

# 寒区隧道围岩最大冻结深度计算的半解析方法

夏才初<sup>1,2</sup>, 吕志涛<sup>1,2</sup>, 黄继辉<sup>3</sup>, 李 强<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;  
3. 福建省建筑科学研究院, 福建 福州 350025)

**摘 要:** 寒区隧道围岩的最大冻结深度是隧道抗冻胀结构设计、防排水与保温隔热层设计的重要基础参数。基于准稳态假定, 采用积分法推导了能够考虑衬砌、保温层及冻结围岩中未冻水含量的寒区隧道围岩最大冻结深度的解析计算公式; 利用围岩温度场数值模拟结果反演得出了解析计算公式中的参数影响半径与冻结半径比  $\Omega$  的取值, 从而得到了围岩最大冻结深度的半解析解。将所得解的计算结果与现场实测数据及数值模拟结果进行了对比, 验证了所得解的合理性。利用得到的半解析解分析了工程冻土段围岩冻结深度的影响因素, 结果表明: 初始地温、年平均气温对冻结深度的影响最为明显, 岩体骨架导热系数、岩体孔隙率的影响次之。

**关 键 词:** 寒区隧道; 冻结深度; 半解析方法; 影响因素

中图分类号: U 45

文献识别码: A

文章编号: 1000-7598(2018)06-2145-10

## Semi-analytical method of maximum frozen depth calculation in cold region tunnel

XIA Cai-chu<sup>1,2</sup>, LÜ Zhi-tao<sup>1,2</sup>, HUANG Ji-hui<sup>3</sup>, LI Qiang<sup>1,2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;  
2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;  
3. Fujian Academy of Building Research, Fuzhou, Fujian 350025, China)

**Abstract:** The maximum frozen depth of surrounding rock is an important basic parameter in cold region tunnel design, such as frozen-preventing lining design, waterproof and drainage design, insulating layer design. To predict frozen depth of surrounding rock, various researches have been conducted, including field monitoring, numerical simulation, and derivation of practical estimation equations. In this study, a semi-analytical method is proposed to obtain the maximum frozen depth. First, the temperature acting on the lining surface is equivalent to a constant temperature according to the principle of equal annual accumulated temperature. Then, based on the quasi-steady state assumption, an analytical formula of the maximum frozen depth which considers the existing of lining, thermal insulation layer and the unfrozen water content in frozen rock is derived, using integration method. Next, the back analysis method is used to obtain the parameter  $\Omega$  which refers to the ratio of influence radius and frozen radius in the analytical formula, combined with the numerical simulation results of the temperature field. Finally, the semi-analytical solution of the maximum frozen depth is obtained. Through comparisons of the field monitoring data and the results of numerical simulation, the rationality of the proposed method is proved. Furthermore, the influence factors of the frozen depth are analyzed using the proposed semi-analytical solution, and the results show that the initial temperature and the annual average temperature have the most significant influence, and the rock conductivity coefficient and the porosity are less influential.

**Keywords:** cold region tunnel; frozen depth; semi-analytical method; influence factors

## 1 引 言

寒区隧道贯通后, 外界冷空气进入, 使隧道内

围岩发生冻结, 这种由于工程建设造成的冻土, 称为工程冻土。工程冻土同样可分为季节工程冻土与多年工程冻土。当隧道内年平均气温  $T_M > 0^\circ\text{C}$  且最

收稿日期: 2016-09-13

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.41472248); 国家科技支撑计划项目 (No.2014BAG05B00)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41472248) and the National Science and Technology Support Program Projects of China (2014BAG05B00).

第一作者简介: 夏才初, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事隧道与地下建筑工程、岩石力学等方面的教学与研究工作。E-mail: tjxiacbb@126.com

冷月平均气温小于  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  时, 围岩发生季节冻融, 形成季节工程冻土; 当  $T_M < 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  时, 围岩的冻结范围逐年扩大, 形成多年工程冻土。

工程冻土段隧道围岩的最大冻结深度不仅是影响冻胀力值的主要因素, 而且决定了防排水设计中排水设施的设置深度。因此, 其为隧道抗冻胀结构设计、防排水与保温隔热层设计的重要基础参数。目前, 围岩冻结深度计算主要利用数值模拟方法, 并采用等效热容法简化考虑相变潜热的温度场控制方程。Zhang 等<sup>[1]</sup>利用 Galerkin 法导出考虑相变温度场控制方程的有限元计算公式, 求解了不同施工季节、初始地温、保温层导热系数工况下寒区隧道围岩温度场; Lai 等<sup>[2]</sup>同样利用 Galerkin 法推导了考虑隧道内空气与围岩热对流耦合作用的温度场控制方程三维有限元公式, 分析了青藏铁路风火山隧道围岩的冻结、融化状态, 计算结果与现场监测数据相近。Tan 等<sup>[3]</sup>将围岩划分为已冻区、正冻区、未冻区, 分别给出各区的温度场控制方程并利用数值模拟求解, 并将此方法用于保温层厚度的计算。赖远明等<sup>[4]</sup>导出了带相变的温度场、渗流场和应力场耦合问题的数学模型及其控制方程, 并利用有限元法求解了 THM 耦合作用下的温度场。

数值模拟方法虽然能够通过温度场的计算间接获得围岩的最大冻结深度, 但其过程复杂, 计算耗时, 很难满足寒区隧道设计的要求。因此, 部分学者致力于给出简化解析解, 以应用于工程设计。

张耀等<sup>[5]</sup>在设计寒区隧道隔热层时, 采用 Stefan 公式计算冻结深度, 但 Stefan 公式考虑的是无限大平面的一维冻结问题, 而寒区隧道的冻结围岩呈圆筒形, 是二维冻结问题。Lai 等<sup>[6]</sup>对圆形隧道的热传导方程进行简化, 应用无量纲量和摄动技术对简化方程进行求解, 给出了圆形隧道温度场的近似解析解, 但该方法仅能在围岩初始地温小于  $1.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  的范围内保证解的精度。Lunardini<sup>[7]</sup>总结了冻融传热问题的解析计算方法, 其中, 柱坐标下圆筒状冻结过程可采用准稳态法 (quasi-steady)<sup>[8]</sup>、热平衡积分法<sup>[9]</sup>进行求解, 或通过坐标变换, 将其等效为无限空间固体一维冻结问题进行求解<sup>[10]</sup>, 但这些解析解的模型相对于寒区隧道工程设计的要求而言, 过于简化, 无法直接使用。

