DOI：10.16285/j.rsm.2017.0009

基于最小势能法的三维临界滑裂面搜索方法

温树杰[1, 2]，梁 超[1]，宋亮亮[1]，刘 刚[1]

（1. 江西理工大学 建筑与测绘工程学院，江西 赣州；2. 江西理工大学 江西省环境岩土与工程灾害控制重点实验室，江西 赣州 341000）

摘 要：为了得到三维边坡的临界滑裂面，提出了 6 个参数控制的三维滑裂面构造方法，基于边坡三维最小势能稳定性分析方法建立目标函数，采用遗传算法实现了临界滑裂面的搜索，并开发了相应的搜索程序。为检验文中搜索方法的合理性，将其与其他方法得到的临界滑裂面以及最小安全系数进行比较，并且将室内模型试验得到的临界滑面与理论搜索的结果进行对比。研究表明：搜索方法可实现稳步收敛；针对算例进行多变量同时变化的搜索验算，得到了与极限平衡法较为接近的结果，表明提出的搜索方法是合理的；理论计算结果与室内模型试验坡面加载得到的边坡临界滑面较为接近，再次验证三维边坡临界滑面搜索方法是可行的。

关 键 词：三维边坡；临界滑裂面；安全系数；最小势能原理；遗传算法

中图分类号：TU 457 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 07－2708－07

Search strategy of three-dimensional critical slip surface based on minimum potential energy

WEN Shu-jie[1, 2], LIANG Chao[1], SONG Liang-liang[1], LIU Gang[1]

（1. School of Architecture and Surveying Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi 341000, China; 2. Jiangxi Provincial Key Laboratory of Environmental Geotechnical Engineering and Disaster Control, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi 341000, China）

Abstract: In order to obtain the critical slip surface of the three-dimensional slope, the construction method of six parameter-controlled three-dimensional slip surface is proposed, and the objective function based on the minimum potential energy stability analysis method is established. The genetic algorithm is used to search the critical slip surface, and the corresponding search process is developed. To validate the rationality of this method, results from this method are compared with the critical slip surface and the minimum safety factor obtained by other methods, and the critical slip surface obtained from the indoor model test is compared against the theoretical search results. The results show that the search method in this paper can achieve steady convergence. Simultaneous change of multivariate search is performed for the examples in this paper, and the results are close to the results from limit equilibrium method, which indicates that the proposed search method is reasonable. The theoretical calculation results are close to the critical slip surface of the slopes obtained from the model loading tests, which again proves that the critical slip surface searching method of the three-dimensional slope is feasible.

Keywords: three-dimensional slope; critical slip surface; safety factor; minimum potential energy principle; genetic algorithm

1 引 言

边坡的稳定性是通过边坡的最小安全系数进行判断的，所以寻找边坡的最小安全系数是边坡稳定分析工作的最关键的环节。在边坡的稳定性分析工作中大多数学者侧重于对于已知的滑裂面进行分析，并计算其安全系数，进而判断边坡的稳定性。而现实情况下，边坡滑裂面是未知的。因此，确定边坡的滑裂面位置至关重要。一般来说，实现边坡临界滑裂面的搜索需要 3 个工具：滑面方程的构建、实现搜索过程的算法以及边坡稳定性分析方法。目前，针对滑裂面形态的确定，多数学者将其假定为椭球面[1]、对数螺旋面[2]、楔形体[3]或者组合滑裂面等[4–5]。祝志恒等[6]通过控制点和控制平面的方式，以双二次 Bezier 曲面完成了高自由度的三维滑裂面的构建。毛谦等[1]将滑裂面视为椭球面，并通过 7

收稿日期：2017-01-02
基金项目：国家自然科学基金项目资助(No. 51304084)；江西省自然科学基金项目资助(No. 20151BAB206026)；江西理工大学青年英才支持计划项目。This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51304084), Jiangxi Provincial Natural Science Fund Project (20151BAB206026) and Jiangxi University of Science and Technology Young Talent Support Program.
第一作者简介：温树杰，男，1979 年生，博士，教授，硕士生导师，主要从事岩土体稳定与监测方面的教学与研究工作。E-mail: jttjwsj@163.com

