

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.2154

基于突变和流变理论的采空区群系统稳定性

谢学斌¹, 邓融宁¹, 董宪久², 闫泽正¹

(1. 中南大学 资源与安全工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 广西中金岭南矿业有限责任公司, 广西 武宣 545902)

摘 要: 为预防地下矿山采空区群系统高应变能的突然释放引发的灾害, 通过构建顶板-矿柱三维空间力学模型, 利用突变理论和流变力学理论对其稳定性及突变倾向性作定量与定性分析, 推导出系统在不同时刻突变并释放能量的数学判据和力学条件, 提出系统稳定性的分析算法并验证了其有效性和实用性, 在此基础上探讨各影响因子对该系统稳定性的影响。结果表明: 随着矿柱流变, 系统突变倾向性减小, 但顶板整体性逐渐破坏且边界条件依次进入固支、简支和自由边 3 个阶段, 维持系统稳定的矿柱有效承载面积比率临界值 ξ_{\min} 仅在各阶段内连续减小, 在顶板简支和自由边的阶段起点处 ξ_{\min} 值突跳增大, 3 个阶段 ξ_{\min} 值的平均减小速率依次降低; 顶板刚度 D 、上覆岩层荷载 q_0 、矿柱面积比率 ξ 和采空区群尺寸之间的数值关系对系统稳定性起主导作用。该研究结果可为矿山安全开采规划和采空区群系统稳定性评判及调控提供新思路和新方法。

关键词: 突变理论; 系统稳定性; 采空区群; 力学模型; 流变理论; 岩石力学

中图分类号: TD 324; O 343.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018) 06-1963-10

Stability of goaf group system based on catastrophe theory and rheological theory

XIE Xue-bin¹, DENG Rong-ning¹, DONG Xian-jiu², YAN Ze-zheng¹

(1. School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha, Hunan 410083, China;

2. Zhongjin Lingnan Mining Company Limited in Guangxi, Wuxuan, Guangxi 545902, China)

Abstract: A three-dimensional (3D) roof-pillars model was established to prevent disasters caused by the sudden release of high strain energy of goaf group system in the underground mine. The stability and mutational tendency of this model were analysed qualitatively and quantitatively based on the catastrophe theory and rheological mechanics theory. The mathematical criterion and mechanical conditions of the mutation and energy release at different moments were also derived. Moreover, an analytical algorithm for the stability of goaf group system was proposed, and its validity and practicability were verified. The effect of each factor on the stability of this system was further discussed on this basis. The results showed that, with the rheological process of pillars, the tendency of system mutation decreased. However, the integrity of roof was destroyed gradually, and its boundary condition successively the following three stages: the fixed end, simple support and free end. The critical value (ξ_{\min}) of the effective load bearing area ratio of pillars which maintained the system stability decreased at each stage, but ξ_{\min} jumped at the starting point of the stage of simple support and free end. In addition, the average reduction rates of ξ_{\min} at three stages decreased in turn. The system stability was dominated by the numerical relationship among the roof stiffness (D), overlying strata load (q_0), the effective load bearing area ratio of pillars (ξ) and the size of goaf group. Therefore, the study results provide a new idea and method for the safe excavation of mine as well as the evaluation and control of goaf group system stability.

Keywords: mutation theory; system stability; goaf group; mechanical model; rheological theory; rock mechanics

1 引 言

在地下矿床开采领域, 采用房柱法、留矿法等空场采矿法开采后, 遗留空区在一定区域内集中, 从而形成地下采空区群系统。该系统稳定性主要由

顶板和矿柱这两个基本要素共同决定, 岩石具有高应变能储备的内在特性, 空区提供能量积聚的外在条件。地下开采中, 该系统所积累的应变能和势能保持的平衡具有动态和不稳定性。顶板是采空区相对薄弱部分, 当采空区尺寸、支承情况和承载状况

收稿日期: 2016-09-10

基金项目: 国家自然科学基金 (No.51374246)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51374246).

第一作者简介: 谢学斌, 男, 1968 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程、采矿工程、安全工程方面的科研和教学工作。E-mail: xbxie@csu.edu.cn

通讯作者: 邓融宁, 男, 1991 年生, 硕士研究生, 主要从事岩土力学方面的研究。E-mail: 419604297@qq.com

处于或变化到临界状态时,系统会突然失稳并释放大能量,引发顶板突然断裂、坍塌等工程地质灾害^[1-2],重则导致相邻采空区贯通,原应力条件改变,进而造成规模更大的、灾害性的失稳事故^[3]。因此,开展地下矿山采空区群的稳定性及其影响因素研究,对保证地下矿山安全生产具有至关重要的意义。

关于采空区稳定性研究的课题在国内外较新,目前为起步阶段^[4]。近年来耗散结构理论^[5]、弹塑性理论及突变理论^[6]等被引入岩石力学,给地下矿山空区失稳研究提供了有力工具。特别是结合突变理论的成果较多,例如国内专家陈庆发等^[7]构造顶板-矿柱模型,用突变理论分析了对称协同开采人工矿柱的失稳机制。此外,进行类似研究的还有秦四清^[8]、李江腾^[9]等。王金安等^[10-11]对采空区系统构建了平板-弹性基础三维力学模型,从弹塑性力学和岩土流变学角度,以顶板边界条件的改变为判据,对采空区失稳机制、稳定时间方面进行了探讨。

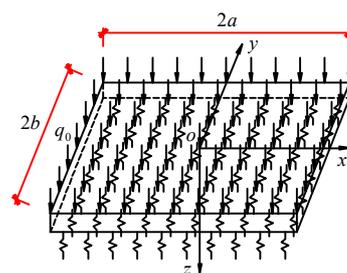
综上所述,前人对顶板-矿柱系统稳定性的研究存在以下不足:①结合突变理论分析时,大多仅限于平面弹性力学模型,其不如三维的直观精确,但构建三维模型的研究方法因计算复杂性带来困难而大多偏向于数值模拟;②相关的研究大多只针对单个采空区进行,而对空区群系统相对较少^[3];③很少将突变与流变理论结合,并研究突变影响因子对系统突变倾向性的作用。鉴于此,本文针对地下矿山复杂空区群系统,在王金安的物理模型^[10]基础上,将突变和流变理论相结合,以顶板-矿柱三维系统突变失稳为判据,研究其失稳机制。即将顶板等效为薄板,用 Burgers 体模型表征矿柱蠕变特性,将相同时刻的矿柱等效为 Weibull 模型弹性体,就此模型,首先运用突变理论分析其失稳机制,推导出空区群系统突变释放能量的数学判据和力学条件,得到其失稳判别的算法流程;接着结合流变理论,提出突变失稳前稳定时间估测的算法流程;然后结合实例进行验证;最后找出影响系统稳定性的主控因子,并分别取不同数值,分析探讨其各自数值的改变对系统发生突变失稳的倾向性的影响规律。为采空区群稳定性辨识、调控、稳定时间预测、隐患排查和开采规划等提供新参考。