因此, 本文基于准稳态假定, 采用积分法得出能够考虑衬砌及保温层的寒区隧道围岩最大冻结深度的半解析计算方法, 进而分析工程冻土段围岩冻结影响因素及影响规律, 可为寒区隧道抗冻结构设计、防排水与保温隔热设计计算提供参考。

## 2 工程冻土段围岩最大冻结深度的半解析计算方法

对于季节工程冻土, 洞内年平均气温  $T_M > 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 围岩发生季节冻融, 设计时应按气温波动周期 (1 a) 的时间跨度考虑围岩最大冻结深度; 对于多年工程冻土,  $T_M < 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 围岩的冻结范围逐年扩大, 设计时应按隧道设计使用年限 (100 a) 的时间跨度考虑围岩最大冻结深度。

### 2.1 基本假定及适用条件

隧道围岩冻结过程的相关传热问题属于强非线性问题, 为获得半解析解, 需对模型进行必要的假设和简化:

(1) 隧道围岩视为等效连续多孔介质, 围岩及衬砌视为均匀、各向同性导热介质。

(2) 隧道等效为圆形。寒区隧道一般为曲墙式衬砌, 可近似等效为圆形隧道考虑。

(3) 隧道温度场监测成果表明<sup>[11]</sup>, 隧道衬砌表面温度以 1 a 为单位周期性变化, 可用正弦函数表示。此处, 将衬砌表面作用温度等效为恒定温度  $T_p$ ,  $T_p$  按气象学中积温相等的思路计算<sup>[7]</sup>, 具体确定方法如下:

对于多年工程冻土 ( $T_M < 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), 年气温变化如图 1(a) 所示。由  $\int_0^{\Delta t} T dt = T_p \Delta t$  可得, 等效温度  $T_p = T_M$ , 计算时间  $\Delta t$  为隧道设计使用年限 100 a。

对于季节工程冻土 ( $T_M > 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), 年气温变化如图 1(b) 所示。由  $\int_{t_1}^{t_2} T dt = T_p \Delta t$  可得

$$T_p = T_M - \frac{2T_A \sqrt{1 - \left(\frac{T_M}{T_A}\right)^2}}{\pi - 2 \arcsin\left(\frac{T_M}{T_A}\right)} \quad (1)$$

$$\Delta t = \frac{365}{2} + \frac{365}{\pi} \arcsin\left(-\frac{T_M}{T_A}\right) \quad (2)$$

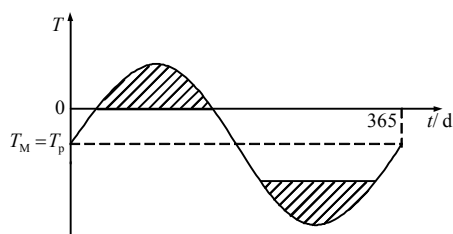
(4) 衬砌表面温度等效为恒定温度  $T_p$  时, 衬砌表面热流密度近似恒定, 衬砌-围岩系统可视为处于准稳态<sup>[8]</sup>, 则衬砌-围岩系统温度场满足  $\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = 0$ 。

(5) 当衬砌表面铺设保温层时, 将衬砌与保温层结构等效为一层复合材料, 根据混合介质理论, 其等效导热系数和等效比热容为

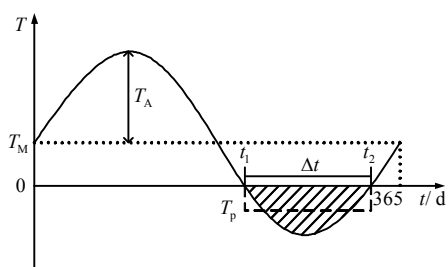
$$k_a = \frac{H + h}{H/k_L + h/k_G} \quad (3)$$

$$C_a = \frac{C_L H + C_G h}{H + h} \quad (4)$$

式中:  $H$ 、 $h$  分别为衬砌和保温层的厚度;  $k_L$ 、 $k_G$ 、 $k_a$  分别为衬砌、保温层及等效导热系数;  $C_L$ 、 $C_G$ 、 $C_a$  分别为衬砌、保温层及等效体积比热容。



(a) 多年工程冻土



(b) 季节工程冻土

图1 衬砌表面温度的等效计算

Fig.1 Equivalent calculation of lining surface temperature

基于上述假定, 本文半解析方法的适用条件如下:

(1) 隧道处于单一地层或围岩热力学物理性质参数相似的地层。

(2) 针对多年工程冻土, 只能计算冻结圈外侧逐年增加的外径, 不计算每年暖季冻结圈内侧产生的浅层融化圈。

(3) 有、无保温层的工况均可计算。

## 2.2 围岩温度分布

在以上假设和简化条件基础上, 建立寒区隧道围岩冻结深度计算模型, 如图2所示, 其中  $r_0$ 、 $r_1$  为衬砌内、外半径,  $R_f$  为冻结半径,  $R_f - r_1$  即为冻结深度,  $R_\delta$  为隧道内温度对围岩温度产生影响范围的半径, 称之为影响半径, 围岩初始温度为  $T_0$ , 衬砌内壁受到恒定负温  $T_p$  的作用。

据假定(2), 衬砌、围岩中温度分布的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) = 0 \quad (5)$$

式中:  $T_i(r, t)$  为温度分布函数;  $r$  为半径;  $t$  为冻结温度  $T_p$  的作用时间;  $i$  为 a、b、c 分别表示衬砌、冻结围岩、未冻结围岩, 如图2所示。

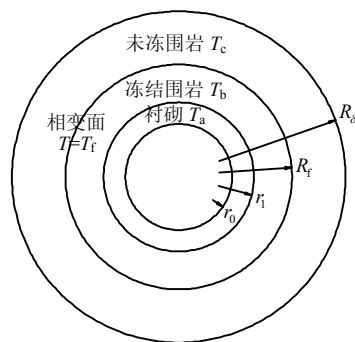


图2 寒区隧道围岩冻结深度计算模型

Fig.2 Computational model of frozen depth in cold region tunnel

则模型的边界条件和初始条件如下:

模型内边界:

$$T_a(r_0, t) = T_p \quad (6)$$

衬砌、围岩交界处:

$$T_a(r_1, t) = T_b(r_1, t) = T_1 \quad (7)$$

冻结锋面处:

$$T_b(R_f, t) = T_c(R_f, t) = T_f \quad (8)$$

模型外边界处:

$$T_c(R_\delta, t) = T_0 \quad (9)$$

围岩初始温度:

$$T_b(r, 0) = T_c(r, 0) = T_0 \quad (10)$$

衬砌初始温度:

$$T_a(r, 0) = T_0 \quad (11)$$

求解式(5), 并将式(6)~(11)代入可得各区域温度分布如下:

衬砌:

$$T_a = \frac{(T_1 - T_p)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + T_p \quad (12)$$

冻结围岩:

$$T_b = \frac{(T_f - T_1)}{\ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \quad (13)$$

未冻结围岩:

$$T_c = \frac{(T_f - T_0)}{\ln\left(\frac{R_f}{R_\delta}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_\delta}\right) + T_0 \quad (14)$$

根据热传导理论, 衬砌和围岩交界面温度满足关系:

$$k_a \frac{\partial T_a(r_1, t)}{\partial r} = k_b \frac{\partial T_b(r_1, t)}{\partial r} \quad (15)$$

将式 (12)、(13) 代入式 (15) 得

$$T_1 = \frac{k_b \ln(r_1/r_0)T_f + k_a \ln(R_f/r_1)T_p}{k_b \ln(r_1/r_0) + k_a \ln(R_f/r_1)} \quad (16)$$

式 (12)~(14) 描述了衬砌-围岩系统冻结过程中的温度场的分布规律, 其中冻结半径  $R_f$  和影响半径  $R_\delta$  随时间  $t$  变化, 下文将用能量守恒方程对  $R_f$  进行求解。

### 2.3 冻结过程中围岩的未冻水含量及相变潜热

Khakimov<sup>[8]</sup>的解析解假定岩土体冻结后, 其中的水立即完全发生冻结。然而, 实际上, 冻结温度以下的岩土体中仍有一定量的液态水存在。未冻水含量直接影响冻结过程中岩土体所吸收的相变潜热, 进而影响冻结范围。

Kozlowski<sup>[12]</sup>给出岩土体中未冻水含量的半经验公式:

$$w(T) = \begin{cases} w_0 & T \geq T_f \\ w_f + (w_0 - w_f) \exp\left[a\left(\frac{T_f - T}{T_f - T_m}\right)^b\right] & T_m < T < T_f \\ w_f & T \leq T_m \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $w(T)$  为不同温度下围岩未冻水含量;  $w_0$ 、 $w_f$  分别为未冻区含水率、冻结区残余未冻水含率, 其中  $w_f = \chi w_0$ , 对于岩石  $\chi$  取 7%<sup>[13]</sup>;  $T_m$  为未冻水含量开始不再随温度变化时的温度, 对于岩石取  $T_m = -15^\circ\text{C}$ <sup>[14]</sup>;  $a$ 、 $b$  为曲线特征参数。

采用式 (17) 对 Girard 等<sup>[14]</sup>在阿尔卑斯山少女峰现场实测的石灰岩岩体未冻水含量数据进行拟合, 得到曲线特征参数取值:  $a = -1.3426$ ,  $b = 0.6458$ , 如图 3 所示。Kozlowski<sup>[12]</sup>指出, 随岩性变化, 曲线特征参数  $a$ 、 $b$  变化较小, 因此, 以下计算中参数  $a$ 、 $b$  取值不变。

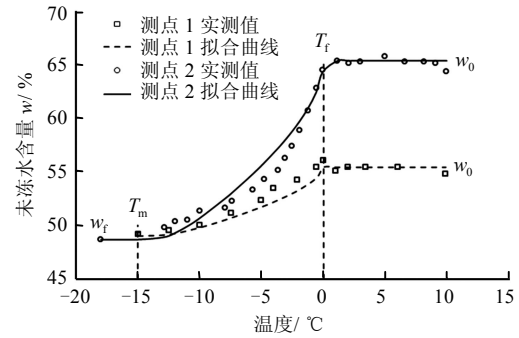


图 3 岩体未冻水含量与温度关系

Fig.3 Variation of unfrozen water content with temperature

图 2 模型中围岩冻结过程中水相变为冰释放的相变潜热总量  $L_b$  为

$$L_b = 2\pi\rho_d L_f \int_{r_1}^{R_f} r \Delta w dr \quad (18)$$

式中:  $\Delta w = w_0 - w(T)$ ;  $\rho_d$  为围岩的干密度;  $L_f$  为水结冰的相变潜热, 为 334 kJ/kg。

将未冻水含量曲线简化为直线, 如图 4 所示, 冻结围岩的温度范围在  $T_p \sim T_0$  之间, 则:

$$\Delta w = (w_0 - w_p) \left[ 1 - \left( \frac{T_b(r) - T_p}{T_f - T_p} \right) \right] \quad (19)$$

其中:

$$w_p = \begin{cases} w_f + (w_0 - w_f) \exp\left[a\left(\frac{T_f - T_p}{T_f - T_m}\right)^b\right] & T_m < T_p < T_f \\ w_f & T_p \leq T_m \end{cases} \quad (20)$$

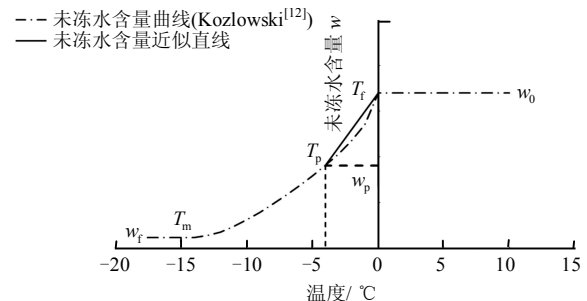


图 4 未冻水含量曲线近似为直线

Fig.4 Approximate line of unfrozen water content curve

将式 (13)、(19) 代入式 (18) 可得, 水相变为冰释放的相变潜热总量为

$$L_b = - \frac{k_a L_f \pi (w_0 - w_p) \rho_d [r_1^2 - R_f^2 + 2r_1^2 \ln(R_f/r_1)]}{2[k_b \ln(r_1/r_0) + k_a \ln(R_f/r_1)]} \quad (21)$$