个控制参数来模拟该滑裂面，最后引入遗传算法进行了临界滑裂面搜索研究。为实现临界滑裂面的搜索，学者们也发展了变分法[7−8]、模式搜索法[9−10]、随机搜索法[11]、遗传算法[12]、规划法[13]等方法。莫海鸿等[10]提出应用模式搜索法搜索边坡的临界滑裂面，邹广电等[11]将模拟退火−随机搜索耦合算法运用到分析边坡稳定性的问题之中。

多年来，虽然许多学者提出了不同的搜索技术和方法，但总体而言，滑裂面的构建和搜索在二维方面的研究和应用居多，其发展也趋于完善；三维方面还存在滑裂面构建过程复杂、控制参数多、搜索效率低等不足之处，缺少成熟的方法，需要进一步研究。

最小势能法[14]分析边坡稳定性最早由 Mauldon 和 Ureta 提出，因具有无需迭代运算，计算简洁等特点，故而在分析边坡的稳定性方面具有一定优势，温树杰[15]、孙加平[16]等建立了三维边坡最小势能稳定性分析方法，但还没有开展三维临界滑裂面搜索工作。为了完善三维最小势能法，本文在前人研究的基础上，提出了一种 6 个参数构建三维滑裂面的方法，基于三维最小势能法建立目标函数，最后通过遗传算法实现了临界滑裂面的搜索并开发了相应的程序，实现了输入相关参数后就可确定临界滑裂面和最小安全系数，便于研究人员使用和工程应用。相比其他方法，本文提出的方法具有构建滑裂面过程简洁、待优化参数少、搜索时无需划分条块、搜索效率高等优点。

2　三维滑裂面与目标函数的构建

2.1　三维滑裂面的构建

边坡的滑裂面实际上是任意形状的，但是目前针对三维任意形状滑裂面的搜索很难有效实现。通过对工程中已发生的滑坡形状进行分析总结，常把滑面近似为椭球面[17]，因此本文采用旋转椭球面来构建滑裂面。如图 1 所示，设滑入点为 $B(x_b,z_b)$，滑出点为 $A(x_a,z_a)$，椭圆弧 AB 与坡面线组成滑体的中性面[18]（滑体内沿滑动方向上断面尺寸最大的面，即二维平面滑动面），坡高为 h，旋转椭球的中心为 F，半长轴分别为 R_a 和 R_c，其中 R_a 与 x 轴的夹角为 θ，设中性面上椭圆方程式为

$$\frac{\left[x\cos\theta+z\sin\theta-x_0\right]^2}{R_a^2}+\frac{\left[z\cos\theta-x\sin\theta-z_0\right]^2}{R_c^2}=1 \tag{1}$$

将滑出点 A 和滑入点 B 依次代入式（1）得

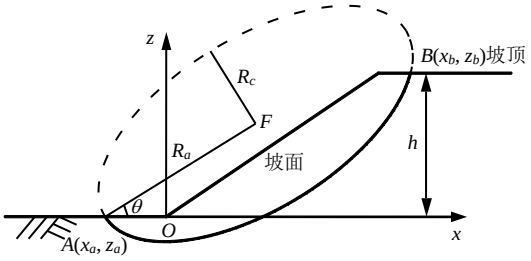


图 1　滑体的中性面

Fig.1　Neutral surface of the sliding body

$$\left.\begin{aligned}\frac{\left[x_a\cos\theta+z_a\sin\theta-x_0\right]^2}{R_a^2}+\frac{\left[z_a\cos\theta-x_a\sin\theta-z_0\right]^2}{R_c^2}=1\\ \frac{\left[x_b\cos\theta+z_b\sin\theta-x_0\right]^2}{R_a^2}+\frac{\left[z_b\cos\theta-x_b\sin\theta-z_0\right]^2}{R_c^2}=1\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

