

从各向异性的角度解释和模拟土的非共轴特性

田 雨, 姚仰平, 罗 汀

(北京航空航天大学 交通科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 从发挥面的角度出发, 分析论证各向异性是引起岩土材料出现非共轴现象的根本原因, 得到与材料力学一致的结论。当共轭的两发挥面与沉积面的夹角不相等时, 主应力面上将出现塑性应变增量的切向分量, 所以塑性应变增量的主方向与应力的主方向非共轴。按照这一结论, 对非共轴的数值模拟, 也应当根据各向异性本构模型进行。为考虑各向异性影响新近提出的各向异性变换应力法, 改变了各应力分量的相对大小, 得到的各向异性变换应力张量与真实应力张量的主方向不一致, 因此也能反映非共轴。利用各向异性变换应力法, 能够在现有的弹塑性本构模型的框架下, 描述土的非共轴现象。以各向异性 UH 模型为例, 预测各种加载条件下的非共轴变形, 验证了该方法的有效性。

关 键 词: 土; 非共轴; 各向异性; 变换应力; 本构模型

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000—7598 (2018) 06—2035—08

Explanation and modeling of non-coaxiality of soils from anisotropy

TIAN Yu, YAO Yang-ping, LUO Ting

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: From the point of view of the mobilized plane, material anisotropy has been proved to be the fundamental reason to cause the non-coaxiality of soils, which is consistent with a conclusion in the material mechanics. When angles between the two conjugate mobilized planes and the bedding plane are not equal, shear components of the plastic strain increment will occur in the principal stress plane. As a result, the direction of principal plastic strain increment will not be coaxial with the direction of principal stress. Based on this conclusion, numerical modeling of non-coaxiality should also be carried out according to an anisotropic constitutive model. The newly proposed anisotropic transformed stress method considering the effect of anisotropy is also capable of reflecting the non-coaxiality, because it changes the relative magnitudes of stress components and obtains an anisotropic transformed stress tensor with different principal directions from the ordinary stress tensor. Using this method, non-coaxial behaviors of soils can be described under the framework of the existing elastoplastic constitutive models. As an example, the anisotropic UH model is adopted to predict the non-coaxial deformation under different loading conditions to verify this method.

Keywords: soils; non-coaxiality; anisotropy; transformed stress; constitutive model

1 引 言

土体中任意一点的应力状态可用 6 个独立的应力分量表示, 应变状态可用 6 个独立的应变分量表示, 本构模型就是要建立这 6 个应力分量与 6 个应变分量之间的关系。为降低建模难度, 经典的弹塑性本构理论通常先确定 3 个主应力和 3 个主应变的关系, 再利用共轴假定, 即假设塑性应变增量的主

方向与应力全量的主方向一致, 扩展至一般状态。

但是, 许多试验已经证实, 对于岩土材料, 共轴假定在某些情况下并不适用。Roscoe^[1]从砂土的单剪试验结果中发现, 剪胀之前应力主轴与应变增量主轴的方向差别很大, 后期才逐渐趋于一致。Saada^[2]在对倾斜沉积的土样进行三轴压缩试验时, 观察到试样发生扭曲, Saada 分析这是因为试样端部有产生切应变的趋势, 但该趋势受到了加荷板的

收稿日期: 2016-08-25

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目 (973 计划) (No.2014CB047001); 国家自然科学基金项目 (No.11672015, No.51579005)。

This work was supported by the National Program on Key Basic Research Project of China (973 Program) (2014CB047001) and the National Natural Science Foundation of China (11672015, 51579005).

第一作者简介: 田雨, 男, 1992 年生, 博士研究生, 主要从事各向异性土的强度理论和本构模型方面的研究。E-mail: tianyu@buaa.edu.cn

通讯作者: 姚仰平, 男, 1960 年生, 博士, 教授, 主要从事土的基本特性及其本构关系方面的研究。E-mail: ypyao@buaa.edu.cn

限制。为了克服常规三轴试验的缺陷,能够控制主应力方向的空心圆柱扭剪仪被用于研究土的非共轴特性。Symes^[3]、Tong^[4]、蔡燕燕^[5]、Yang^[6]等的定轴剪切试验表明:当大主应力与沉积方向的夹角等于 0° 或 90° 时,加载过程中塑性应变增量的主方向始终与主应力方向共轴;当夹角介于 0° 至 90° 之间时,出现非共轴,且非共轴程度随着加载逐渐减弱。应力主轴旋转条件下非共轴现象更为显著:Gutierrez 等^[7]测得丰浦砂的非共轴角甚至超过 30° ; Miura 等^[8]研究了应力比和应力主轴旋转起始方向对非共轴程度的影响;严佳佳等^[9]研究了剪应力、中主应力等因素对杭州软黏土非共轴特性的影响;杨彦豪等^[10]发现,原状和重塑黏土非共轴角的波动规律基本一致,仅波幅不同。需要强调的是,非共轴特指塑性应变增量的主方向与应力全量的主方向不一致,而不是总应变增量的主方向与应力全量的主方向不一致。