## 2.4 衬砌-围岩系统的能量守恒方程及其求解

对于衬砌-围岩系统, 微时步  $dt$  中, 系统流失的能量等于衬砌表面所流失的能量, 即

$$2\pi r_0 k_a \left[ \frac{dT_a}{dr} \right]_{r=r_0} = \frac{dQ_m}{dt} \quad (22)$$

冻结过程中衬砌-围岩系统流失的能量  $Q_m$  为  $r = r_0 \rightarrow R_\delta$  范围内衬砌、围岩温度降低流失的显热与冻结围岩中冰水相变潜热  $L_b$  之和, 即

$$Q_m = 2\pi C_a \int_{r_0}^{r_1} r(T_f - T_a) dr + \pi(r_1^2 - r_0^2) C_a (T_0 - T_f) + 2\pi C_b \int_{r_1}^{R_f} r(T_f - T_b) dr + \pi(R_f^2 - r_1^2) C_b (T_0 - T_f) + 2\pi C_c \int_{R_f}^{R_\delta} r(T_0 - T_c) dr + L_b \quad (23)$$

式中:  $C_a$ 、 $C_b$ 、 $C_c$  分别为等效衬砌、冻结围岩、未冻围岩的体积比热容。

工程中, 视冻结区和未冻区围岩热物理参数相同, 因此, 冻结半径  $R_f$ 、影响半径  $R_\delta$  随时间的变化具有同步性, 则可以认为影响半径与冻结半径比  $\Omega = R_\delta / R_f$  不随时间发生变化。将  $\Omega = R_\delta / R_f$  及式 (12) ~ (14) 代入式 (23) 可得 (后文将用反演方法确定  $\Omega$  的合理取值):

$$Q_m = \pi(r_1^2 - R_f^2)(C_a + C_b)(T_0 - T_f) - \frac{C_a \pi (T_f - T_p) \left\{ 2k_b r_0^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + (r_0^2 - r_1^2) \left[ k_b + 2k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right] \right\}}{2 \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]} - \frac{C_b k_a \pi (T_f - T_p) \left[ r_1^2 - R_f^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]}{2 \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]} - \frac{C_c \pi R_f^2 (T_0 - T_f) \left[ -1 + \Omega^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) \right]}{2 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)} + L_b \quad (24)$$

式 (24) 中仅冻结半径  $R_f$  是关于时间  $t$  的函数, 因此:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_m}{dt} = \frac{dQ_m}{dR_f} \frac{dR_f}{dt} = & \left\{ 2\pi R_f (C_b - C_a)(T_0 - T_f) - \frac{C_b k_a \pi \left( \frac{2r_1^2}{R_f} - 2R_f \right) (T_f - T_p)}{2 \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]} - \frac{C_a k_a \pi (r_0^2 - r_1^2) (T_f - T_p)}{R_f \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]} \right. \\ & + \frac{k_a L_f \pi \left( \frac{2r_1^2}{R_f} - 2R_f \right) (w_0 - w_p) \rho_d}{2 \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]} + \frac{C_b k_a^2 \pi (T_f - T_p) \left[ r_1^2 - R_f^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]}{2 R_f \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]^2} \\ & + \frac{k_a^2 L_f \pi (w_0 - w_p) \rho_d \left[ r_1^2 - R_f^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]}{2 R_f \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]^2} + \frac{C_b k_a \pi (T_f - T_p) \left[ 2k_b r_0^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + (r_0^2 - r_1^2) \left( k_b + 2k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right) \right]}{2 R_f \left[ k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) \right]^2} \\ & \left. - \frac{C_c \pi R_f (T_0 - T_f) \left[ -1 + \Omega^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) \right]}{\ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)} \right\} \frac{dR_f}{dt} \quad (25) \end{aligned}$$

将式 (12) 代入式 (22), 并展开:

$$2\pi r_0 k_a \left[ \frac{dT_a}{dr} \right]_{r=r_0} = - \frac{2k_a k_b \pi (T_f - T_p)}{k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right)} \quad (26)$$

将式 (25)、(26) 代入式 (22), 采用分离变量法进行求解, 可得不同时刻的冻结半径  $R_f$  关于时间  $t$  的隐式解析解:

$$2k_a k_b \pi \Delta T_p \Delta t + C = \frac{1}{4 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)} \pi \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2k_b}{k_a}} \left\{ -2k_a r_1^2 (C_b \Delta T_p + L_a) \text{Ei}\left(\frac{2}{k_a} A_1\right) \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2k_b}{k_a}} \left[ C_c k_a R_f^2 \Delta T_f (-1 + \Omega^2) + 2(-k_a R_f^2 \Delta T_f \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right) (C_c (-1 + \Omega^2) + 2(C_a - C_b + C_c) \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)) + \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) (-k_a R_f^2 (C_b (\Delta T_f - \Delta T_p) - (C_c + C_a) \Delta T_f - L_a) + (C_a k_b (r_0^2 - r_1^2) \Delta T_p + k_a r_1^2 (C_b \Delta T_p + L_a)) \lg A_1) - 2k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) (C_c R_f^2 \Delta T_f (-1 + \Omega^2) + 2 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) ((C_a - C_b + C_c) R_f^2 \Delta T_f + r_1^2 ((C_b - C_a) \Delta T_p + L_a) \ln A_1)) \right] \right\} \quad (27)$$