2 空区群顶板-矿柱系统力学模型

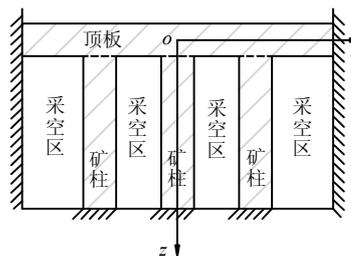
2.1 顶板-矿柱系统力学模型构建

基本假设:①顶板近似均匀且厚度 h 和最小边

长 $2b$ 的比值处于 $1/100$ 到 $1/5$ 之间,且顶板最大下沉量与板厚度之比 w_{\max}/h 不大于 $1/5$,满足薄板小挠度弯曲的条件;②上覆岩层对顶板的均布力 q_0 近似恒定;③空区四周岩壁坚硬,其微小塑性变形对顶板的支撑作用影响忽略不计;④空区群顶板形状近似地等效于矩形板;⑤顶板的支撑矿柱数量 n 足够多且近似等距分布。则可将空区群顶板等效为薄板、支撑矿柱等效为均匀分布的弹性体,建立顶板-矿柱三维物理模型如图1所示。



(a) 系统力学模型



(b) 顶板-矿柱体系剖面示意图

图1 空区群系统简化为顶板-矿柱系统的力学模型
Fig.1 Mechanical model of simplified roof plate and pillars system for goaf group

由弹性力学可得顶板挠曲方程为^[12]

$$w(x, y) = C\varphi(x, y) \quad (1)$$

式中: w 为顶板下沉挠度; C 为顶板中心挠度。

若顶板边缘尚未破坏,则将其视为四边固支的薄板模型,在此顶板边界条件下系统所处的该阶段命为阶段I,则式(1)中的 $\varphi(x, y)$ 可近似表达为^[12]

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{a^4 b^4} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \quad (2)$$

式中: a 、 b 分别为顶板长边长的 $1/2$ 与短边长的 $1/2$ 。

随着矿柱支撑能力下降,顶板长、短边依次进入塑性状态,四边内部渐破坏,最后由固支变简支,但其整体性变化不大,将该顶板边界条件下的系统状态所处阶段命为阶段II,则 $\varphi(x, y)$ 可近似取^[11]:

$$\varphi(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (3)$$

前人研究知^[11]，顶板边缘完全破坏的条件为

$$C \geq \frac{[\sigma_T] a^2 h^2}{48D} = \lambda_1 \quad (4)$$

式中： h 为顶板厚度； D 为顶板刚度； $[\sigma_T]$ 为顶板所受随时间变化的应力； λ_1 为常数。

当阶段II结束时，在拉应力作用下^[13]，顶板边缘完全破坏且内部破裂成很多板块^[11]，整体性遭到破坏，应变能完全释放，四边相当于自由边。由于矿柱仍具有抗压能力，因此，顶板并未完全失稳塌陷，此阶段命为阶段III。在阶段III里，顶板的自重和上覆岩层的载荷完全由矿柱支撑，此时顶板下沉位移（挠度）是由矿柱的支承情况决定，且与刚度无关，相当于 $D=0$ 、 $w=u$ 。阶段II破坏条件为

$$C \geq \frac{2a^2 b^2 h^2 [\sigma_T]}{3(b^2 + a^2 \nu) \pi^2 D} = \lambda_2 \quad (5)$$

式中： ν 为顶板的泊松比； λ_2 为常数。

考虑矿柱随时间的流变性，将矿柱视为 Burgers 体模型，如图2所示。其蠕变方程为^[14]

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[1/E_2 + t/\eta_2 + (1 - \exp(-E_1 t/\eta_1))/E_1 \right] \quad (6)$$

式中： $\varepsilon(t)$ 为矿柱随时间 t 的应变； σ 为矿柱应力； E_1 、 E_2 为弹性系数； η_1 、 η_2 为黏性系数。

则矿柱弹性模量 E 随时间变化关系为

$$E(t) = J^{-1}(t) \quad (7)$$

式中： $J(t)$ 为矿柱的柔变模量随时间变化的函数，且 $J(t) = 1/E_2 + t/\eta_2 + (1 - \exp(-E_1 t/\eta_1))/E_1$ 。

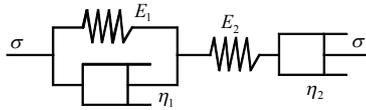


图2 矿柱的 Burgers 体物理本构模型

Fig. 2 Burgers physical constitutive model of the pillar

Burgers 体模型参数一般由室内和现场蠕变试验并结合数学分析确定，常用设备有三轴流变伺服系统、单轴弹簧压力试验机和杠杆式压力机等^[14]。现关于此类研究成果较多，可作参考^[15-19]。

根据损伤力学，weibull 分布模型对于描述矿柱的 σ - ε 关系具有广泛适用性^[20]，其关系式如下^[21]：

$$\sigma = E_0(t) \varepsilon \exp[-(\varepsilon/\varepsilon_0)^m] \quad (8)$$

式中：对于矿柱， $E_0(t)$ 为在时间 t 处的初始弹性模量； ε 为应变； σ 为应力； ε_0 为 σ - ε 曲线峰值点的应变平均测度； m 为均匀性指标，由试验拟合得。

2.2 模型简化及顶板下沉挠度算法

一元三次函数与 Weibull 分布 σ - ε 的曲线在峰值前具有极高相似度^[11]，故为降低计算难度，将式(8)等效转化并结合 $\varepsilon = w/H$ (H 为矿柱的初始高度)，算出矿柱对顶板极小面积上的作用力为

$$\delta F = \sigma dx dy = (\tilde{E}_1 \varepsilon + \tilde{E}_3 \varepsilon^3) dx dy = \left(\frac{\tilde{E}_1 w}{H} + \frac{\tilde{E}_3 w^3}{H^3} \right) dx dy \quad (9)$$

式中： \tilde{E}_1 和 \tilde{E}_3 都是通过曲线的拟合确定的参数，其中 $\tilde{E}_1 > 0$ ， $\tilde{E}_3 < 0$ ，且 $\tilde{E}_1 = 3E_0(t)/(2e^{1/m})$ ， $\tilde{E}_3 = -E_0^3(t)/(2e^{3/m}[\sigma_m]^2)$ ，其中 $[\sigma_m]$ 为矿柱压缩应力的峰值。

模型的控制方程为

$$D \nabla^4 w + \xi \sigma = q_0 \quad (10)$$

式中：顶板刚度 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ， E 为顶板的弹性模量； ξ 为有效的支撑矿柱面积比率，且 $\xi = A/4ab$ ， A 为经过折减后支撑矿柱与顶板有效接触的总面积。

将 $\varepsilon = w/H$ 和 $\sigma = \tilde{E}_1 \varepsilon + \tilde{E}_3 \varepsilon^3$ 代入式(10)中消去 σ ，并与式(1)联立，再由伽辽金法得