解方程组（2）得

$$\left.\begin{aligned}x_0=\frac{N}{2}-\frac{PR_a\sqrt{\dfrac{4R_a^2R_c^2}{R_a^2P^2+R_c^2Q^2}-1}}{2R_c}\\ z_0=\frac{M}{2}+\frac{QR_c\sqrt{\dfrac{4R_a^2R_c^2}{R_a^2P^2+R_c^2Q^2}-1}}{2R_a}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中：

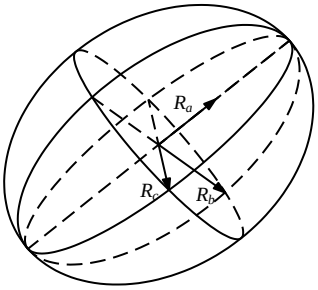
$$\left.\begin{aligned}N&=(x_a+x_b)\cos\theta+(z_a+z_b)\sin\theta\\ M&=(z_a+z_b)\cos\theta-(x_a+x_b)\sin\theta\\ P&=(z_b-z_a)\cos\theta+(x_a-x_b)\sin\theta\\ Q&=(x_b-x_a)\cos\theta+(z_b-z_a)\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

根据以上求解的 x_0、z_0，给定一个 θ 值，代入式（1）便可将二维椭圆滑面方程确定下来。众所周知，三维比二维多了一个空间维度，因此，现对此二维椭圆方程赋予一个 y 变量，且令在 y 轴方向上的半长轴为 R_b，便得到一个三维的椭球面如图 2(a)所示。三维椭球面方程见下式，三维滑裂面见图 2(b)。

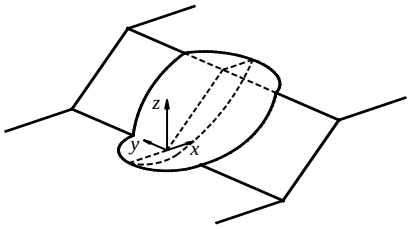
$$\frac{\left[x\cos\theta+z\sin\theta-x_0\right]^2}{R_a^2}+\frac{y^2}{R_b^2}+\frac{\left[z\cos\theta-x\sin\theta-z_0\right]^2}{R_c^2}=1 \tag{5}$$

从构建的三维椭球滑面方程中可以看出，(x_a,z_a)、(x_b,z_b)、R_a、R_b、R_c 以及 θ 是方程中含有的自变参量。若滑出点 A 在地面线上时，即 $x_a\leqslant 0$，$z_a=0$；若滑出点在坡面上时，即 $x_a>0$，$z_a=i\cdot x_a$（其中 i 为坡度）。由于 B 点位于坡顶，所以 $z_b=h$。因此，滑面方程中的自变参量只有 x_a、

x_b、R_a、R_b、R_c、θ。所以利用这 6 个参数即可实现三维椭球形滑裂面构建。



(a) 三维椭球



(b) 椭球形滑裂面

图 2 边坡和滑裂面

Fig.2 Slope and slip surface

2.2 滑体数据的生成

滑体是指滑裂面和边坡表面所围成的封闭空间体，所以在确定滑裂面之后，就要提取边坡表面的几何形状。确定边坡表面几何形状需要的参数有坡面的高程、边坡的坡率、坡脚的起始位置以及护坡道的长度和高度。以上数据确定后就完成了滑体生成工作。

2.3 目标函数的构建

生成滑体数据后，进而构建目标函数。而滑裂面和安全系数存在一一对应的函数关系，依据作者前期对最小势能法的研究，已得出了具体滑面和安全系数之间的对应函数关系，内容见参考文献[15]。经上述分析可知，潜在滑面由 x_a、x_b、R_a、R_b、R_c、θ 这 6 个参数控制，那么通过 6 个控制参数进而可以表示出计算最小安全系数的目标函数，其具体的实现过程如图 3 所示。因此，由 6 个参数控制的安全系数目标函数为