式中:  $L_a = L_f (w_0 - w_p) \rho_d$ ;  $A_1 = k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + k_a \ln\left(\frac{R_f}{r_1}\right)$ ;  $\Delta T_p = T_f - T_p$ ;  $\Delta T_f = T_0 - T_f$ ;  $\text{Ei}\left(\frac{2}{k_a} A_1\right)$  为指数积分函数, 可表示为  $\text{Ei}\left(\frac{2}{k_a} A_1\right) = -\int_{-\frac{2}{k_a} A_1}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ;  $C$  为微分方程解的常数项, 由初始条件  $R_f = r_1|_{t=0}$ , 可得

$$C = \frac{1}{4 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)} \pi \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2k_b}{k_a}} \left\{ -2k_a r_1^2 (C_b \Delta T_p + L_a) \cdot \text{Ei}\left[\frac{2}{k_a} k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)\right] \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2k_b}{k_a}} \left[ C_c k_a r_1^2 \Delta T_f \cdot (-1 + \Omega^2) + 2 \left( \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) (-k_a r_1^2 (C_b (\Delta T_f - \Delta T_p) - \right. \right. \right.$$

$$(C_c + C_a) \Delta T_f - L_a) + (C_a k_b (r_0^2 - r_1^2) \Delta T_p + k_a r_1^2 (C_b \Delta T_p + L_a)) \ln\left[k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)\right] - 2k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) (C_c r_1^2 \Delta T_f \cdot (-1 + \Omega^2) + 2 \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) ((C_a - C_b + C_c) r_1^2 \Delta T_f + r_1^2 ((C_b - C_a) \Delta T_p + L_a) \ln\left(k_b \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)\right))) \right] \right\} \quad (28)$$

在影响半径与冻结半径比  $\Omega$  取值已知的条件下, 采用数学软件如 Matlab 等对式 (27) 进行数值求解, 即可得到不同时刻围岩的冻结半径  $R_f$ 。

## 2.5 影响半径与冻结半径比 $\Omega$ 的确定

Khakimov<sup>[8]</sup>求解能量守恒方程时, 假定  $\Omega = R_g / R_f = 4.5$ , 该假定极大简化了方程的求解, 然而 Lunardini<sup>[7]</sup>指出: 影响半径与冻结半径比  $\Omega$  的值随  $\phi = (T_f - T_0) / (T_p - T_f)$  变化。

假定围岩导热系数、比热容对  $\Omega$  取值的影响可以忽略, 而  $T_f = 0$  为定值, 则  $\Omega$  仅随初始地温  $T_0$ 、洞内气温  $T_p$  变化, 因此, 可采用反演方法确定  $\Omega$  与  $\phi$  的函数关系。首先采用数值模拟方法计算得到不同初始地温  $T_0$ , 不同洞内气温  $T_p$  下的冻结半径数值解  $R_{f,n}$ , 然后利用数值解反演得到  $\Omega$  与  $\phi$  的函数关系, 反演流程如图 5 所示。

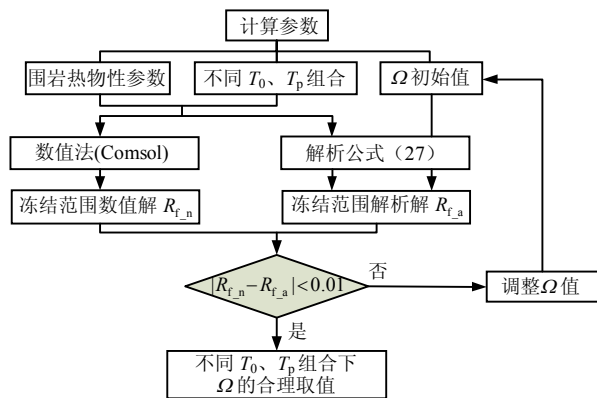


图 5  $\Omega$  取值的反演流程

Fig.5 Back analysis process of parameter  $\Omega$

### (1) 反演工况的数值模拟参数

参考国道 G214 线的位于寒区的姜路岭隧道, 取隧道内径为 6.4 m, 衬砌厚 0.5 m。热力学及物理性质参数如表 1 所示, 岩体的孔隙率  $\theta_v$  为 15%,  $\chi$  为 0.07, 当铺设保温层时, 等效衬砌的热物性参数根据式 (3)、(4) 确定。

现场测得姜路岭隧道多年冻土层以下深 100 m 处初始地温  $3.5^\circ\text{C}$ , 青藏高原冻土以下的地温梯度为  $28 \sim 51^\circ\text{C}/\text{km}$ <sup>[15]</sup>, 由此确定初试地温  $T_0$  的取值范

围见表 2。

表 1 计算模型热力学及物理性质参数

Table 1 Thermal and physical parameters of model

名称	导热系数 /(W/(m·°C))	质量比热容 /(J/(kg·°C))	密度 ρ/(kg/m³)
围岩骨架	3.87	670	2 600
衬砌	1.85	970	2 200
保温层	0.03	1 210	40

表 2 温度边界条件、初始条件计算工况组合

Table 2 Combination of boundary and initial temperature condition

名称	年均温度 $T_M/^\circ\text{C}$		年温度振幅 $T_A/^\circ\text{C}$		初始地温 $T_0/^\circ\text{C}$	
	标准值	浮动范围	标准值	浮动范围	标准值	浮动范围
多年工程冻土	-4.0	-2.0~ -10.0				
青 中季节工程冻土	4.0	-2.0~		10.0~		
藏 深季节工程冻土	0.0	6.0	11.5	13.0		
内 中季节工程冻土	7.0	-0.5~		16.0~	3.0	2.0~
蒙 深季节工程冻土	1.5	10.5	20.5	25.0		10.0

根据寒区隧道所处隧址的冻土类型，我国不同冻土区的年平均气温  $T_M$  和年温度振幅  $T_A$  如表 3<sup>[16]</sup> 所示。由此，确定洞内气温  $T_p$  的取值范围见表 2。

对于多年工程冻土  $T_p = T_M$ ， $\Delta t = 100$  a；对于季节工程冻土  $T_p$ 、冻结时间  $\Delta t$  分别根据式 (1)、(2) 由  $T_M$  和  $T_A$  计算得到。

表 3 我国不同冻土区年均气温及年温度振幅  
Table 3 Annual average temperature and temperature amplitude in different frozen soil area in China

冻土类型	青藏高原地区		内蒙古东北地区		备注
	$T_M/^\circ\text{C}$	$T_A/^\circ\text{C}$	$T_M/^\circ\text{C}$	$T_A/^\circ\text{C}$	
中季节冻土	6.0~2.0	10~13	10.5~3.5	16~25	轻冻害地区
深季节冻土	2.0~-2.0	10~13	3.5~-0.5	16~25	中冻害地区
深季节冻土 多年冻土	<-2.0	10~13	<-0.5	16~25	重冻害地区