国内外学者提出了一些描述土体非共轴特性的本构模型。Rudnicki 等^[11]采用带角点的屈服面描述剪切带上的应变局部化现象,推导出的塑性应变增量中多了与应力增量有关的项,而与应力全量非共轴。受此启发, Papamichos^[12]、Yang^[13]等建立了非共轴本构模型,将塑性应变增量分解成共轴部分和非共轴部分,共轴部分仍根据经典的弹塑性本构模型计算,引入额外的机制计算非共轴部分。Huang^[14]、钱建国^[15]等将非共轴模型推广到三维应力状态。此外, Jiang 等^[16]通过引入一个描述颗粒旋转的参量,建立微观颗粒运动与宏观变形的联系,得到能够描述非共轴的运动模型。Qian 等^[17]从微观力学角度分析,考虑了背应力对组构演化的贡献,建立的移动硬化模型对非共轴和局部损伤现象有很好的描述。

各向异性通常被认为是引起非共轴的根本原因^[3-6, 8-10, 16-18]。本文从发挥面的角度出发,解释岩土材料的非共轴机制。然后为进一步从各向异性的角度建立本构模型模拟非共轴,引入新提出的各向异性变换应力法(ATS 法)^[19],该方法原本是为了考虑各向异性的影响而提出的,本文将论证其也能反映非共轴。最后以统一硬化(UH)模型^[20]为例,采用 ATS 法将其发展成各向异性模型,用于预测各种加载条件下的非共轴现象。

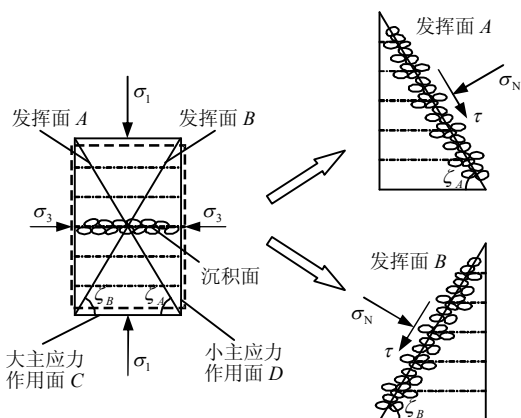
2 岩土非共轴的机制解释

材料力学^[21]一般认为,各向同性金属的主应变始终与主应力共轴;而对于各向异性金属,若主应力与材料主轴方向一致,也是共轴的,但若主应力

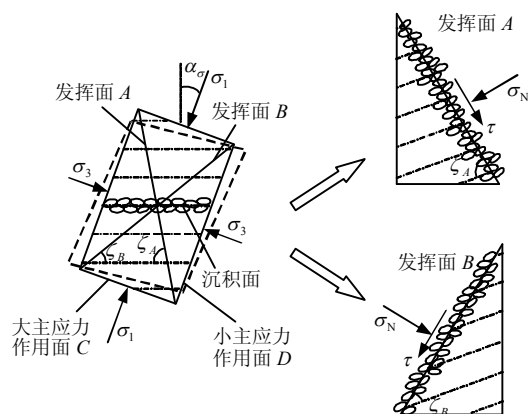
与材料主轴方向不同,将出现非共轴。计算各向异性金属的变形时,通常先将应力分解到材料主轴上,求出材料主轴上的各应变分量,进而确定应变的主方向,判断是否与应力的主方向共轴。然而,岩土是一种摩擦材料,影响其变形和破坏的主导因素是剪正应力比,解释岩土的非共轴机制,也应当从这一角度入手。

2.1 发挥面上的塑性应变增量

Matsuoka^[22]认为,发挥面(即剪正应力比 τ/σ_N 最大的平面)上剪正应力比和应变增量比 $d\epsilon_N/d\gamma$ 的关系最能代表岩土的本构规律。但通常单元内的发挥面不止一个,对于各向异性土,应当综合考虑所有发挥面的影响。如图 1 所示,在大主应力 σ_1 和小主应力 σ_3 所在的平面内,存在共轭的两个发挥面 A 和 B。根据力的平衡条件,可以得出两发挥面上应力的关系,且该相等关系与材料的力学特性无关。而两发挥面上的应变,与材料各向异性有关。下面分情况进行讨论。



(a) 大主应力与沉积方向相同



(b) 大主应力与沉积方向不同

图 1 发挥面上土颗粒的排列

Fig.1 Arrangement of soil particles in the mobilized planes

2.1.1 情况 1, 土样为各向同性

此时,发挥面 A、B 上土颗粒的排列完全相同,

具有相同的抵抗压缩和剪切的能力, 因此, 应变相等, 即 $|\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p| = |\mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p|$ 和 $|\mathbf{d}\gamma_A^p| = |\mathbf{d}\gamma_B^p|$ 。其中, $\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p$ 和 $\mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p$ 分别为发挥面 A 、 B 上的塑性正应变增量, $\mathbf{d}\gamma_A^p$ 和 $\mathbf{d}\gamma_B^p$ 分别为发挥面 A 、 B 上的塑性切应变增量。

2.1.2 情况 2, 土样为各向异性, σ_1 垂直于沉积面

如图 1(a)所示, 由于两发挥面的对称性, 发挥面 A 与沉积面的夹角 ζ_A 等于发挥面 B 与沉积面的夹角 ζ_B , 两平面上土颗粒的排列方式仍然相同, 抵抗压缩和剪切的能力也相同, 仍有 $|\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p| = |\mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p|$ 和 $|\mathbf{d}\gamma_A^p| = |\mathbf{d}\gamma_B^p|$ 。