$$F_s = f\left(x_a, x_b, R_a, R_b, R_c, \theta\right) \tag{6}$$

式中：F_s 为安全系数。

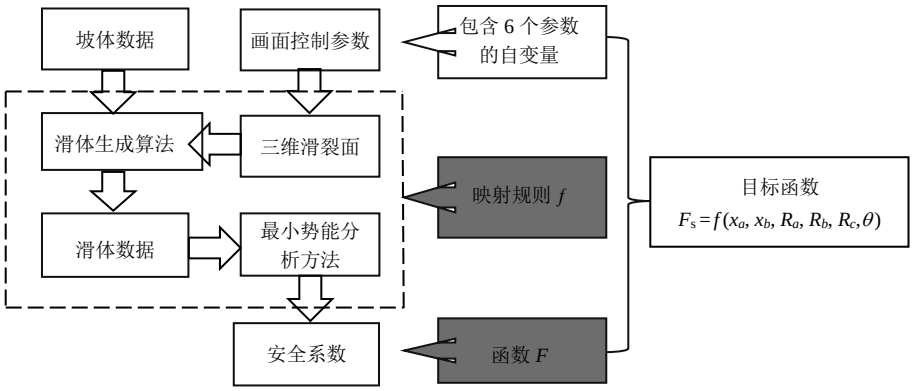


图 3 目标函数的确定流程

Fig.3 Determination process of objective function

3 三维临界滑裂面搜索的实现

3.1 搜索算法选择

临界滑裂面的搜索，就是选择最小安全系数所对应的滑裂面，属于数学领域的优化问题。目前工程领域应用的优化方法主要有枚举法、数值法和人工智能法等。人工智能法是近年来出现的搜索方法，通过模拟自然界中的某些现象并基于随机搜索技术寻优，有着较高的搜索效率。而遗传算法作为人工智能法的一种，有着并行处理多个个体、易于实现、可降低陷入局部最优解风险等优点，因此，本文选择遗传算法作为搜索算法。

3.2 临界滑裂面搜索的原理

基于遗传算法和式（6）的安全系数目标函数，搜索临界滑裂面流程图如图 4 所示，搜索的具体实现过程如下：

（1）设定各个参数的取值范围，即 x_a 的取值范围为$[x_{a\mathrm{Min}}, x_{a\mathrm{Max}}]$、$x_b$ 的取值范围为$[x_{b\mathrm{Min}}, x_{b\mathrm{Max}}]$、$R_a$ 的取值范围为$[R_{a\mathrm{Min}}, R_{a\mathrm{Max}}]$、$R_b$ 的取值范围为$[R_{b\mathrm{Min}}, R_{b\mathrm{Max}}]$、$R_c$ 的取值范围为$[R_{c\mathrm{Min}}, R_{c\mathrm{Max}}]$、$\theta$ 的取值范围为$[\theta_{\mathrm{Min}}, \theta_{\mathrm{Max}}]$；在对编码的长度和产生的种群数进行设定后，采用二进制编码形成初始种群。

