

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.3009

# 考虑钙质砂微观颗粒形状影响的 液体拖曳力系数试验

吴 野, 王 胤, 杨 庆

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘 要:** 钙质砂作为南海岛礁填筑常用的岩土材料, 其渗透性很大程度上决定着填筑后土体的固结和沉降。拖曳力系数是表达流体对土体颗粒表面力的参数, 也是表征颗粒状土体渗透能力的一个重要参数, 目前国内外对钙质砂拖曳力系数的研究十分有限。首先引入一个修正的三维参数  $\Phi$  对钙质砂这种天然非规则颗粒材料的形状进行定量描述, 然后开展一系列单个钙质砂颗粒在液体中沉降试验, 利用高速相机记录颗粒沉降过程, 结合图像处理技术获得颗粒沉降平衡速度  $U_t$ , 进而计算出拖曳力系数  $C_D$  和雷诺数  $Re$ , 最后拟合出包含  $C_D$ 、 $Re$  及  $\Phi$  三个参数的钙质砂拖曳力系数半经验模型。结果发现, 在相同雷诺数条件下钙质砂的形状系数  $\Phi$  越大, 拖曳力系数越小。通过与其他研究结果对比发现, 其表面微孔隙越发育, 拖曳力系数越小的规律。该模型能够考虑不规则颗粒形状对拖曳力系数的影响, 从而提高对土体渗透性预测的精度, 对南海岛礁填筑工程中钙质砂固结和沉降的计算也具有重要意义。

**关 键 词:** 钙质砂; 形状系数; 拖曳力系数; 雷诺数; 沉降试验

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018) 09-3203-10

## Experiment on drag force coefficient of calcareous sand in liquid considering the effect of particle shape

WU Ye, WANG Yin, YANG Qing

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

**Abstract:** Calcareous sand is often used as filling material in construction of artificial islands in South China Sea. The permeability of calcareous sand has significant influence on the consolidation and settlement of soil mass. The drag force coefficient, which expresses the fluid drag force on particle surface, likewise an important parameter that characterizes the permeability of calcareous sand, is not extensively studied by researchers so far. In this study, a modified three-dimensional shape coefficient  $\Phi$  is introduced to quantitatively evaluate the shape of calcareous sand. A series of single calcareous sand particle settling tests is carried out in which a high-speed camera is employed to record the settling course and imaging technique is used to obtain the terminal equilibrium settling velocity of the sand particle. By doing so, the drag force coefficient- $C_D$  and Reynolds number- $Re$  can be determined. The experimental results show that for the same Reynolds number, the drag force coefficient increases as the shape coefficient increases. Through a comparison with other test results, it is found that the richness of particle surface pores of calcareous sand can reduce the drag force coefficient. Finally, a semi-empirical model of the drag force coefficient for calcareous sand including  $C_D$ ,  $Re$  and  $\Phi$ , is obtained. This model will improve the prediction of permeability of soil mass especially with particles of irregular shapes. This improvement of drag force coefficient model has the significance on the analysis of the consolidation and settlement of foundations or artificial islands filled with calcareous sand in South China Sea.

**Keywords:** calcareous sand; particle shape coefficient; drag force coefficient; Reynolds number; settling tests

收稿日期: 2016-12-29

基金项目: 国家自然科学基金 (No.41572252); 国家自然科学基金青年基金 (No.51409036)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41572252) and the Young Foudation of the National Natural Science of China (51409036).