2.1.3 情况 3, 土样为各向异性, σ_1 的方向与沉积方向存在偏角 α_σ

如图 1(b)所示, 此时, $\zeta_A > \zeta_B$ 。由于土颗粒的定向排列, 在发挥面 A 上, 颗粒之间相互交错咬合, 剪切将引起颗粒的翻滚甚至破碎, 需要消耗较多的能量, 因此, 沿平行于发挥面 A 的方向具有较强的抵抗剪切的能力; 而在发挥面 B 上, 颗粒长轴较接近平行于该平面, 在剪应力的作用下颗粒容易发生相对滑动, 因此, $|\mathbf{d}\gamma_A^p| < |\mathbf{d}\gamma_B^p|$ 。而对于两发挥面上的正应变增量, 由于在沉积过程中, 土体在垂直于沉积面的方向上已经充分被压缩, 形成了稳定的结构以抵抗压应力, 因此, 在相同的压应力的作用下, 较为接近沉积面的发挥面 B 上正应变增量较小, 即 $|\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p| > |\mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p|$ 。

2.2 主应力面上的塑性切应变增量

根据发挥面 A 、 B 上的塑性应变增量绘出摩尔圆, 如图 2 所示。由于发挥面的对称性, 主应力面在摩尔圆上对应的点, 必然位于 $\angle AOB$ 的角平分线或其反向延长线上, 据此求出大、小主应力面上的塑性切应变增量

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{d}\gamma_C^p \\ \mathbf{d}\gamma_D^p \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{(\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p - \mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{d}\gamma_A^p + \mathbf{d}\gamma_B^p)^2} \quad (1)$$

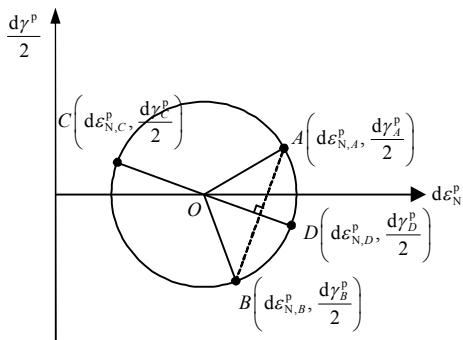


图 2 塑性应变增量摩尔圆

Fig.2 Mohr's circle of the plastic strain increments

需要说明的是, 式 (1) 是根据几何关系推出的, 与材料各向异性无关。从该式可以看出, 当且仅当 $\mathbf{d}\varepsilon_{N,A}^p = \mathbf{d}\varepsilon_{N,B}^p$ 且 $\mathbf{d}\gamma_A^p = -\mathbf{d}\gamma_B^p$ 时, 才有 $\mathbf{d}\gamma_C^p = \mathbf{d}\gamma_D^p = 0$ 。根据第 2.1 节的讨论, 对于情况 1、2, 这两个等式成立 (规定切应变以使隔离体顺时针旋转为正, 所以发挥面 A 、 B 上切应变的符号相反); 而对于情况 3, $\mathbf{d}\gamma_C^p \neq 0$, $\mathbf{d}\gamma_D^p \neq 0$, 主应力面上出现了塑性应变增量的切应变分量, 表明该面不是塑性应变增量的主值所对应的平面, 应力的主方向并非塑性应变增量的主方向, 即存在非共轴。

以上利用发挥面, 证明了各向异性是引起岩土材料非共轴的根本原因。虽然分析的角度与材料力学中针对金属材料采用的角度不同, 但得出的结论一致。既然各向异性引起了非共轴, 所以应当利用各向异性本构模型对非共轴现象进行预测和模拟。

3 各向异性变换应力法简介

各向异性变换应力法 (ATS 法)^[19]通过调整各方向应力分量的相对大小, 将各向异性土等效成各向同性土, 以考虑各向异性的影响。

3.1 组构张量

以土颗粒的微观排列为描述对象的组构张量^[23], 是反映岩土各向异性的有效工具。对于横观各向同性土, 若其对称轴沿竖直方向 (即物理空间 (z, x, y) 的 z 轴), 其组构张量定义如下:

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\Delta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中: Δ 为描述各向异性程度的参数。 $\Delta = 1/3$ 表示颗粒均匀分布, 土样为各向同性; Δ 越小表示长轴指向 z 轴方向的颗粒越少, 各向异性程度越大。对于横观各向同性土, 一般 $\Delta < 1/3$ 。

3.2 修正应力张量

将组构张量与真实应力张量结合^[19, 24], 得到修正应力张量为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{3}{2}(\sigma_{ik} \mathbf{F}_{kj} + \mathbf{F}_{ik} \sigma_{kj}) \quad (3)$$

式中: $\bar{\sigma}_{ij}$ 为二阶对称张量, 具有应力的量纲。当土样为各向同性 ($\mathbf{F}_{ij} = \delta_{ij}/3$) 时, $\bar{\sigma}_{ij}$ 退化成 σ_{ij} 。

式 (3) 的物理意义是, 利用 \mathbf{F}_{ij} 对各方向应力分量的相对大小进行修正, 使得 $\bar{\sigma}_{ij}$ 作用下的各向异性土可以等效为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 作用下的各向同性土。在参考文