（2）依据最小势能法定义适应值函数，而后将初始种群解码成十进制表示的个体。计算个体适应

度后，按适应度将个体进行排序，选取适应度高的个体。

（3）设定遗传参数，按设定概率将选中个体进行交叉和变异运算。其中交叉运算是按单点交叉的方法来实现，而变异运算是按选定概率选择变异点，而后将变异点的基因进行取反。

（4）设定优化收敛标准，计算新种群中个体的适应值，满足标准则输出最优解，不满足则用新生个体取代原种群中的适应度差的个体，执行循环操作。

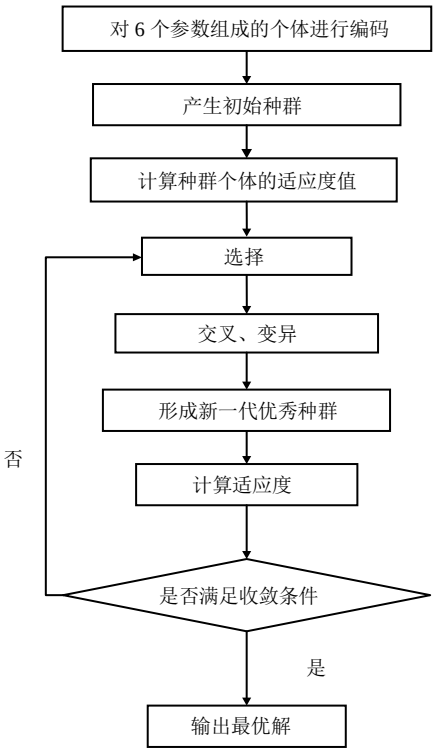


图 4　搜索流程图

Fig.4　Flow chart of searching

3.3 临界滑裂面搜索程序的开发

由于边坡的滑裂面数目较大且计算复杂，不便于工程应用，本文基于上述的搜索原理开发了搜索程序，实现了在程序界面中输入边坡的物理、力学、几何以及遗传算法等参数后，就可以确定边坡最危险的滑裂面，并给出边坡的最小安全系数，程序界面见图 5。通过此程序分析边坡稳定性，可有效避免繁琐的人工计算过程，使本文方法便于研究人员使用与工程应用。

4　方法验证

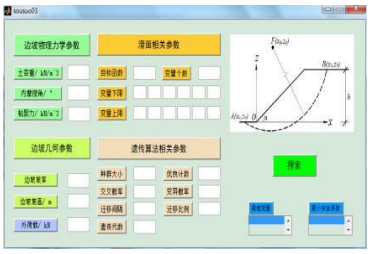
4.1 算例验证

一均质边坡[19]，如图 6 所示，土体重度 γ = 19.2 kN/m^3，抗剪强度指标 φ =20°、c=29.3 kPa，坡高为 12.2 m，坡率为 0.5。运用本文方法搜索临界滑裂面，设置种群大小为 40、交叉概率为 0.7、变异概率为 0.2、遗传代数为 100，并将得到的结果与利用 Janbu 法的搜索结果进行对比。两种方法搜索得到的临界滑裂面如图 7 所示。

算例中设置多个变量同时变化，搜索得到的最小安全系数为 1.847，Janbu 法得到的最小安全系数为 1.836。



(a) 系统子界面图



(b)　用户界面图

图 5　搜索程序界面图

Fig.5　Program interface of searching

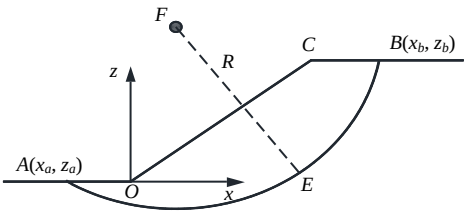


图 6　算例边坡示意图

Fig.6　The example of slope

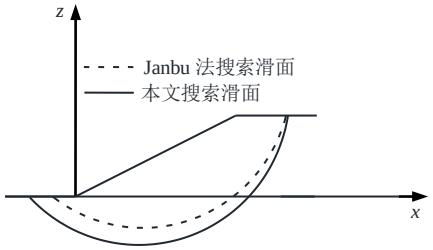


图 7　搜索结果

Fig.7　Searching results of critical slip surface

由图 7 可知，本文搜索方法所搜索的临界滑裂面与其他方法搜索得到的滑裂面较为接近。滑面在

坡顶的位置相近，但是在坡脚处位置差别大一些。两种搜索方法得到的最小安全系数差别仅 0.01 左右，在允许范围内。所以本文提出的三维临界滑裂面搜索方法是可行的。

经验算发现，本方法的搜索区间的大小对搜索精度和搜索效率存在较大影响。搜索区间越大，在生成的个体里会包含一些无法定义椭球面的个体和构建出来滑裂面不合理的个体等情况。这些因素会对搜索效率和搜索精度产生一定影响。因此，在搜索之前需要根据边坡的情况确定 6 参数较为合理的变化范围，进而确定较为合理的搜索区间。通过验算，算例的各代安全系数成递减趋势，最后平稳收敛于最终值，也说明了本文方法收敛性良好，安全系数的收敛情况如图 8 所示。