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(CD \nabla^4 \varphi + \frac{\xi \tilde{E}_1}{H} C \varphi + \frac{\xi \tilde{E}_3}{H^3} C^3 \varphi^3 - q_0 \right) \varphi dx dy = 0 \quad (11)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi \cdot \nabla^4 \varphi dx dy &= \alpha_1, & \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi^2 dx dy &= \alpha_2 \\ \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi^4 dx dy &= \alpha_3, & \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi dx dy &= \alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中，当顶板边界状态处于阶段I时，将式(2)代入式(12)得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{32 \ 768(7a^4 + 4a^2 b^2 + 7b^4)}{11 \ 025 a^3 b^3} \\ \alpha_3 &= \left(\frac{65 \ 536}{109 \ 395} \right)^2 ab, & \alpha_4 &= \frac{256}{225} ab, & \alpha_2 &= \frac{65 \ 536}{99 \ 225} ab \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

当顶板边界状态处于阶段II时，将式(3)代入式(12)得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi^4 (a^4 + a^2 b^2 + b^4)}{16 a^3 b^3}, & \alpha_2 &= ab \\ \alpha_3 &= \frac{9}{16} ab, & \alpha_4 &= \frac{16}{\pi^2} ab \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当顶板边界状态处于阶段III时，将 $\varphi(x, y) = 1$ 代

入式 (12) 得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 4ab \\ \alpha_3 = 4ab, \quad \alpha_4 = 4ab \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

联立式 (11)、(12) 并化简, 且由下式求得 C 解:

$$C^3 + p'C + q' = 0 \quad (16)$$

式中: $p' = \frac{D\alpha_1 H^3 + \xi \tilde{E}_1 \alpha_2 H^2}{\xi \tilde{E}_3 \alpha_3}$; $q' = -\frac{\alpha_4 q_0 H^3}{\xi \tilde{E}_3 \alpha_3}$ 。

3 模型突变和流变理论分析

3.1 考虑矿柱流变的系统尖点突变理论模型

采空区群系统状态从连续到突然变化导致失稳, 这实质上是一种不可逆的演化过程, 现对其突变性进行研究。空区群底板和围岩的刚度远大于顶板和矿柱刚度, 故前两者位移量与后两者相比可忽略不计, 再加上顶板中心下沉位移 C 等于中心矿柱的压缩位移 u , 则系统势函数表达式为

$$V = U_1 + U_2 - W \quad (17)$$

式中: U_1 为顶板弯曲的应变能 (由薄板理论知^[11], 四边固支与简支的顶板弯曲应变能表达式不同); U_2 为矿柱压缩应变能; W 为外力作的功。

$$U_1 = \beta u^2 = \begin{cases} \frac{Du^2}{2} \iint_A \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 dx dy & \text{(固支)} \\ \frac{Du^2}{2} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy & \text{(简支)} \end{cases} \quad (18)$$

$$U_2 = \xi \iint_A \left(\int_0^w \delta F dw \right) = \left(\frac{\xi \tilde{E}_1}{2H} \iint_A \varphi^2 dx dy \right) u^2 + \left(\frac{\xi \tilde{E}_3}{4H^3} \iint_A \varphi^4 dx dy \right) u^4 \quad (19)$$

$$W = \iint_A q_0 w(x, y) dx dy = \left(q_0 \iint_A \varphi dx dy \right) u \quad (20)$$

由式 (17) ~ (20) 得系统势函数为

$$V = \left(\frac{\xi \tilde{E}_3}{4H^3} \iint_A \varphi^4 dx dy \right) u^4 + \left(\beta + \frac{\xi \tilde{E}_1}{2H} \iint_A \varphi^2 dx dy \right) u^2 - \left(q_0 \iint_A \varphi dx dy \right) u \quad (21)$$

由式 (21) 可求得平衡方程为

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 2\beta u + \left(\frac{\xi \tilde{E}_1}{H} \iint_A \varphi^2 dx dy \right) u + \left(\frac{\xi \tilde{E}_3}{H^3} \iint_A \varphi^4 dx dy \right) u^3 - q_0 \iint_A \varphi dx dy = 0 \quad (22)$$

将式 (22) 整理为

$$u^3 + m_1 u + n_1 = 0 \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{2\beta + \frac{\xi \tilde{E}_1}{H} \iint_A \varphi^2 dx dy}{\frac{\xi \tilde{E}_3}{H^3} \iint_A \varphi^4 dx dy} = \\ &\quad - \left(\frac{4\beta e^m H^3 [\sigma_m]^2}{\xi E_0^3(t) \alpha_3} + \frac{3[\sigma_m]^2 H^2 e^{\frac{2}{m}} \alpha_2}{E_0^2(t) \alpha_3} \right) < 0 \\ n_1 &= - \frac{q_0 \iint_A \varphi dx dy}{\frac{\xi \tilde{E}_3}{H^3} \iint_A \varphi^4 dx dy} = \frac{2[\sigma_m]^2 H^3 e^{\frac{3}{m}} q_0 \alpha_4}{\xi E_0^3(t) \alpha_3} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (23)、(24) 是尖点突变理论里典型的平衡曲面方程^[22]。由于式 (21) 中 u^4 的系数为负数, 故得到一个对偶尖点。在平衡曲面上, 处于中叶褶皱边缘上的相点叫临界点 (突变点), 其稍微扰动就能突跳到上叶或下叶。临界点处, 平衡函数对 u 的偏导为 0, 即 $3u^2 + m_1 = 0$, 将其与式 (23) 联立并消去 u 得

$$\Delta = 4m_1^3 + 27n_1^2 = 0 \quad (25)$$

由尖点突变理论知^[22], 式 (25) 为分叉集方程, 是该系统突变的力学判据方程。只有当 $\Delta < 0$ 时控制参数平面上的相点才有跨越分叉集使系统突变的可能; 相点越过分叉集时, 对应的 u 值发生突跳造成系统极限点失稳并释放能量, 宏观表现为矿柱破坏、顶板突然断裂及坍塌等, 特别是高应变能的瞬时释放会产生岩爆, 危害更大。由式 (24) 知, 因 $m_1 \leq 0$, 故该系统满足发生突变失稳的必要条件。

3.2 基于空区群系统突变力学判据的支撑矿柱临界面积算法

对某个空区群系统, 在其他参数确定的某个时刻, 联立式 (23) ~ (25) 可求出使系统不发生突变的矿柱群与顶板最小接触总面积, 命为 A_{\min} 。当 $A < A_{\min}$ 时, 系统不稳定, A_{\min} 算法流程图如图 3 所示。