献[19]中, 通过与多种试验数据对比, 验证了该式在描述土的各向异性上的准确性。

3.3 各向异性变换应力张量

为了考虑中主应力的影响, 仿照变换应力公式^[25-26], 由 $\bar{\sigma}_{ij}$ 推出各向异性变换应力张量为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \bar{p}\delta_{ij} + \frac{\bar{q}_c}{\bar{q}}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij}), & (\bar{q} \neq 0) \\ \bar{\sigma}_{ij}, & (\bar{q} = 0) \end{cases} \quad (4)$$

式中: \bar{p} 和 \bar{q} 分别为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的平均正应力和广义剪应力; \bar{q}_c 为通过当前应力点的屈服面在三轴压缩处的偏应力, 根据 Lade 准则推出

$$\bar{q}_c = \bar{I}_1 \left\{ 1 + \frac{\bar{J}}{2} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos \bar{J} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

$$\bar{J} = -\sqrt{\frac{27\bar{I}_3}{\bar{I}_1^3}} \quad (6)$$

$$\tan 2\alpha_{\tilde{\sigma}} = \frac{d\gamma_{zy}^p}{d\epsilon_z^p - d\epsilon_y^p} = \frac{2\Lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}}{\Lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}_z} - \Lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}_y}} = \frac{2 \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{p}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_{zy}} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{\sigma}_{zy}} \right)}{\frac{\partial g}{\partial \tilde{p}} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_z} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_y} \right) + \frac{\partial g}{\partial \tilde{q}} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{\sigma}_z} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{\sigma}_y} \right)} = \frac{2\tilde{\sigma}_{zy}}{\tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_y} = \tan 2\alpha_{\tilde{\sigma}} \quad (7)$$

式中: $\alpha_{\tilde{\sigma}}$ 为 $\tilde{\sigma}_1$ 与 z 轴的夹角。因此, $d\epsilon_1^p$ 与 $\tilde{\sigma}_1$ 共轴。

(2) $\tilde{\sigma}_{ij}$ 与 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的主方向共轴。根据式 (4), $\alpha_{\tilde{\sigma}}$ 又满足

$$\tan 2\alpha_{\tilde{\sigma}} = \frac{2\tilde{\sigma}_{zy}}{\tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_y} = \frac{2 \frac{\bar{q}_c}{\bar{q}} \bar{\sigma}_{zy}}{\bar{p} + \frac{\bar{q}_c}{\bar{q}}(\bar{\sigma}_z - \bar{p}) - \bar{p} - \frac{\bar{q}_c}{\bar{q}}(\bar{\sigma}_y - \bar{p})} = \frac{2\bar{\sigma}_{zy}}{\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_y} = \tan 2\alpha_{\bar{\sigma}} \quad (8)$$

式中: $\alpha_{\bar{\sigma}}$ 为 $\bar{\sigma}_1$ 与 z 轴的夹角。因此, $\tilde{\sigma}_1$ 与 $\bar{\sigma}_1$ 共轴。

综合 (1) 和 (2) 两种情况, $d\epsilon_{ij}^p$ 与 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的主方向共轴。这符合土样在修正应力空间被视为各向同性的假定。若 $\bar{\sigma}_{ij}$ 与 σ_{ij} 的主方向不一致, 则 $d\epsilon_{ij}^p$ 与 σ_{ij} 的主方向也将非共轴。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}[(1+\Delta) - (1-3\Delta)\cos 2\alpha_{\sigma}] \sigma_1 & 0 & \frac{3}{8}(1-3\Delta)(\sigma_1 + \sigma_3)\sin 2\alpha_{\sigma} \\ 0 & \frac{3}{2}(1-\Delta)\sigma_2 & 0 \\ \frac{3}{8}(1-3\Delta)(\sigma_1 + \sigma_3)\sin 2\alpha_{\sigma} & 0 & \frac{3}{4}[(1+\Delta) + (1-3\Delta)\cos 2\alpha_{\sigma}] \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

从式 (9) 可以看出, 经过应力修正后, σ_1 作

式中: \bar{I}_1 和 \bar{I}_3 分别为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的第一、三不变量。

各向异性变换应力张量 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 综合考虑了各向异性和中主应力的影响, 用 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 直接替换本构模型中的应力张量 σ_{ij} , 就能将模型扩展为各向异性。

4 ATS 法对非共轴的描述

首先, 关于 $d\epsilon_{ij}^p$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的主方向, 有如下关系:

(1) $d\epsilon_{ij}^p$ 与 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的主方向共轴。ATS 法假设塑性流动方向沿变换应力空间中塑性势函数的梯度方向, 即 $d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \cdot \partial g / \partial \tilde{\sigma}_{ij}$ (其中 Λ 为塑性因子, 该假设的必要性和合理性见参考文献[19])。以二维应力状态为例, 设塑性势函数为 $g(\bar{p}, \bar{q}) = C$ (\bar{p} 和 \bar{q} 分别是 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的平均正应力和广义剪应力), 平面 $z-y$ 上 $d\epsilon_{ij}^p$ 的大主方向与 z 轴的夹角 α_{de^p} 满足