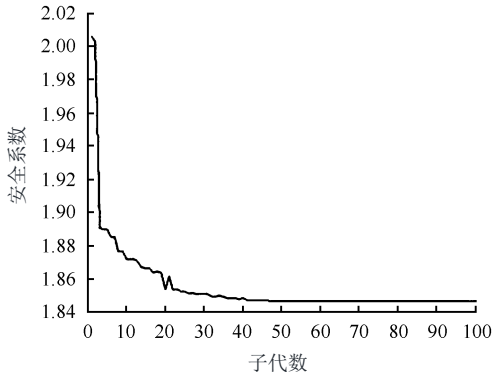


图 8 各代安全系数

Fig.8 Safety factor of each generation

4.2 模型试验验证

模型试验的目的是为了验证本文边坡三维临界滑裂面搜索方法的可行性。通过分析试验所得滑面与搜索得到临界滑裂面的差异、最小安全系数与实际值 1 的偏差，进而验证本文三维边坡临界滑裂面搜索方法。

首先在室内模型箱内填充细砂土，制成边坡模型见图 9。试验材料为细砂土，其物理力学参数见表 1。试验过程中设计了两个模型，模型 1 的坡比为 2，坡高为 1 m；模型 2 的坡比为 2，坡高为 0.8 m。然后对模型进行分级加载直至形成贯通滑裂面（见图 10），提取滑面数据拟合出滑裂面方程，详细试验过程及数据见文献[20]，在此不再赘述。

表 1 砂土物理力学参数

Table 1 Physical mechanical parameters of sand

填筑材料	重度 /(kN/m^3)	内摩擦角 /(°)	黏聚力 /(kN/m^3)
细砂土	14.75	33	0



图 9 试验模型

Fig.9 Experimental model



(a) 模型 1 滑裂面 (b) 模型 2 滑裂面

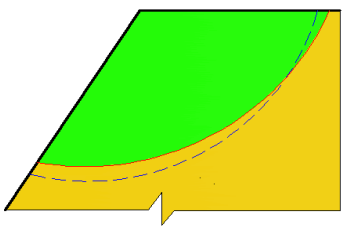
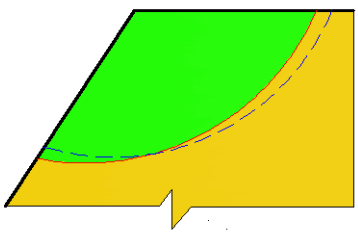
图 10 试验滑裂面

Fig.10 Experimental slip surface

在得到滑裂面拟合方程后，应用本文方法进行临界滑裂面搜索。设置两个验算的遗传算法参数分别为：种群大小 40，交叉概率 0.7，变异概率 0.2，遗传代数 50。搜索滑裂面和试验滑裂面对比以及搜索滑裂面安全系数见表 2。

表 2 搜索结果

Table 2 Searching results

模型	模型 1	模型 2
搜索滑面和试验滑面对比		
最小安全系数	1.019	0.996

注：虚线为搜索滑裂面，实线为试验滑裂面。

由表 2 可以看出，试验滑裂面和搜索滑裂面的滑入点和滑出点的位置相差均不大。搜索得到的模型 1 和模型 2 的安全系数分别为 1.019 和 0.996，均接近于实际值 1。当然模型试验的结果也会受到边界效应和尺寸效应的影响，但研究表明：边界效应随着边坡模型宽度的增加而减弱，当宽度增加到一定数值时，边界效应对试验结果产生的影响可以忽略不计[21−22]；在岩土体强度和稳定性试验中土体试件的尺寸大于中尺寸时，试验所得的强度指标可以较好的符合实际情况，尺寸效应对试验结果影响很小[23−24]。文中的模型宽度及整体尺寸远大于文献[20－23]中提到的模型宽度及尺寸，因此可以认为边界效应、尺寸效应对模型试验的结果影响微弱，目前搜索得到的最小安全系数又与实际值 1 接近，说明本文提出的搜索方法是合理的。不过从表 2 可以看出，搜索结果和试验结果的偏差是存在的，分析认为产生偏差的原因主要有以下几方面：①堆载方式对试验的结果产生影响；②数学软件拟合的滑裂面只是在一定程度上逼近真实滑面，达不到完全重合；③试验中在收集数据时会存在一定的误差。在以后的模型试验过程中应设法减小这些因素产生的偏差，使得试验结果更加符合现实情况。