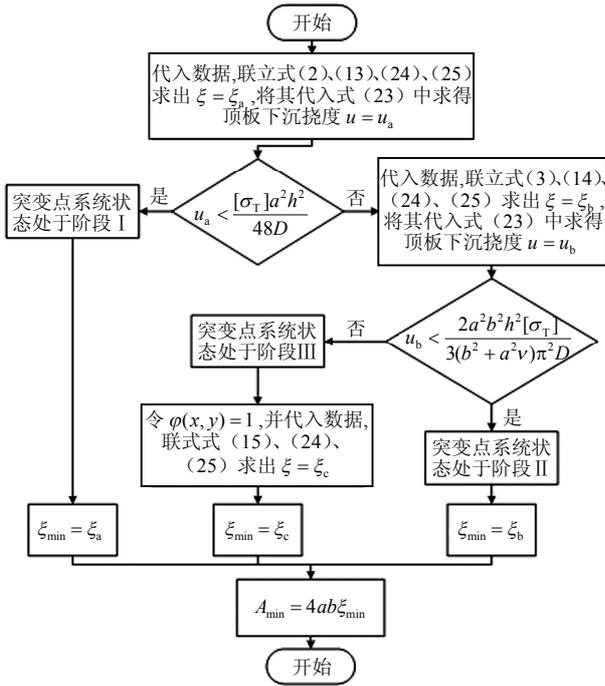


图 3 A_{\min} 算法流程图

Fig.3 Algorithm flow chart of A_{\min}

3.3 矿柱回采时系统到达突变用时的计算

实际矿柱回采中, 各参数值具有动态性, 给计算带来难度。假设参数 a 、 b 、 D 、 q_0 、 H 、 m 为定值, 随着时间 t , 矿柱面积比率 ξ 值因矿柱的破坏而呈现递减趋势, 从而 ξ 值是 t 的减函数, 记为 $\xi_1(t)$ 。将式 (24) 代入式 (25), 再综合 3 个阶段状态条件, 求出突变点处 ξ_{\min} (ξ 临界值) 随 t 变化的分段函数 $\xi_2(t)$ 。空区群系统突变前的时间 t_1 为 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 曲线交点横坐标值, 其算法流程图如图 4 所示。 $\xi_1(t)$ 与 $\xi_2(t)$ 函数曲线示意图如图 5 所示, 由图知, 随矿柱流变, 系统依次进入 I、II、III 阶段, ξ_{\min} 值仅在每阶段内连续变化并减小, 3 个阶段 ξ_{\min} 变化依次减缓; 在 II、III 阶段起点 ξ_{\min} 值突跳增大。

将 $t = t_1$ 代入式 (23)、(24), 并联立式 (23) ~ (25) 得

$$u^3(t_1) + m_1 u(t_1) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{-m_1^3} = 0 \quad (26)$$

式 (26) 所求 $u(t_1)$ 的重根值命为 u_1 , 即为系统突变处顶板最大下沉的挠度。接下来对突变点发生在不同阶段时 t_1 的求法进行简单探讨。

3.3.1 系统发生突变时处于阶段 I

联立式 (13)、(16) 并代入数据求得的 C 命为 C_1 , 若 $C_1 < \lambda_1$, 则系统初始状态处于阶段 I, $\varphi(x, y)$ 表达式采用式 (2), 将用上述方法求得的 u_1 值命为 u_2 ; 如果要使突变也发生在阶段 I, 那么由式 (4) 可知 u_2 必须满足条件: $u_2 < \lambda_1$ 。在该阶段中, 求出

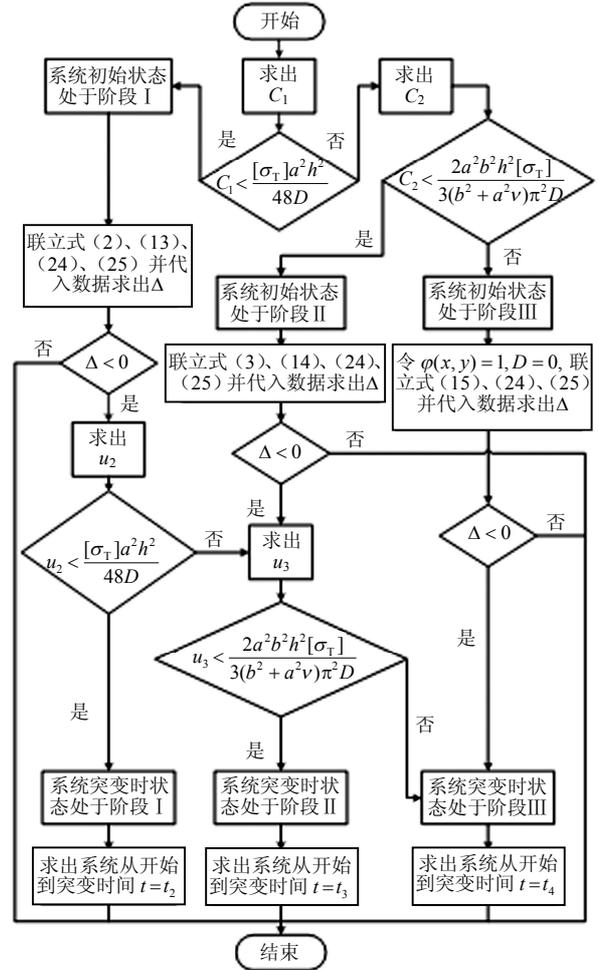


图 4 矿柱回采时系统到达突变的时间算法流程图

Fig.4 Algorithm flow chart of the time from the beginning to catastrophe instability when pillar extracting

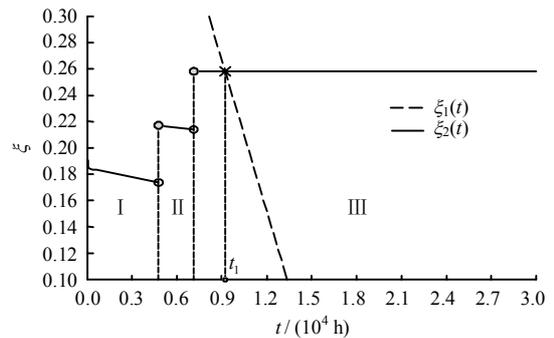


图 5 伴随矿柱流变的 ξ - t 关系曲线

Fig.5 ξ - t curves of the pillar with rheological effect

的 t_1 值就是系统从开始到突变所经历的时间, 命为 t_2 。

3.3.2 系统发生突变时处于阶段 II

由式 (4) 知, 当 C_1 或 $u_2 \geq \lambda_1$ 时, 系统突变失稳发生在阶段 I 之后。当 $C_1 \geq \lambda_1$ 时, 联立式 (14)、(16) 求出的 C 命为 C_2 , 若 $C_2 < \lambda_2$, 则系统初始状态处于阶段 II。当 $u_2 \geq \lambda_1$ 时 $\varphi(x, y)$ 的表达式采用式 (3), 所求 u_1 值命为 u_3 。则突变发生在阶段 II 的条件为 $u_3 < \lambda_2$ 。在此基础上求出的 t_1 命为 t_3 , 即为

系统从开始到突变所用的时间。

3.3.3 系统发生突变时处于阶段III

由式(5)知,当 u_3 或 $C_2 \geq \lambda_2$ 时,系统突变发生在阶段III。此时, $D=0$, $\varphi(x,y)=1$;同理,可求出突变点处矿柱压缩量 u_4 及所经历的时间 t_4 ,此时 u_4 满足条件: $u_4 \geq \lambda_2$ 。