下面以图 3 所示的加载条件为例, 探讨 $\bar{\sigma}_{ij}$ 与 σ_{ij} 的主方向是否共轴: 土样水平沉积, 主应力 σ_2 始终沿 x 轴方向, σ_1 和 σ_3 能够在平面 $z-y$ 内旋转。设 σ_1 与 z 轴夹角为 α_{σ} 。

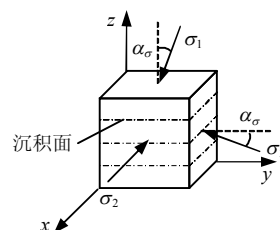


图 3 加载条件

Fig.3 Loading condition

由于物理空间 (z, x, y) 与主应力空间 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 不重合, 需将组构张量进行坐标变换, 然后才能代入式 (3), 得到主应力空间中的修正应力张量为

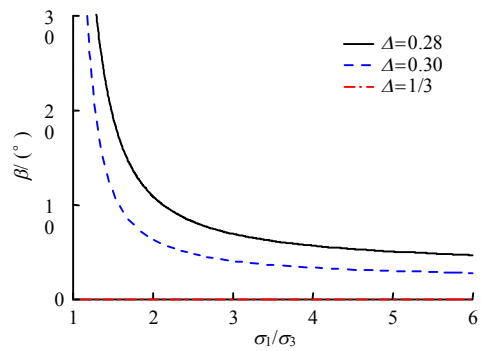
方向不一致, σ_1 与 $\bar{\sigma}_1$ 的夹角 β 满足

$$\tan 2\beta = \frac{(1-3\Delta)(\sigma_1 + \sigma_3) \sin 2\alpha_\sigma}{(1+\Delta)(\sigma_1 - \sigma_3) - (1-3\Delta)(\sigma_1 + \sigma_3) \cos 2\alpha_\sigma} \quad (10)$$

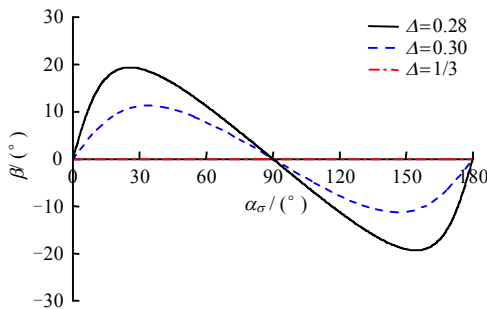
式中: β 也是 σ_1 与 $d\varepsilon_1^p$ 的夹角, 即非共轴角。 β 与各向异性程度 Δ 、应力比 σ_1/σ_3 和大主应力偏转角 α_σ 有关, 下面分析 3 个物理量的取值对 β 的影响。

图 4(a)中, 3 条曲线分别对应 Δ 取 0.28、0.30、1/3 时 β 与 σ_1/σ_3 的关系, α_σ 均为 30° 。该情况对应于定轴剪切试验。从图中可以看出: 各向同性土 ($\Delta=1/3$) 的 $\beta=0$, 即始终共轴; 各向异性土随着应力水平的升高, 非共轴程度逐渐减弱, 最终 β 趋于某一较小值, 且各向异性程度越大 (Δ 越小), 非共轴程度越大。需要指出的是, 虽然 Δ 不随加载演化, 即没有考虑应力诱导各向异性, 但计算出的各向异性土的非共轴程度仍将随加载演化。

图 4(b)中, 3 条曲线分别对应 Δ 取 0.28、0.30、1/3 时 β 与 α_σ 的关系, σ_1/σ_3 均为 1.5。这种情况对应于应力主轴旋转试验。从图中可以看出: 曲线呈正弦型, 当 $\alpha_\sigma=0^\circ$ (σ_1 竖直) 或 90° (σ_1 水平) 时, $\beta=0$, 这是由于此时两发挥面与沉积面的夹角相等; 当 $\alpha_\sigma < 90^\circ$ 时, $\beta > 0$, 而当 $\alpha_\sigma > 90^\circ$ 时, $\beta < 0$, 表明 $d\varepsilon_1^p$ 始终比 σ_1 更接近水平方向, 这是因为沿水平方向土样较软, 应变相对较大; 在 α_σ 等于 30° 或 150° 附近, 非共轴程度最大。



(a) β 与 σ_1/σ_3 关系曲线



(b) β 与 α_σ 关系曲线

图 4 非共轴角的演化

Fig.4 Evolution of the non-coaxial angle

上述预测结果与根据本文第 2 部分对非共轴的机制解释得出的结论完全一致, 与试验规律^[3-10]也相符。

5 模型及其验证

5.1 各向异性 UH 模型

以 UH 模型^[20]为框架, 采用 ATS 法将其扩展为各向异性。用 $\bar{\sigma}_{ij}$ 代替 σ_{ij} , 得到各向异性 UH 模型的屈服函数 f 、塑性势函数 g 和硬化参数 H 如下:

$$f = g = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} + \ln \left(1 + \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{M}^2} \right) - H = 0 \quad (11)$$

$$dH = \frac{1}{c_p} \frac{\bar{M}^4}{\bar{M}_f^4} \frac{\bar{M}_f^4 - \bar{\eta}^4}{\bar{M}^4 - \bar{\eta}^4} d\varepsilon_v^p \quad (12)$$