计算工况的组合原则为：首先取  $T_M$  和  $T_A$  的标准值，计算  $T_0$  浮动范围内的最大冻结半径  $R_f$ ；然后取  $T_0$  的标准值不变，计算  $T_M$  和  $T_A$  在各自浮动范围内变化时最大冻结半径  $R_f$ 。

## (2) 反演结果分析

将反演得到的  $\Omega$  值与相应的  $\phi$  值绘于图 6，并拟合得到  $\Omega$  关于  $\phi$  的计算公式：

多年工程冻土（无保温层）：

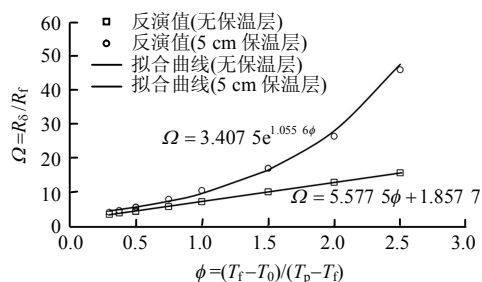
$$\Omega = 5.577 5\phi + 1.857 7 \quad (29)$$

多年工程冻土（5 cm 保温层）：

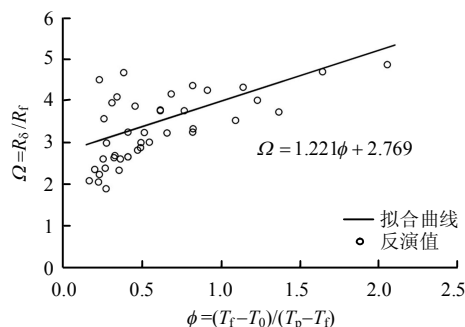
$$\Omega = 3.407 5e^{1.055 6\phi} \quad (30)$$

季节工程冻土：

$$\Omega = 1.221\phi + 2.769 \quad (31)$$



(a) 多年工程冻土(按 100 a 考虑)



(b) 季节工程冻土(按 1 a 考虑)

图 6  $\Omega$  反演值与  $\phi$  的关系

Fig.6 Relationship between  $\Omega$  and  $\phi$

由图 6 可见，多年工程冻土中  $\Omega$  与  $\phi$  的函数关系明确，拟合函数与反演值吻合很好，而季节工程冻土中  $\Omega$  与  $\phi$  的关系相对较散乱，这是由于季节工程冻土是在年波动气温作用下，增加了围岩相变问题的非线性。

## 3 半解析方法的算例验证

### 3.1 季节工程冻土（阿拉坦隧道）

阿拉坦隧道位于内蒙古东北部国道 304 线图布信至霍林郭勒段，属于季节冻土区隧道。程凡<sup>[17]</sup>对阿拉坦隧道围岩温度场进行了现场监测及理论分析。现场实测隧道围岩初始地温为 7 °C，围岩及衬砌热物性参数如表 4 所示；不同断面洞内气温及冻结深度实测值如表 5 所示。

表 4 计算模型热力学及物理性质参数

Table 4 Thermal and physical parameters of model

名称	导热系数 /(W/(m·°C))	比热容 /(J/(kg·°C))	密度 ρ/(kg/m³)	含水率 w <sub>0</sub> /%
围岩	3.3	2 240	1 920	15
衬砌	2.4	1 655	2 480	

利用阿拉坦隧道监测数据对本文半解析方法的有效性进行验证,并与 Khakimov 解<sup>[8]</sup>以及最常用的 Stefan 公式<sup>[7]</sup>进行对比。将隧道等效为内径 6.7 m、衬砌厚 0.45 m 的圆形隧道,分别采用本文方法(式(27))、Khakimov 解以及 Stefan 公式计算冻结深度,结果如表 5 所示。

表 5 阿拉坦隧道围岩冻结深度实测值与计算值对比  
Table 5 Comparison of monitor data and calculate results

断面 里程	年均 温度 /℃	年温度 振幅 /℃	冻结深度/m			
			实测值	本文方法	Khakimov 解	Stefan 解
RK6+645	0.70	26.40	1.50	1.72	2.22	4.57
RK6+665	2.83	22.05	1.50	1.57	1.90	4.50
RK6+690	2.70	21.31	1.50	1.57	1.88	4.42
RK6+740	2.46	19.81	0.85	1.55	1.83	4.26
RK7+340	0.70	26.40	1.65	1.72	2.22	4.57

由表 5 可见,本文半解析方法计算得到冻结深度与实测值最为接近,除断面 RK6+740 断面偏差较大,为 0.7 m,其他断面偏差均小于 0.1 m; Khakimov 解与实测值偏差在 0.40~0.98 m 之间,最常用的 Stefan 公式计算结果与实测值偏差最大,达 2.92~3.41 m。

### 3.2 多年工程冻土

多年工程冻土的计算时间达 100 a,没有实测数据可以对比,因此,采用数值模拟结果对本文半解析方法进行验证。考虑初始地温分别为 4℃和 6℃的围岩中,内径 6.4 m、衬砌厚 0.5 m 的圆形隧道,在洞内年均气温-4℃的作用下,无保温层和铺设 5 cm 保温层时的工况。采用本文方法、Khakimov 解分别计算 100 a 最大冻结深度并与相应工况的数值计算结果进行对比。模型热力学及物理性质参数同表 1,计算结果见表 6。

表 6 多年工程冻土最大冻结深度计算结果对比  
Table 6 Comparison of numerical and analytic results

初始 地温 /℃	冻结深度(无保温层)/m			冻结深度 (5 cm 保温层)/m	
	数值模拟	本文方法	Khakimov 解	数值模拟	本文方法
4	20.42	20.29	25.23	10.90	11.86
6	13.36	13.38	22.18	5.26	5.47

由表 6 可见,在无保温层工况下,本文方法的计算结果与数值模拟结果最为接近,偏差在 0.02~0.13 m,而 Khakimov 的计算结果与数值模拟结果的偏差在 4.81~8.82 m 之间。此外,本文方法还能计算铺设保温层的工况,计算结果与数值模拟结果的