3.4 算法的工程应用及其有效性和实用性验证

盘龙矿矿区位于中国广西省中部偏东,以开采铅锌矿为主,上覆岩层主要为白云岩。在-270中段23到26线间存在空区群,该区近似矩形;在2013年2月至2014年7月内空区自稳,之后出现明显冒

落、岩爆等灾害现象;初期,其顶板未有明显下沉现象,此期间按计划进行矿柱回采等作业活动,估计矿柱与顶板接触面积的减小速率达到每月0.0275。现需计算该空区群的支撑矿柱覆盖面积临界值,并判断其稳定性;求出按回采计划,该空区群达到突变前的时间。对于相关蠕变参数,参考已有研究成果求取如下^[14,19]: $E_1=6.0 \times 10^5$ MPa, $E_2=2.6994 \times 10^4$ MPa, $\eta_1=1.11 \times 10^4$ MPa·h, $\eta_2=1.97 \times 10^9$ MPa·h。该区域其余的岩体力学及其相关的参数,分别由试验折减与现场调查取得,其各值见表1。

表1 盘龙矿某区域空区群系统各参数取值
Table 1 Parameters of goaf group system in an area of the Panlong ore

弹性模量 E /MPa	泊松比 ν	重度 γ_1 /(kN/m ³)	顶板		抗拉强度 $[\sigma_T]$ /MPa	均布荷载 q_0 /MPa	平均初始高度 H /m	矿柱		上覆岩层		空采区		支撑矿柱面积比率 ξ /%	均匀性指标 m
			平均厚度 h_1 /m	刚度 D /(MPa·m ³)				初始弹性模量 E_0 /MPa	峰值抗压强度 $[\sigma_m]$ /MPa	平均重度 γ_2 /(kN/m ³)	厚度 h_2 /m	近似长边 $2a$ /m	近似短边 $2b$ /m		
27657	0.23	28.32	8.5	1.4404×10^6	3.35	9.28	8	26994	35.98	27	335	140	48	61	1

根据前面的流程图,计算过程如下:

A_{min} 的求解:

(1) 代入数据,联立式(2)、(13)、(24)、(25)得 $\xi_a=0.1915$,将其代入式(23)、(24)求得 $u_a=0.0470$ m;故 $u_a > \frac{[\sigma_T]a^2h^2}{48D}=0.0165$ m, $\xi_a=0.1915$ 舍去。

(2) 代入数据,联立式(3)、(14)、(24)、(25)求得 $\xi_b=0.2856$,将其代入式(23)、(24)求得 $u_b=0.0399$ m;故 $u_b > \frac{2a^2b^2h^2[\sigma_T]}{3(b^2+a^2v)\pi^2D}=0.0181$ m,所求的 ξ_b 舍去。

(3) 令 $\varphi(x,y)=1$,并代入数据,联立式(15)、(24)、(25)求得 $\xi_c=0.2579$ 符合要求,即 $\xi_{min}=\xi_c=0.2579$;由于 $\xi > \xi_{min}$,系统具有稳定性。

(4) $A_{min}=4ab\xi_{min}=1733.088$ m²。

计划作业时考虑流变的稳定时间 t 的求解:

(1) 代入数据求得 $C_1=0.0128$ m,所以 $C_1 < \frac{[\sigma_T]a^2h^2}{48D}=0.0165$ m,系统初始状态在阶段I。

(2) 联立式(2)、(13)、(24)、(25)并代入数据求得 $\Delta=4m_1^3+27\eta_1^2=-4.8043 \times 10^{-7} < 0$ 。

(3) 若 t 以小时为单位,则 $\xi_1(t)=-(\partial\xi_1/\partial t)t+\xi=-3.819444 \times 10^{-5}t+0.61$;代入数据求得 $u_2=0.0607$ m;故 $u_2 > \frac{[\sigma_T]a^2h^2}{48D}=0.0165$ m,则系统突变时不处于阶段I,需要求 u_3 。

(4) 代入数据求得 $u_3=0.0526$ m;

故 $u_3 > \frac{2a^2b^2h^2[\sigma_T]}{3(b^2+a^2v)\pi^2D}=0.0181$ m,则系统突变时处于阶段III。

(5) 求得 $u_4=0.0340$ m, $t_4=9218$ h \approx 12.80月。

由计算结果可知,该区域系统初始状态处于阶段I,顶板较完整,最大下沉量约为1.65 cm,其相对于顶板厚度来说是极小的,约为顶板厚度的0.19%,下沉量极不明显,加之运用王金安等^[10]的算法结果约为0.089%,相差不大,故符合实际情况。由算法可知,系统尚未突变失稳,有发生突变的必要条件。当矿柱面积比率小于25.79%时,系统失稳,产生大面积顶板冒落、坍塌,此时系统状态处于阶段III,顶板不完整且破裂成多个板块;因此,该区域起支撑作用的矿柱与顶板的接触面积应高于1733.088 m²。在其他条件不变情况下,按矿柱回采计划,算出该区域系统稳定时间约为12.80个月,且系统突变时状态处于阶段III;实际观测时间约17个月,因12.80<17,在合理范围内,故与实际相符。

工程应用中,利用该算法,对于已有系统,可计算顶板最大下沉挠度并评判其完整度情况,判别系统是否处于或趋于危险状态,以及根据开采计划,估测系统达到突变失稳的时间;对计划开采区域,可评判其采场设计、开采规划等方案是否安全及合理,同时通过规划、设计间接调控系统的稳定时间。

4 各影响因子的变动对系统稳定性的影响分析

由式(24)知,影响空区群系统稳定性的因子

有：空区群尺寸 (a 和 b)、顶板刚度 D 、顶板载荷 q_0 、矿柱面积比率 ξ 、矿柱初始高度 H 、矿柱弹性模量 $E_0(t_0)$ 和矿柱峰值抗压强度 $[\sigma_m]$ 。 ξ 和 $E_0(t_0)$ 的变动直接影响顶板下沉挠度及突变状况，接下来先以这两者作为切入点研究各因子对系统稳定性的作用，再探讨各因子数值的变动对 ξ 临界值的影响。阶段 I 或 II 顶板保持完整性，顶板最大下沉挠度及系统稳定性受其物理性质的影响，现只研究这两阶段。

4.1 矿柱面积比率和弹性模量对下沉挠度影响

在某一时刻 $t = t_0$ 时，另 $E_0 = E_0(t_0)$ ，将式 (13) 或式 (14) 代入式 (24)，并将求得的 m_1 和 n_1 代入式 (23) 得出以 ξ 为自变量、 u 为因变量的隐函数为

$$u^3(\xi) - \left(\frac{k_1}{\xi} + k_2\right)u(\xi) + \frac{k_3}{\xi} = 0 \quad (27)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{k_1}{\xi} + k_2\right) &= m_1, \quad \frac{k_3}{\xi} = n_1, \quad k_1 = \frac{4\beta e^m H^3 [\sigma_m]^2}{E_0^3 \alpha_3} \\ k_2 &= \frac{3[\sigma_m]^2 H^2 e^m \alpha_2}{E_0^2 \alpha_3}, \quad k_3 = \frac{2[\sigma_m]^2 H^3 e^m q_0 \alpha_4}{E_0^3 \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