式中: \bar{p}_0 为初始屈服面与 \bar{p} 轴交点的横坐标; $\bar{\eta} = \bar{q}/\bar{p}$; $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$, 其中 λ 和 κ 分别为 $e - \ln p$ 空间中正常固结线和回弹线的斜率, e_0 为初始孔隙比; \bar{M} 和 \bar{M}_f 分别为大主应力沿沉积方向的三轴压缩试验中, 土样达到特征状态和峰值状态时, $\bar{\sigma}_{ij}$ 的应力比 \bar{q}/\bar{p} , \bar{M} 和 \bar{M}_f 与真实应力的 M 和 M_f 存在以下关系:

$$\bar{M} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(3\Delta + 1)M + (9\Delta - 3)}{(3\Delta - 1)M + 3} \quad (13)$$

$$\bar{M}_f = \frac{3}{2} \cdot \frac{(3\Delta + 1)M_f + (9\Delta - 3)}{(3\Delta - 1)M_f + 3} \quad (14)$$

式中: Δ 为组构值, 理论上应当通过统计试样中颗粒的排列方向而确定。若无微观统计资料, 也可以根据不同方向上试样的峰值强度确定。考虑到在修正应力空间各向异性土等效成各向同性土, 根据 Lade 准则, 有

$$\frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} \bigg|_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}} = \frac{\bar{I}_1^3}{\bar{I}_3} \bigg|_{\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(2)}} \quad (15)$$

式中: $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 分别为沿不同的两方向加载时试样的峰值应力。解方程 (15), 即可求出 Δ 。

5.2 模型预测

将理论预测结果分别与定轴剪切、单剪和应力主轴旋转试验数据对比, 全面验证 ATS 法在描述非共轴上的合理性。模型参数的取值见表 1。

表 1 模型参数

Table 1 Model parameters

土样	M	M_f	λ	κ	ν	Δ
Ham River 砂	1.50	1.65	0.008 9	0.005	0.30	0.266
Leighton Buzzard 砂	1.35	1.65	0.026 0	0.008	0.38	0.291
铝棒	0.90	0.94	0.009 4	0.007	0.15	0.300

5.2.1 定轴剪切试验

Symes^[27]采用水平沉积 Ham River 砂开展了一系列定轴剪切试验, 各组试验中大主应力方向角 α_σ 分别为 0° 、 22.5° 、 45° 、 67.5° 和 90° 。在图 5 中将实测值与理论值进行了对比, 图 5(a)为八面体剪应变 $\varepsilon_{\text{oct}} = (2/3)\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}$ 与 σ_1/σ_3 的关系, 图 5(b)为体应变 ε_v 与 σ_1/σ_3 的关系, 图 5(c)为总应变增量方向角 $\alpha_{d\varepsilon}$ 与 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 的关系。

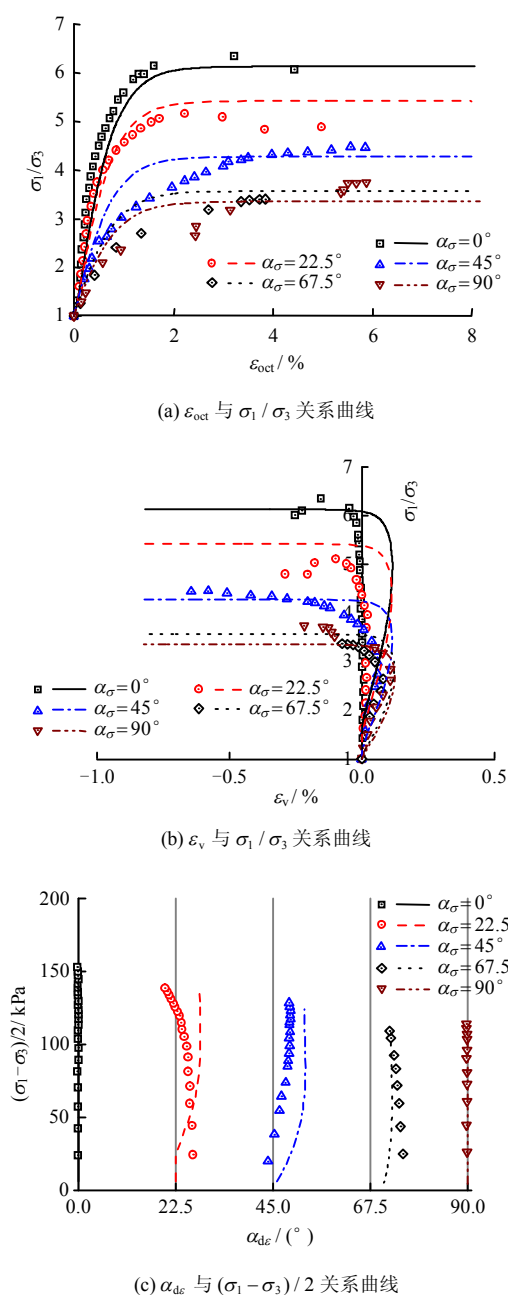


图 5 Ham River 砂定轴剪切试验数据与模型预测

Fig.5 Experimental data and model prediction of Ham River sand in torsion shear tests with fixed principal stress directions