5　结　论

（1）算例对比分析表明本文搜索方法得到的结果与利用 Janbu 法搜索的结果较为一致，表明文中的方法是合理且可行的。同时，模型试验结果显示，本文搜索方法得到的滑面形态、位置以及其对应的安全系数与试验中结果基本一致。

（2）算例对比验证以及模型试验的结果表明，文中方法在搜索的过程中，控制参数的区间变化会对搜索精度产生一定影响，所以确定合理的搜索区间十分重要。试验结果和搜索结果偏差不大，再次说明了本方法是可行的。

（3）文中提出利用 6 个参数构建的椭球形滑面的方法，并且利用最小势能法确定目标函数，验证结果表明：文中假定的滑面形态与实际中的滑面形态较为吻合，且相比于任意滑裂面可有效减小工作难度，更易于实现。

（4）本文根据上述搜索原理开发了搜索程序，在确定边坡的相关参数后，便可得出边坡的临界滑裂面和最小安全系数。避免了较为复杂的人工运算工作，使本文方法方便于应用。

参 考 文 献

[1] 毛谦, 陈胜宏, 彭成佳. 三维边坡最不利滑裂面的遗传算法搜索[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 1345－1350.
MAO Qian, CHEN Sheng-hong, PENG Cheng-jia. Search for critical slip surface of 3D slope based on genetic algorithm[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(5): 1345－1350.

[2] 姜玉平, 陈征宙, 毕港, 等. 基于极限分析法的边坡临界高度及稳定性研究[J]. 水文地质工程地质, 2012, 39(2): 43－46.
JIANG Yu-ping, CHEN Zheng-zhou, BI Gang, et al. Research on critical height and stability of slopes based on upper bound limit analysis method[J]. **Hydrogeology & Engineering Geology**, 2012, 39(2): 43－46.

[3] 刘强, 胡斌, 蒋海飞, 等. 改进的边坡楔形体破坏定性分析方法[J]. 人民长江, 2013, 44(22): 69－71.
LIU Qang, HU Bin, JIANG Hai-fei, et al. Improved qualitative analysis method on wedge failure of slope[J]. **Yangtze River**, 2013, 44(22): 69－71.

[4] 张鲁渝, 张建民. 边坡稳定分析中组合滑面的构造模型[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(8): 855－859.
ZHANG Lu-yu, ZHANG Jian-min. Model of combined slips in slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(8): 855－859.

[5] 邓东平. 用于三维复杂土坡稳定性分析的滑动面搜索新方法[D]. 长沙: 中南大学, 2010.
DENG Dong-ping. A new sliding surface searching method for stability analysis of 3D complex soil[D]. Changsha: Central South University, 2010.

[6] 祝志恒, 傅鹤林, 董辉. 基于双二次 Bezier 曲面的三维边坡滑裂面构造[J]. 路基工程, 2009, (1): 114－116.
ZHU Zhi-heng, FU He-lin, DONG Hui. Construction of 3D slope slip surface based on biquadratic Bezier surface[J]. **Subgrade Engineering**, 2009, (1): 114－116.

[7] 郭子红, 刘新荣, 舒志乐. 基于变分法对边坡最不利滑裂面的分析[J]. 自然灾害学报, 2011, 20(6): 51－56.
GUO Zi-hong, LIU Xin-rong, SHU Zhi-le. Analysis of slope’s most dangerous sliding surface based on variational method[J]. **Journal of Natural Disasters**, 2011, 20(6): 51－56.

[8] 尤明庆. 均质土坡滑动面的变分法分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 26(1): 2735－2745.
YOU Ming-qing. Study on landslide of homogeneous soil with calculus of variations[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2011, 20(6): 51－56.

[9] 唐超宏, 莫海鸿, 刘少跃. 模式搜索法在边坡稳定性分

析中的应用[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2000, 28(2): 42－46.
TANG Chao-hong, MO Hai-hong, LIU Shao-yue. Application of pattern search method in slope stability analysis[J]. **Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)**, 2000, 28(2): 42－46.