在某个时间段内令 $E_T = E_0(t)$ ，若式 (24) 以 $E_0(t)$ 为自变量、 u 为因变量，则得出隐函数如下：

$$u^3(E_T) - \left(\frac{l_1}{E_T^3} + \frac{l_2}{E_T^2}\right)u(E_T) + \frac{l_3}{E_T^3} = 0 \quad (29)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{l_1}{E_T^3} + \frac{l_2}{E_T^2}\right) &= m_1, \quad \frac{l_3}{E_T^3} = n_1, \quad l_1 = \frac{4\beta e^m H^3 [\sigma_m]^2}{\xi \alpha_3} \\ l_2 &= \frac{3[\sigma_m]^2 H^2 e^m \alpha_2}{\alpha_3}, \quad l_3 = \frac{2[\sigma_m]^2 H^3 e^m q_0 \alpha_4}{\xi \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

由式 (13)、(14)、(18) 可得 β/α_3 的通式为 $\beta/\alpha_3 = s_1 D(1/b^4 + 1/a^4 + s_2/(ab)^2)$ ，其中 s_1 和 s_2 分别为任意常数。可看出，顶板宽度一定时其面积 ab 或刚度 D 越大，则 β/α_3 越大， k_1 或 l_1 值也就越大。同理可得， α_2/α_3 与 α_4/α_3 值为常数，不影响 k_2 、 k_3 或 l_2 、 l_3 的取值。

分别在 b 、 H 、 $[\sigma_m]$ 和 E_0 值一定的条件下讨论式 (27)、(28)， b 、 H 、 $[\sigma_m]$ 和 ξ 值一定的条件下讨论式 (29)、(30)。由式 (27) ~ (30) 知， $u(\xi)$ 和 $u(E_T)$ 的函数图像形状分别主要受 k_1 、 k_3 值和 l_1 、

l_3 值的影响。 k_1 或 l_1 值主要受空区群顶板刚度 D 和空区群顶板面积 ab 的大小影响，并与 D 呈正相关、与 ab 呈负相关； k_3 或 l_3 值主要受顶板载荷值 q_0 的影响，并与其呈正相关。参照盘龙矿工程数据，对式 (27)、(28) 只改变 k_1 值，用 Matlab 软件拟合出此情况下 $u(\xi)$ 函数的曲线族图像如图 6 所示。其中从左往右的曲线 k_1 值大小递减；若只改变 k_3 值，拟合出的 $u(\xi)$ 函数曲线族示意图与图 6 类似，但从左往右的曲线的 k_3 值大小递增。

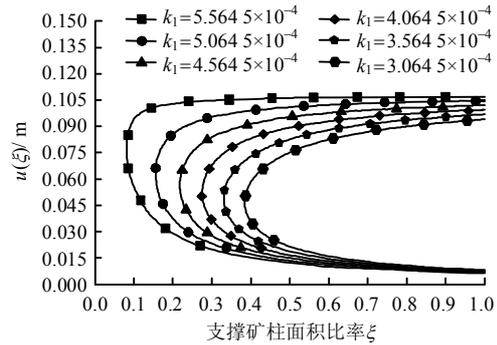


图 6 不同 k_1 值的 $u(\xi)$ 函数曲线族
Fig.6 Family curves of function $u(\xi)$ with different values of k_1

对于式 (29)、(30)，只改变 l_1 值大小，绘出它的 $u(E_T)$ 函数曲线族示意图如图 7 所示。其中从左往右的曲线的 l_1 值大小递增；若只改变 l_3 值，绘出的示意图与图 7 类似，但从左往右的曲线的 l_3 值大小递减。

图 6、7 中曲线的拐点均为系统突变点，相点离拐点越近，系统越趋向于发生突变。 $u(\xi)$ 函数图像的有效部分均为图中拐点以下的曲线， $u(E_T)$ 函数图像的左半支或下半支为其有效部分曲线。由图 6 可知，当 ξ 为定值时， k_1 值越小， k_3 值越大，则 u 越大，同时图像中相点离拐点越近；对于相同的 k_1 和 k_3 值曲线，随着 ξ 的减小 $u(\xi)$ 增大，相点离拐点越近；对于相同的 k_1 和不同的 k_3 或者相同的 k_3 和不同的 k_1 曲线，随着 ξ 的增大，各两两曲线间顶板下沉挠度的差值 Δu 逐步减小。由图 7 可知，对于同一条曲线， u 与 E_T 大小呈反比。矿柱的流变性使其 E_T 值随时间减小，从而相点与拐点距离随时间增大；因此，其他条件不变时，矿柱流变作用不会导致系统突变；但 u 随时间增大，导致顶板完整性逐渐被破坏，此过程表现为渐变性。图 7 曲线对于相同的 E_T 值，随 l_1 的减小或 l_3 的增大， u 也增大，相点离拐点也越近。函数 $u(E_T)$ 与函数 $u(\xi)$ 的分析相印证。

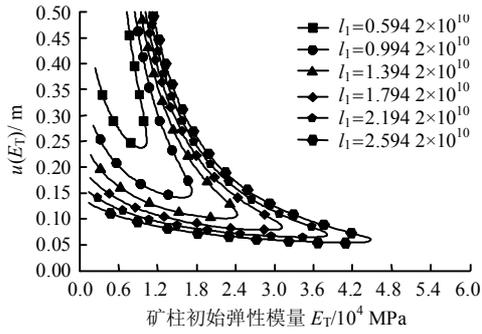


图 7 不同 l_1 值的 $u(E_T)$ 函数曲线族
Fig.7 Family curves of function $u(E_T)$ with different values of l_1

4.2 矿柱面积比率与弹性模量对临界点的影响

另 $f = 4m_1^3 + 27n_1^2$ 并结合式 (28) 和式 (30), 分别以 ξ 为自变量 $f(\xi)$ 为因变量、 E_T 为自变量 $f(E_T)$ 为因变量得出如下两函数:

$$f(\xi) = -4 \left(\frac{k_1}{\xi} + k_2 \right)^3 + 27 \left(\frac{k_3}{\xi} \right)^2 \quad (31)$$

$$f(E_T) = -4 \left(\frac{l_1}{E_T^3} + \frac{l_2}{E_T^2} \right)^3 + 27 \left(\frac{l_3}{E_T^3} \right)^2 \quad (32)$$