从图 5 中可以看出, 各向异性 UH 模型能够较为准确地预测试样的应力-应变关系。在描述非共轴上, 预测结果也能够抓住试验规律: $\alpha_\sigma = 0^\circ$ 或 90° 时, 应力、应变共轴; α_σ 介于 0° 至 90° 之间时, 出现非共轴, 加载初期 $\alpha_{d\varepsilon}$ 稍大于 α_σ , 随着加载的进行, 非共轴程度逐渐增大, $\alpha_{d\varepsilon}$ 与 α_σ 的差距扩大。 $\alpha_\sigma = 22.5^\circ$ 的试验在达到临界状态时, 有趋于共轴的倾向, 这是由各向异性的演化造成的, ATS 法尚不能反映这一趋势, 因而预测存在偏差。

5.2.2 单剪试验

Cole^[28]测量了 Leighton Buzzard 中密砂在单剪过程中的全应力状态和应变。试验过程中, 保持压应力 σ_z 恒为 100 kPa, 沿 y 轴方向进行剪切, 主应力方向连续变化, 引发非共轴现象。模型的预测结果见图 6。参数的取值与 Gutierrez 等^[29]的推荐值相同。从图中看出, 该模型在准确预测剪应力 τ_{zy} -切应变 γ_{zy} 的关系和体应变 ε_v 的同时, 也能较为准确地描述加载过程中 α_σ 、 $\alpha_{d\varepsilon}$ 和 $\alpha_{d\sigma}$ (应力增量的大主方向与 z 轴的夹角) 的变化规律。

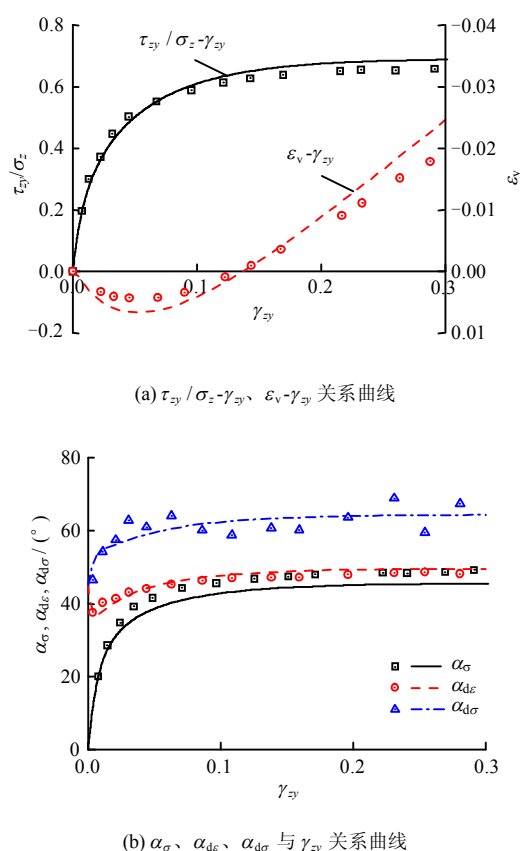


图 6 Leighton Buzzard 砂单剪试验数据与模型预测

Fig.6 Experimental data and model predictions of Leighton Buzzard sand in simple shear test

5.2.3 应力主轴旋转试验

Matsuoka 等^[30]对铝棒堆积体进行了纯应力主轴旋转试验。试验中, $\sigma_1 = 50 \text{ kPa}$, $\sigma_3 = 30 \text{ kPa}$, α_σ 从 0° 增加到 90° 再减小至 0° 。假设铝棒处于平面应变状态, 预测结果如图 7 所示。在加载过程中, 虽然 σ_{ij} 的主值不变, 但 $\bar{\sigma}_{ij}$ 的主值却在不断改变, 从修正应力的角度来看, 相当于对土样进行加载卸载, 因而模型可以计算出塑性变形。从结果来看, 除了对切应变 γ_{zy} 的预测有一定偏差以外, 模型对正应变和体应变的预测较为接近实测值。

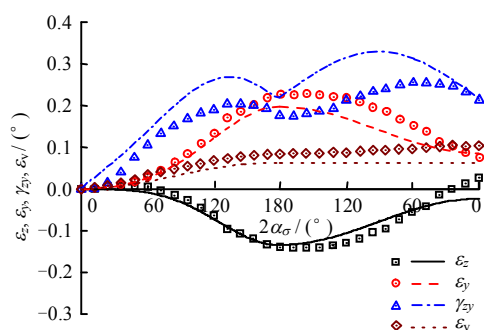


图7 铝棒应力主轴旋转试验数据与模型预测
Fig.7 Experimental data and model predictions of aluminum rods under principal stress rotation

6 结 论

本文从各向异性的角度, 解释岩土材料的非共轴机制, 并根据各向异性变换应力法, 建立各向异性本构模型, 预测非共轴现象, 使得对于非共轴问题的描述回归其本质, 得到以下结论:

(1) 当共轭两发挥面与沉积面的夹角不相等时, 主应力面上将出现塑性切应变增量, 因此, 塑性应变增量的主方向与应力的主方向非共轴, 从而证明了各向异性是引起岩土材料非共轴的根本原因, 与材料力学中有关金属材料的结论完全一致。

(2) ATS 法采用的应力变换, 改变了各方向应力分量的相对大小, 得到的各向异性变换应力张量与真实应力张量的主方向不一致, 隐含了非共轴。ATS 法能够在现有的弹塑性本构模型框架下, 发展各向异性模型, 用于描述非共轴现象, 而不必引入额外的计算机制。