第一作者简介: 吴野, 男, 1991 年生, 硕士, 主要从事海洋土试验研究方面的工作。E-mail: 13795135125@163.com

通讯作者: 杨庆, 男, 1964 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程及工程地质方面的研究工作。E-mail: qyang@dlut.edu.cn

## 1 引言

钙质砂是一种碳酸钙含量达50%以上的海洋生物成因的颗粒状砂土材料,广泛分布于热带海域,如中国南海。从微细观结构上来看,钙质砂颗粒具有棱角度高、形状不规则、易破碎等特点。这使得钙质砂的工程力学特性与一般的陆源砂土有一定的区别<sup>[1-4]</sup>。陈海洋等<sup>[5]</sup>通过光学拍照和图像处理方法,描述了钙质砂的自相似分形特性;朱长歧等<sup>[6]</sup>通过飞秒切割技术对钙质砂内孔隙的结构特征进行了系统的分析;刘崇权等<sup>[7]</sup>研究了颗粒破碎对钙质砂力学特性的影响;秦月等<sup>[8]</sup>采用高压固结试验,研究了珊瑚礁沉积碎屑物试样在固结、回弹过程中的变形特性,以及在不同加载方式、含水条件下的颗粒破碎情况;任玉宾等<sup>[9]</sup>研究了颗粒级配等对钙质砂渗透性的影响。纵观以上研究可见,目前针对钙质砂颗粒形状、内孔隙及破碎方面的研究已经比较广泛和深入,但是对钙质砂水理渗透特性方面的研究还比较少。在流固两相流中,拖曳力为流体对固体表面的作用力,拖曳力系数则表示了拖曳力与作用在颗粒表面上流体动压力之比,因而直接影响着颗粒堆积材料的渗透性,而目前针对具有不规则形状颗粒的岩土材料(包括钙质砂)的拖曳力系数研究还十分有限。

在其他领域,众多学者对颗粒体拖曳力系数模型已经有了一定的研究,其中比较典型的有 Haider 等<sup>[10]</sup>提出的四参数模型,形式如下:

$$C_D = \frac{24}{Re}(1 + A \cdot Re^B) + \frac{C}{1 + D/Re} \quad (1)$$

式中:  $C_D$  为颗粒拖曳力系数;  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为与颗粒形状有关的4个常数;  $Re$  为雷诺数,定义为

$$Re = \frac{\rho U_t d_p}{\mu} \quad (2)$$

式中:  $\rho$  为液体密度;  $U_t$  为颗粒在液体中沉降的平衡速度;  $d_p$  为颗粒等效粒径;  $\mu$  为液体动力黏度。

之后 Ganser<sup>[11]</sup>通过斯托克斯形状因子及牛顿形状因子对四参数模型进行了修正; Chhabra 等<sup>[12]</sup>总结了前人 1 900 多组数据,并将其代入到已有的多个模型中,对多个模型进行了误差分析,讨论了采用不同形状系数进行拟合的准确性; Loth<sup>[13]</sup>分析了球形、非球形和表面粗糙颗粒的拖曳力系数与雷诺数之间的关系; Hölzer 等<sup>[14]</sup>区分了水平和竖直方向的球形度并将其引入到拖曳力系数模型中; Dellino 等<sup>[15]</sup>研究了浮石材料在高雷诺区的颗粒形状、拖曳力系数及雷诺数之间的关系。

由以上内容可知,目前针对岩土材料建立的拖曳力系数模型较少,为获得更适合钙质砂颗粒的拖曳力系数模型,本文引入形状系数  $\Phi$  对钙质砂形状进行定量描述,通过室内圆筒静止流体中单一颗粒沉降试验,建立了针对钙质砂颗粒的拖曳力系数半经验理论模型。

## 2 沉降试验

### 2.1 钙质砂颗粒形状描述

本次试验材料为取自南海南沙群岛海域某岛礁附近的天然钙质砂,在显微镜下拍摄的颗粒图像如图 1(a)所示。钙质砂颗粒近乳白色,由于特殊成因,其颗粒形状变化多样,如图 1(b)~1(d)所示,近似可分为片状(多为贝类碎片)、长条状及椭球状 3 种类型,这为试验获取广泛的形状系数提供了有利条件。