参照工程数据, 只改变 k_1 值绘出 $f(\xi)$ 关于不同 k_1 值的曲线族图像示意图如图 8 所示。其中从左往右的曲线的 k_1 值逐步减小; 若只改变 k_3 值, 绘出的曲线与图 8 类似, 但从左往右的曲线的 k_3 值逐步增大。只改变 l_1 值的大小, 绘出 $f(E_T)$ 关于不同 l_1 值的曲线族图像示意图如图 9 所示, 其中从左往右的曲线的 l_1 值逐步增大; 若只改变 l_3 值, 绘出的图像与图 9 类似, 但从左往右的曲线的 l_3 值逐步减小。

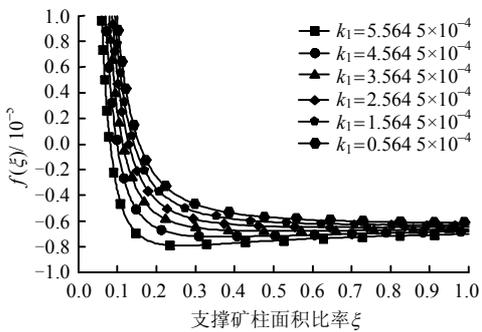


图 8 不同 k_1 值的 $f(\xi)$ 函数曲线族
Fig.8 Family curves of function $f(\xi)$ with different values of k_1

图 8、9 中曲线零点为突变点且该处 $\Delta = f(\xi) = f(E_0) = 0$, 相点离零点越近越倾向于发生突变。从图 8 可看出, 随着 k_1 的减小或者 k_3 的增大, $f(\xi)$ 零点处的 ξ 值增大, 即 ξ 的临界值增大。对于相同的 ξ

值, k_1 值越小或者 k_3 越大, 相点离零点越近。其次, 同一条曲线, 随着 ξ 的减小, 相点渐渐接近零点。这再次印证了对函数 $u(\xi)$ 的分析。

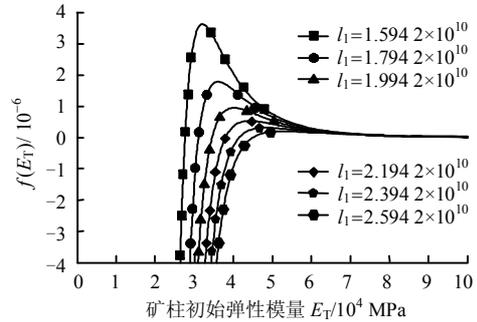


图 9 不同 l_1 值的 $f(E_T)$ 函数曲线族
Fig.9 Family curves of function $f(E_T)$ with different values of l_1

从图 9 看出, 同一曲线中随 E_T 的增大, $f(E_T)$ 值逐渐增大到 0。相同 E_T 值, l_1 越小或者 l_3 越大, 相点离零点越近。在一些具有孔隙和微裂隙的矿柱中, 其岩石压缩初始阶段为塑性变形, 孔隙和微裂隙逐渐压密, 宏观上表现为弹性模量的增大, 且随之系统有可能达到突变点发生突变。

4.3 各因子对矿柱面积比率临界值的影响分析

当 $\Delta = 0$ 时, 将式 (13) 或式 (14) 和式 (24) 式代入式 (25), 结合工程数据参数, 分别以 E_T 、 H 、 $[\sigma_m]$ 和 D 为自变量, 以 ξ 为因变量作函数示意图分别如图 10 所示, 其中图 10(b) 的曲线拐点以上为有效部分。

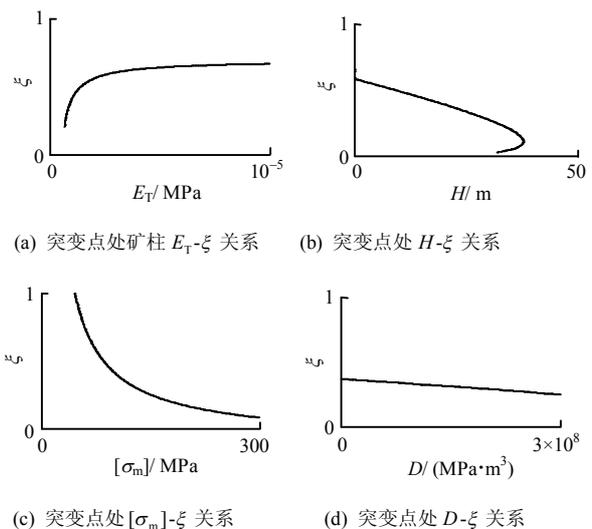


图 10 突变点处 ξ 分别与 E_T 、 H 、 $[\sigma_m]$ 、 D 的变化关系曲线

Fig.10 Relationships between ξ and E_T , H , $[\sigma_m]$, D respectively at the catastrophe point

从图 10 中可以看出, 突变点处的 ξ 值和 E_T 值

大小呈正比, 但与 H 、 $[\sigma_m]$ 和 D 值大小呈反比。计划或开采中, 可直接间接地调控这些参数来使维持系统稳定的 ξ 临界值减小。但矿柱高度大于一定程度时, 会导致其本身的失稳破坏; 顶板刚度小于一定值的时候也可能使其本身发生纵向断裂破坏。

综上, 上述分析具有一般性, a 、 b 、 D 、 q_0 和 ξ 是影响系统稳定性的外在因素, H 、 E_T 和 $[\sigma_m]$ 则是内在因素, a 、 b 、 D 、 q_0 和 ξ 为系统稳定性直接可控因子。其他条件不变情况下, 顶板刚度和支撑矿柱面积比率越小, 空区群长度越大、上覆岩层越厚, 则系统越倾向于发生突变失稳。地下开采中, 随着的矿柱面积比率的减小及应变软化, 顶板下沉挠度增大, 并逐渐产生内部拉伸破坏现象, 其完整性随之改变, 最终造成顶板垮落。当 D 、 q_0 、 H 、 E_T 和 $[\sigma_m]$ 值一定时, 可通过调控空区群尺寸和支撑矿柱面积比率来确保系统安全稳定。随着地下开采工作的进行, 空区群的尺寸会逐渐增加, 同时, 一些原始矿柱会发生风化和破坏以至于其强度降低, 系统稳定性也会随之下降。此时, 为保证系统安全稳定, 在开采同时应当保留足够数量的支撑矿柱; 也可通过加设人工矿柱的方式来加大 ξ 值, 或者用具有更大抗压强度的人工矿柱来替换已被破坏的原始矿柱; 必要时, 应对某些空区进行充填。

5 结 论

(1) 以地下矿山空区群为对象, 突破将顶板-矿柱系统构建二维模型的思想, 将其构建成三维物理模型, 结合尖点突变理论和岩土流变力学理论对其失稳释能的机制进行研究分析。

(2) 推导出了该系统突变失稳的力学判据, 并依此给出矿柱与顶板接触面积临界值的算法及矿柱回采时系统到达突变的时间算法流程图, 并验证了其有效性和实用性。

(3) 使系统不突变的矿柱面积比率临界值 ξ_{\min} 在每阶段里随时间减小, 3个阶段的 ξ_{\min} 平均减小速率依次降低, 且该值在每阶段起点处突跳增大。

