旺. 滑移线理论在土工合成材料加固软基中的应用[J]. 铁道学报, 2002, 24(5): 103－103.
ZHOU Jian-ping, YAN Shu-wang. Bearing capacity of geosynthetic-reinforced soft ground solved by characteristic line method[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2002, 24(5): 103－103.

[3] YAMAMOTO K, KUSUDA K. Failure mechanisms and bearing capacities of reinforced foundations[J]. **Geotextiles & Geomembranes**, 2001, 19(3): 127－162.

[4] KUMAR J, SAHOO J P. Bearing capacity of strip foundations reinforced with geogrid sheets by using upper bound finite element limit analysis[J]. **International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics**, 2013, 37(18): 3258－3277.

[5] RADOSLAW L M. Stability of uniformly reinforced slopes[J]. **Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering**, 1997, 123(6): 546－556.

[6] 崔新壮, 姚占勇, 商庆森, 等. 加筋土坡临界高度的极限分析[J]. 中国公路学报, 2007, 20(1): 1－6.
CUI Xin-zhuang, YAO Zhan-yong, SHANG Qing-sen, et al. Limit analysis of critical heights of reinforced soil slope[J]. **China Journal of Highway and Transportation**, 2007, 20(1): 1－6.

[7] 乔丽平, 王钊. 加筋土坡临界高度的研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(1): 132－136.
QIAO Li-ping, WANG Zhao. Research of critical height of reinforced slopes[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(1): 132－136.

[8] LESHCHINSKY D, REINSCHMIDT A J, LESHCHINSKY D, et al. Stability of membrane reinforced slopes[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1985, 111(11): 1285－1300.

[9] 周健, 孔祥利, 王孝存. 加筋地基承载力特性及破坏模式的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(9): 1265－1269.
ZHOU Jian, KONG Xiang-li, WANG Xiao-cun. Bearing capacity behaviours and failure modes of reinforced grounds[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2008, 30(9): 1265－1269.

[10] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975.

[11] JU J W, SON S J, KIM J Y. Bearing capacity of sand foundation reinforced by geonet[C]//International Symposium on Earth Reinforcement. Fukuoka, Japan: [s. n.], 1996: 603－608.

[12] 刘拴奇, 卢坤林, 朱大勇, 等. 条形基础加筋砂土地基极限承载力计算[J]. 岩土力学, 2015, 36(8): 2307－2314.
LIU Shuan-qi, LU Kun-lin, ZHU Da-yong, et al. A method for calculating the ultimate bearing capacity of a strip footing on the reinforced sand[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(8): 2307－2314.