(a) 多样化颗粒



(b) 片状颗粒



(c) 长条状颗粒



(d) 椭球状颗粒

图 1 形状不规则的钙质砂颗粒

Fig.1 Irregular particle shapes of calcareous sands

试验选取不同形状的钙质砂颗粒共 133 个，为了能够准确、定量地描述钙质砂颗粒的不规则形状，引入改进的 Wadell<sup>[16]</sup>形状系数  $\Phi$ ，该形状系数同时考虑了颗粒三维整体和二维表面形态特征，因此能够对钙质砂颗粒的不规则形状进行有效的描述：

$$\Phi = \frac{A_s}{A_p R} \quad (3)$$

式中： $A_p$  为颗粒的体表面积； $A_s$  为与颗粒具有相同体积球体的表面积，可表示为

$$A_s = 4\pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^2 \quad (4)$$

其中：

$$d_p = \sqrt[3]{\frac{6M}{\pi\rho_p}} \quad (5)$$

式中： $M$  为颗粒质量； $\rho_p$  为颗粒密度。

将钙质砂颗粒形状视作三轴不等椭球体， $A_p$  按下式进行估计：

$$A_p = 2\pi \sqrt{l^2 m^2 + m^2 s^2 + l^2 s^2 + \frac{1}{3}(l^2 ms + lm^2 s + lms^2)} \quad (6)$$

式中： $l$ 、 $m$ 、 $s$  分别为近似椭球长轴、中轴和短轴的长度。

$R$  为颗粒二维圆形度，用于考虑颗粒表面起伏对  $A_p$  的影响，可表示为

$$R = \frac{A_{C-2D}}{A_{P-2D}} \quad (7)$$

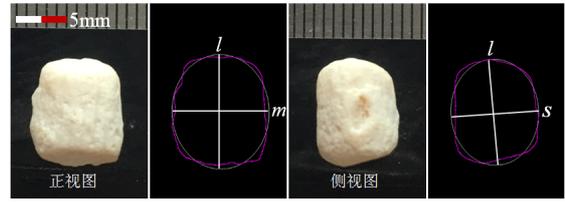
式中： $A_{P-2D}$  为颗粒在自然放置状态下的投影面积； $A_{C-2D}$  为与投影具有相同周长的圆形面积。

以上定义表明，对颗粒体而言， $R$  值大于或等于 1。当  $R$  值越接近 1，表明颗粒投影面越接近圆形，表面越平滑； $\Phi$  值小于或等于 1，它从三维角度描述了钙质砂颗粒的不规则形态，其值越接近 1，表明颗粒形状越接近圆球，形状越规则。

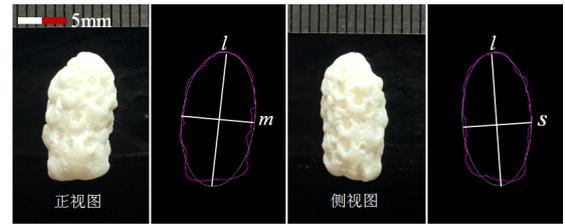
为了获取椭球体 3 个轴的长度，首先利用光学显微镜（500 倍）拍摄颗粒自然放置时的照片，将颗粒绕长轴旋转 90° 后再次拍摄，然后采用 ImageJ 图像处理软件对照片进行二值化、提取边界处理，并利用最小二乘法拟合椭圆获取相应的  $l$ 、 $m$ 、 $s$  值，处理过程如图 2 所示。

经图 2 过程处理后得到本次试验钙质砂颗粒形状系数分布如图 3 所示，分布范围为 0.28~0.78，平均值为 0.50，偏度系数  $SK$  为 0.087 0，表明形状

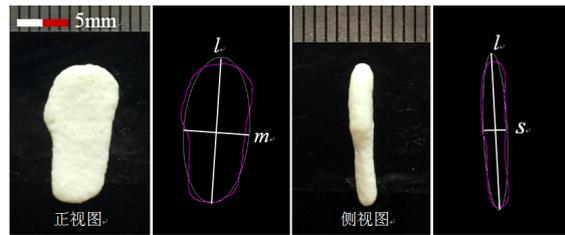
系数基本成正态分布，符合自然界中钙质砂颗粒堆积体的形状系数分布规律，最终确定钙质砂颗粒形状系数  $\Phi=0.50$ 。