偏差在 0.21~0.96 m 之间。本文半解析方法在有、无保温层两种工况的计算结果均能够满足实际工程的精度要求。

## 4 工程冻土段冻结深度的影响因素及其影响规律

利用本文半解析方法分别计算季节工程冻土、多年工程冻土中各影响因素变化条件下冻结深度的变化量,并绘制成图,以直观地分析各因素对冻结深度的影响,方便实际工程应用参考。

### 4.1 季节工程冻土

采用表 1 中热力学及物理性质参数及表 2 中青藏、内蒙地区深、中季节工程冻土的温度条件参数,由本文半解析方法(式(27))计算得到围岩初始地温  $T_0$ 、洞内年平均气温  $T_M$ 、年气温振幅  $T_A$ 、岩体骨架导热系数、岩体孔隙率等因素对季节工程冻土冻结深度的影响规律如图 7 所示。

由图 7 可见,冻结深度的范围为:青藏地区中季节冻土区 0.96~3.03 m,深季节冻土区 1.58~4.37 m;内蒙地区中季节冻土区 1.80~4.71 m,深季节冻土区 2.63~5.08 m。

初始地温越低、年平均气温越低、年气温振幅越大、岩体骨架导热系数越大、岩体孔隙率越小,则围岩冻结深度越大。初始地温、年平均气温对冻结深度的影响最为明显,岩体骨架导热系数、岩体孔隙率对冻结深度的影响较大,在各自参数的合理变化范围内,冻结深度的变化为 0.49~2.79 m。

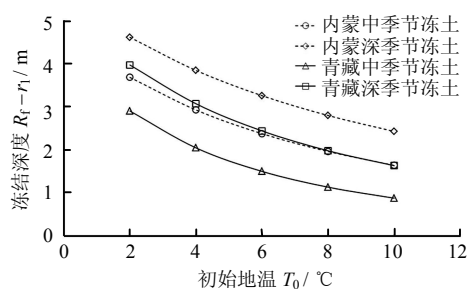
### 4.2 多年工程冻土

采用表 1 中热力学及物理性质参数及表 2 中多年工程冻土的温度条件参数,由本文半解析方法(式(27))计算得到初始地温、年平均气温、岩体骨架导热系数、岩体孔隙率等因素对多年工程冻土冻结深度的影响规律如图 8 所示。

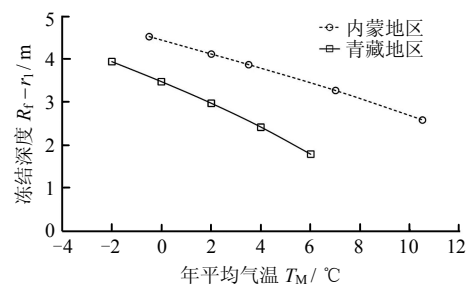
由图 8 可见,按隧道设计寿命 100 a 考虑,多年工程冻土的冻结深度在 7.4~53.1 m 之间,铺设保温层无法避免冻结圈的出现,但能够有效减小冻结深度,随温度条件和围岩条件不同,冻结深度能减小 4.07~14.87 m。

初始地温、年平均气温对冻结深度的影响最为明显,在各自参数的合理变化范围内,冻结深度的变化可达 29.22~39.77 m;岩体骨架导热系数,岩体孔隙率对冻结深度的影响相对较小,参数变化产生的影响可达 8.29~13.67 m。

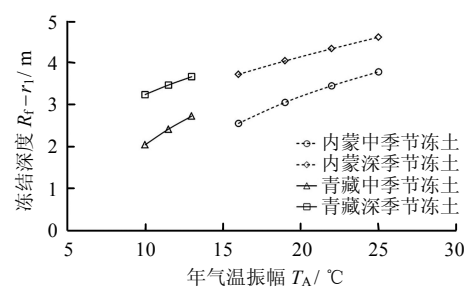




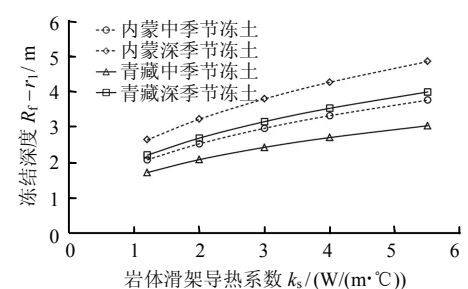
(a) 初始地温



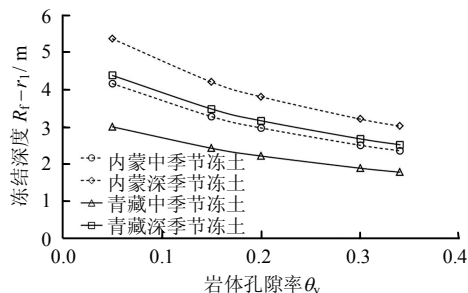
(b) 年平均气温



(c) 年气温振幅



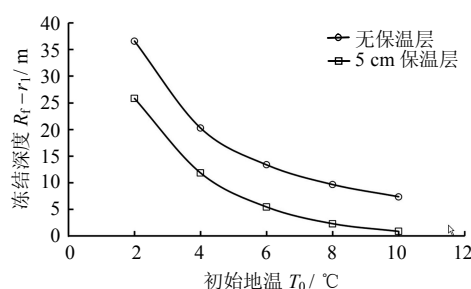
(d) 岩体骨架导热系数



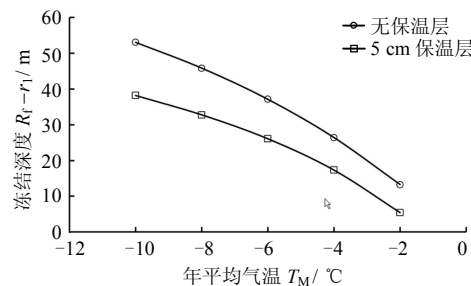
(e) 岩体孔隙率

图7 不同因素对冻结深度的影响(季节工程冻土段)