(4) 在平衡方程和控制方程分析基础上, 列出了影响系统稳定性的各因子, 结合工程参数、软件分析论述了外在和内在因素对系统稳定性的影响作用。开挖过程中, 依据本文算法, 直接或间接地控制这些参数, 可对系统稳定性进行调控。

(5) 该分析具有一般性, 为空区群稳定性的力学状态分析及稳定时间预测等方面提供定量分析的新思路, 为矿山安全生产管理、隐患排查、开挖规划及空区群系统稳定性调控提供依据。

参 考 文 献

- [1] 付建新, 宋卫东, 谭玉叶. 考虑卸荷应力路径的深部采空区失稳局部能量释放判别准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(2): 217—224.
FU Jian-xin, SONG Wei-dong, TAN Yu-ye. Criterion of local energy release of gob destabilization in deep mines under unloading stress path[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2016, 35(2): 217—224.
- [2] 张钦礼, 曹小刚, 王艳利, 等. 基于尖点突变模型的采场顶板-矿柱稳定性分析[J]. 中国安全科学学报, 2011, 21(10): 52—57.
ZHANG Qin-li, CAO Xiao-gang, WANG Yan-li, et al. Stability analysis of stope roof-pillar based on cusp catastrophe model[J]. **China Safety Science Journal**, 2011, 21(10): 52—57.
- [3] 付建新, 宋卫东, 杜建华. 金属矿山采空区群形成过程中围岩扰动规律研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 1): 508—515.
FU Jian-xin, SONG Wei-dong, DU Jian-hua. Study of disturbance law for wall rock while goaf group formation in metal mines[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Supp.1): 508—515.
- [4] 吴启红. 矿山复杂多层采空区稳定性综合分析及安全治理研究[D]. 长沙: 中南大学, 2010.
WU Qi-hong. Analyzing stability synthetically and researching treatment methods on the complicated multi-layer mine-out areas[D]. Changsha: Central South University, 2010.
- [5] 郭璇, 张顶立, 赵成刚, 等. 岩石结构超塑性损伤本构理论及热力学框架[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(4): 658—669.
GUO Xuan, ZHANG Ding-li, ZHAO Cheng-gang, et al. Constitutive theory and thermodynamic framework for hyperplastic damage of deep rock structure[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2016, 35(4): 658—669.
- [6] YU L, LIU J J. Stability of interbed for salt cavern gas storage in solution mining considering cusp displacement catastrophe theory[J]. **Petroleum**, 2015, 1(1): 82—90.
- [7] 陈庆发, 古德生, 周科平, 等. 对称协同开采人工矿柱失稳的突变理论分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2012, 43(6): 2338—2342.
CHEN Qing-fa, GU De-sheng, ZHOU Ke-ping, et al. Analysis of catastrophe theory for artificial pillar

- instability in symmetric synergistic mining[J]. **Journal of Central South University(Science and Technology)**, 2012, 43(6): 2338—2342.
- [8] 秦四清, 何怀锋. 狭窄煤柱冲击地压的突变理论分析[J]. 水文地质与工程地质, 1995, 18(5): 17—20.
QIN Si-qing, HE Huai-feng. Analysis of the destabilization for the narrow coal pillar burst by the catastrophe theory[J]. **Hydrogeology and Engineering Geology**, 1995, 18(5): 17—20.
- [9] 李江腾, 曹平. 非对称开采时矿柱失稳的尖点突变模型[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(8): 1003—1008.
LI Jiang-teng, CAO Ping. Cusp catastrophe model of instability of pillar in asymmetric mining[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2005, 26(8): 1003—1008.
- [10] 王金安, 李大钟, 马海涛. 采空区矿柱-顶板体系流变力学模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 577—582.
WANG Jin-an, LI Da-zhong, MA Hai-tao. Study of rheological mechanical model of pillar-roof system in mined-out area[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(3): 577—582.
- [11] 王金安, 尚新春, 刘红, 等. 采空区坚硬顶板破断机制与灾变塌陷研究[J]. 煤炭学报, 2008, 33(8): 850—855.
WANG Jin-an, SHANG Xin-chun, LIU Hong, et al. Study of fracture mechanism and catastrophic collapse of strong roof strata above the mined-out area[J]. **Journal of China Coal Society**, 2008, 33(8): 850—855.
- [12] 徐芝伦. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
XU Zhi-lun. Theory of plasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 1992.
- [13] VYAZMENSKY A, STEAD D, ELMO D. Numerical analysis of block caving-induced instability in large open pit slopes: A finite element/discrete element approach[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2009, 43(1): 21—39.
- [14] 范广勤. 岩石工程流变力学[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1993.
FAN Guang-qin. Geotechnical engineering and rheological mechanics[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1993.
- [15] 南培珠, 宋永杰, 王金安. 基于流变分析的软岩回采巷道全程变形规律研究[J]. 中国矿业, 2009, 18(4): 62—65.
NAN Pei-zhu, SONG Yong-jie, WANG Jin-an. Study on the deformation law in the complete service stage of roadway in soft rock based on rheological analysis[J]. **China Mining Magazine**, 2009, 18(4): 62—65.
- [16] 丁秀丽. 岩土流变特性的试验研究及模型参数辨识[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2005.
DING Xiu-li. Experimental study on rock mass rheological properties and identification for the constitutive model and parameters[D]. Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2005.
- [17] 张宁, 赵阳升, 万志军, 等. 高温三维应力下花岗岩三维蠕变的模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(5): 875—881.
ZHANG Ning, ZHAO Yang-sheng, WAN Zhi-jun, et al. Model study of three-dimensional granite creep properties under high temperature[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(5): 875—881.
- [18] 陶波, 伍法权, 郭改梅, 等. 西原模型对岩石流变特性的适应性及其参数确定[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(17): 3165—3171.
TAO Bo, WU Fa-quan, GUO Gai-mei, et al. Flexibility of visco-elastoplastic model to rheological characteristics of rock and solution of rheological parameter[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(17): 3165—3171.
- [19] 张玉, 徐卫亚, 王伟, 等. 破碎带软岩流变力学试验与参数辨识研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(增刊 2): 3412—3420.
ZHANG Yu, XU Wei-ya, WANG Wei, et al. Study of rheological tests and its parameters identification of soft rock in fractured belt[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(Supp.2): 3412—3420.
- [20] 曹瑞琅, 贺少辉, 韦京, 等. 基于残余强度修正的岩石损伤软化统计本构模型研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(6): 1652—1667.
CAO Rui-lang, HE Shao-hui, WEI Jing, et al. Study of modified statistical damage softening constitutive model for rock considering residual strength[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(6): 1652—1667.
- [21] KRAJCINOVIC D. Statistical aspects of the continuous damage theory[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1982, 18(7): 551—562.
- [22] YANG K, WANG T X, MA Z T. Application of cusp catastrophe theory to reliability analysis of slopes in open-pit mines[J]. **Mining Science and Technology**, 2010, 20(1): 71—75.