[10] 莫海鸿, 唐超宏, 刘少跃. 应用模式搜索法寻找最危险滑动圆弧[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(6): 696－699.
MO Hai-hong, TANG Chao-hong, LIU Shao-yue. Determination of the most dangerous slip surface with pattern search method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1999, 21(6): 696－699.

[11] 邹广电, 陈永平. 滑坡和边坡稳定性分析的模拟退火-随机搜索耦合算法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(12): 2032－2037.
ZOU Guang-dian, CHEN Yong-ping. Coupling algorithm of simulated annealing algorithm and random search method for slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(12): 2032－2037.

[12] 李南生, 唐博, 谈风婕, 等. 基于统一强度理论的土石坝边坡稳定分析遗传算法[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 243－249.
LI Nan-sheng, TANG Bo, TAN Feng-jie, et al. Slope stability analysis of earth-rock dams based on unified strength criterion by genetic algorithm[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(1): 243－249.

[13] 林义国, 黄少敏. 动态规划法在边坡工程稳定分析中的应用研究[J]. 中国水能及电气化, 2010, 69(9): 29－33.
LING Yi-guo, HUANG Shao-min. Research on the application of dynamic programming to slop stability analysis[J]. **China Water Power & Electrification**, 2010, 69(9): 29－33.

[14] MAULDON M, URETA J. Stability of rock wedges with multiple sliding surface[J]. **Canadian Geotechnital Journal**, 1999, 14(1): 51－66.

[15] 温树杰, 罗惠, 李铀, 等. 基于最小势能原理的三维边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(增刊 1): 3298－3305.
WEN Shu-jie, LUO Hui, LI You, et al. Three-dimensional slope stability analysis based on minimum potential energy principle[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2015, 34(Supp. 1): 3298－3305.

[16] 孙加平, 顾厚煜, 胡国保, 等. 锚杆作用下边坡稳定分析中改进最小势能法研究[J]. 岩土力学, 2017, 38(增刊 1): 291－298.
SUN Jia-ping, GU Hou-yu, HU Guo-bao, et al. An improved minimum potential energy method for slope stability analysis under action of bolt[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(Supp. 1): 291－298.

[17] 邱骋, 谢谟文, 江崎哲郎, 等. 基于三维力学模型的大范围自然边坡稳定性概率评价方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(11): 2281－2287.
QIU Cheng, XIE Mo-wen, ESAKI Tetsuro, et al. A 3D deterministic model based probabilistic method for landslide hazard assessment of large mountainous area[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(11): 2281－2287.

[18] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis: principles, methods and procedures[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003.

[19] ZHANG X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plane view[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1988, 114(6): 658－671.

[20] HU GUOBAO, SUN JIAPING, WEN SHUJIE, et al. Slope stability analysis and experimental study on 3D minimum potential energy method[J]. **Electronic Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 20(23): 12379－12397.

[21] 刘东燕, 郑志明, 侯龙. 边坡模型边界效应及材料孔隙率敏感性研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(增刊 1): 23－27.
LIU Dong-yan, ZHENG Zhi-ming, HOU Long. Research on boundary condition effect and material porosity sensitivity for slope model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(Supp. 1): 23－27.

[22] COURRECH DU PONT S, GONDRET P, PERRIN B, et al. Wall effects on granular heap stability[J]. **Europhysics Letters**, 2002, 9(4): 1－7.

[23] 周江平, 彭志雄. 土体抗剪强度的尺寸效应[J].西南交通大学学报, 2005, 40(1): 77－81.
ZHOU Jiang-ping, PONG Zhi-xiong. Investigation on size effect of shear strength of soil[J]. **Journal of Southwest Jiaotong University**, 2005, 40(1): 77－81.

[24] 周江平, 彭志雄, 赵善锐. 纤维束强度理论与土体抗剪强度的尺寸效应研究[J]. 铁道学报, 2005, 27(1): 96－101.
ZHOU Jiang-ping, PONG Zhi-xiong, ZHAO Shan-rui. Research on strength theory of fabric bundles and the size effect on shear strength of soil[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2005, 27(1): 96－101.