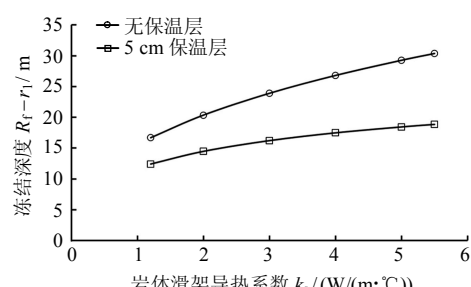
Fig.7 Influence of different factors on frozen depth (seasonally frozen soil induced by construction)



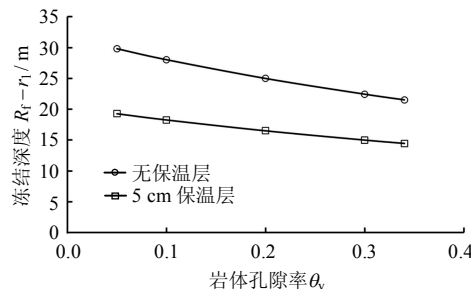
(a) 初始地温



(b) 年平均气温



(c) 岩体骨架导热系数



(d) 岩体孔隙率

图8 不同因素对冻结深度的影响(多年工程冻土段)

Fig.8 Influence of different factors on frozen depth (permafrost induced by construction)

## 5 结论

(1) 基于准稳态假定, 采用积分法得出寒区隧道围岩最大冻结深度的半解析计算方法。该方法考虑了冻结围岩中的未冻水含量, 并能够计算考虑衬砌和保温层时的工况。将该方法的计算结果与现场实测数据及数值模拟结果进行了对比, 验证了该方法的合理性。

(2) 利用该方法得到的半解析解分别分析了初始地温、年平均气温等因素对季节工程冻土、多年工程冻土围岩冻结深度的影响, 结果表明: 初始地温、年平均气温对冻结深度的影响最为明显, 岩体骨架导热系数、岩体孔隙率的影响次之。

### 参考文献

- [1] ZHANG X F, LAI Y M, YU W B, et al. Non-linear analysis for the freezing-thawing situation of the rock surrounding the tunnel in cold regions under the conditions of different construction seasons, initial temperatures and insulations[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2002, 17(3): 315—325.
- [2] LAI Y M, ZHANG X F, YU W B, et al. Three-dimensional nonlinear analysis for the coupled problem of the heat transfer of the surrounding rock and the heat convection between the air and the surrounding rock in cold-region tunnel[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2005, 20(4): 323—332.
- [3] TAN X J, CHEN W Z, WU G J, et al. Numerical simulations of heat transfer with ice-water phase change occurring in porous media and application to a cold-region tunnel[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2013, 38(9): 170—179.
- [4] 赖远明, 吴紫汪, 朱元林, 等. 寒区隧道温度场、渗流场和应力场耦合问题的非线性分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(5): 529—533.  
LAI Yuan-ming, WU Zi-wang, ZHU Yuan-lin, et al. Nonlinear analyses for the couple problem of temperature, seepage and stress fields in cold region tunnels[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1999, 21(5): 529—533.
- [5] 张耀, 赖远明, 张学富. 寒区隧道隔热层设计参数的实用计算方法[J]. 中国铁道科学, 2009, 30(2): 66—70.  
ZHANG Yao, LAI Yuan-ming, ZHANG Xue-fu. A practical method for calculating the design parameters of the heat insulation layer in cold region tunnel[J]. **China Railway Science**, 2009, 30(2): 66—70.
- [6] LAI Y M, LIU S Y, WU Z W, et al. Approximate analytical solution for temperature fields in cold regions circular tunnels[J]. **Cold Regions Science and Technology**, 2002, 34(1): 43—49.
- [7] LUNARDINI V J. Heat transfer with freezing and thawing[M]. Amsterdam: Elsevier, 1991.
- [8] KHAKIMOV K R. Artificial freezing of soils-theory and practice[M]. Translated from the Russian by BAROUCH A, HEIMANN E H. USA: Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- [9] LUNARDINI V J. Phase change around a circular pipe[R]. Hanover, New Hampshire: Cold Regions Research and Engineering Laboratory, 1980.
- [10] LIN S. One-dimensional freezing or melting process in a body with variable cross-sectional area[J]. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 1971, 14(1): 153—156.
- [11] 陈建勋, 罗彦斌. 寒冷地区隧道温度场的变化规律[J]. 交通运输工程学报, 2008, 8(2): 44—48.  
CHEN Jian-xun, LUO Yan-bin. Changing rules of temperature field for tunnel in cold area[J]. **Journal of Traffic and Transportation Engineering**, 2008, 8(2): 44—48.
- [12] KOZLOWSKI T. A semi-empirical model for phase composition of water in clay-water systems[J]. **Cold Regions Science and Technology**, 2007, 49(3): 226—236.
- [13] 谭贤君, 余祥宏, 陈卫忠, 等. 岩土介质在冻融过程中的温度场研究及工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(增刊 1): 2867—2874.  
TAN Xian-jun, YU Xiang-hong, CHEN Wei-zhong, et al. Study of temperature field in process of freezing-thawing in geotechnical medium and its application[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2012, 31(Supp.1): 2867—2874.
- [14] GIRARD L, GRUBER S, WEBER S, et al. Environmental controls of frost cracking revealed through in situ acoustic emission measurements in steep bedrock[J]. **Geophysical Research Letters**, 2013, 40(9): 1748—1753.
- [15] 张立新, 徐敦祖, 马巍. 青藏高原多年冻土与天然气水合物[J]. 天然气地球科学, 2001, 12(1—2): 22—26.  
ZHANG Li-xin, XU Xiao-zu, MA Wei. Permafrost and gas hydrates in the Qinghai-Tibet Plateau[J]. **Natural Gas Geoscience**, 2001, 12(1—2): 22—26.
- [16] 吴紫汪, 赖远明, 藏恩穆, 等. 寒区隧道工程[M]. 北京: 海洋出版社, 2003.  
WU Zi-wang, LAI Yuan-ming, ZANG En-mu, et al. Cold region tunnel engineering[M]. Beijing: China Ocean Press, 2003.
- [17] 程凡. 鲁霍一级公路阿拉坦隧道温度场特性研究[D]. 西安: 长安大学, 2009.  
CHENG Fan. Research on the temperature field of Alatan tunnel in Lu-Huo highway[D]. Xi'an: Chang'an University, 2009.