(3) 根据 ATS 法发展的各向异性 UH 模型, 能够较为合理地预测和模拟各种加载条件下的非共轴现象, 验证了 ATS 法的有效性。

参 考 文 献

- [1] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 1970, 20(2): 129—170.
- [2] SAADA A S. Testing of anisotropic clay soils[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1970, 96(5): 1847—1852.
- [3] SYMES M, GENS A, HIGHT D W. Undrained anisotropy and principal stress rotation in saturated sand[J]. *Geotechnique*, 1984, 34(1): 11—27.
- [4] TONG Z X, YU Y L, ZHANG J M, et al. Deformation behavior of sands subjected to cyclic rotation of principal stress axes[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(8): 1196—1202.
- [5] 蔡燕燕, 俞缙, 余海岁, 等. 加载路径对粗粒土非共轴性影响的试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2012, 34(6): 1117—1122.
CAI Yan-yan, YU Jin, YU Hai-sui, et al. Experimental study on effect of loading path on non-coaxiality of granular materials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(6): 1117—1122.
- [6] YANG L T, LI X, YU H S, et al. A laboratory study of anisotropic geomaterials incorporating recent micromechanical understanding[J]. *Acta Geotechnica*, 2016, 11(5): 1111—1129.
- [7] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. *Soils and Foundations*, 1991, 31(4): 121—132.
- [8] MIURA K, MIURA S, TOKI S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation[J]. *Soils and Foundations*, 1986, 26(1): 36—52.
- [9] 严佳佳, 周建, 管林波, 等. 杭州原状软黏土非共轴特性与其影响因素试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2013, 35(1): 96—102.
YAN Jia-jia, ZHOU Jian, GUAN Lin-bo, et al. Experimental study on non-coaxiality and influence factors of intact Hangzhou soft clay[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 35(1): 96—102.
- [10] 杨彦豪, 周建, 温晓贵, 等. 杭州软黏土非共轴特性的试验研究[J]. *岩土力学*, 2014, 35(10): 2861—2867.
YANG Yan-hao, ZHOU Jian, WEN Xiao-gui, et al. Experimental study of non-coaxiality of Hangzhou soft

- clay[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(10): 2861—2867.
- [11] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1975, 23(6): 371—394.
- [12] PAPAMICHOS E, VARDOULAKIS I. Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model[J]. **Geotechnique**, 1995, 45(4): 649—661.
- [13] YANG Y M, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulations[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2006, 30(13): 1369—1390.
- [14] HUANG M S, LU X L, QIAN J G. Non-coaxial elasto-plasticity model and bifurcation prediction of shear banding in sands[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34(9): 906—919.
- [15] 钱建固, 黄茂松, 杨峻. 真三维应力状态下土体应变局部化的非共轴理论[J]. **岩土工程学报**, 2006, 28(4): 510—515.
- QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song, YANG Jun. Effect of non-coaxial plasticity on onset strain localization in soils under 3D stress condition[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(4): 510—515.
- [16] JIANG M J, HARRIS D, YU H S. Kinematic models for non-coaxial granular materials. Part I: Theory[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2005, 29(7): 643—661.
- [17] QIAN J G, YOU Z P, HUANG M S, et al. A micromechanics-based model for estimating localized failure with effects of fabric anisotropy[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 50(3): 90—100.
- [18] LI X S, DAFALIAS Y F. A constitutive framework for anisotropic sand including non-proportional loading[J]. **Geotechnique**, 2004, 54(1): 41—55.
- [19] YAO Y, TIAN Y, GAO Z. Anisotropic UH model for soils based on a simple transformed stress method[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2017, 41(1): 54—78.
- [20] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. **Computers and Geotechnics**, 2008, 35(2): 210—222.
- [21] 范钦珊. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- FAN Qin-shan. **Mechanics of materials**[M]. Beijing: Higher Education Press, 2000.
- [22] MATSUOKA H. Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane[J]. **Soils and Foundations**, 1974, 14(2): 47—61.
- [23] ODA M. Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material[J]. **Soils and Foundations**, 1972, 12(1): 17—36.
- [24] TOBITA Y. Modified double slip model with fabric anisotropy for hardening behavior of granular materials[C]//Advances in Micromechanics of Granular Materials: Proceedings of the Second US/Japan Seminar on Micromechanics of Granular Materials. Potsdam: Elsevier, 2013: 203—212.
- [25] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's criterion to Cam-clay model[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2000, 126(1): 112—119.
- [26] YAO Y P, WANG N D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2014, 140(3): 614—629.
- [27] SYMES M J. Rotation of principal stresses in sand[D]. London: University of London, 1983.
- [28] COLE E R L. The behaviour of soils in the simple-shear apparatus[D]. Cambridge: University of Cambridge, 1969.
- [29] GUTIERREZ M, WANG J, YOSHIMINE M. Modeling of the simple shear deformation of sand: Effects of principal stress rotation[J]. **Acta Geotechnica**, 2009, 4(3): 193—201.
- [30] MATSUOKA H, SUZUKI Y, MURATA T. A constitutive model for soils evaluating principal stress rotation and its application to some deformation problems[J]. **Soils and Foundations**, 1990, 30(1): 142—154.