(a)  $l = 11.54 \text{ mm}$ ,  $m = 9.7 \text{ mm}$ ,  $s = 8.9 \text{ mm}$ ,  $R = 1.27$ ,  $\Phi = 0.68$



(b)  $l = 14.6 \text{ mm}$ ,  $m = 7.7 \text{ mm}$ ,  $s = 7.3 \text{ mm}$ ,  $R = 1.47$ ,  $\Phi = 0.51$



(c)  $l = 14.9 \text{ mm}$ ,  $m = 6.9 \text{ mm}$ ,  $s = 2.2 \text{ mm}$ ,  $R = 1.49$ ,  $\Phi = 0.30$

图 2 钙质砂颗粒形状系数图像处理  
Fig.2 Image processing for particle shape parameter of calcareous sand

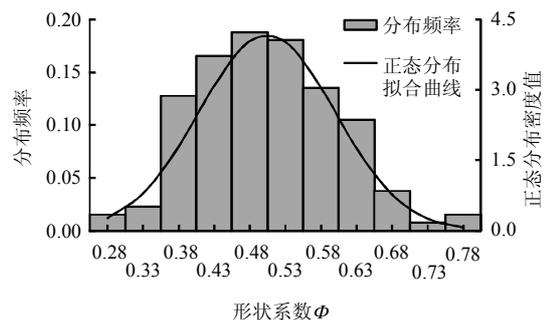


图 3 钙质砂颗粒  $\Phi$  值分布曲线  
Fig.3 Distribution curve of  $\Phi$  of calcareous sand particles

## 2.2 试验装置和过程

本研究采用自主设计和加工的装置进行颗粒沉降试验，试验布置如图 4 所示。试验装置中圆管主体为透明树脂玻璃材质，壁厚为 3 mm，高度为 1.5 m，内径为 104 mm；试验中所使用钙质砂等效颗粒粒径范围为 2.9~9.7 mm，内径大于  $10d_p$ ，可确定圆筒边界对颗粒下落过程影响较小。圆管架立

在铝合金架上,上、下端固定,确保圆管在试验过程中始终保持竖直。圆管下端设置排水阀,方便试验结束后回收液体。圆管两侧放置刻度尺来记录颗粒下落位置,刻度尺平行布置以减小由于角度原因引起的读数误差。



图4 沉降试验仪器设备图

Fig.4 Instruments and equipment of settling test

试验前先将颗粒清洗、烘干,对颗粒进行编号后采用电子天平称量颗粒质量,颗粒密度按照土工《试验规程》SL237—1999<sup>[17]</sup>采用5 mL比重瓶进行称量。为了获得更广范围的雷诺数区间,配制黏滞系数较大的甘油-水溶液(牛顿流体),搅拌均匀后将液体加入圆管,在试验室内静置至少24 h,使管内气泡充分溢出,液体与试验室之间达到热平衡。利用水银温度计测量液体温度,量筒及电子天平称量液体密度。在低雷诺区( $Re \leq 0.5$ ),液体黏度采用落球法直接测量,高雷诺区( $Re > 0.5$ )时采用旋转式黏度仪进行测量,测得液体基本性质如表1所示。

表1 试验所用液体基本性质  
Table 1 Basic properties of test liquid

| 试样编号 | $C_v / \%$ | $T / ^\circ\text{C}$ | $\rho / (\text{g}/\text{cm}^3)$ | $\mu / (\text{mPa} \cdot \text{s})$ |
|------|------------|----------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| S1   | 100        | 17.3                 | 1.26                            | 1 839                               |
| S2   | 95         | 18.8                 | 1.25                            | 688                                 |
| S3   | 90         | 19.5                 | 1.23                            | 309                                 |
| S4   | 85         | 20.8                 | 1.22                            | 155                                 |
| S5   | 80         | 21.2                 | 1.21                            | 97.87                               |
| S6   | 70         | 22.3                 | 1.20                            | 41.87                               |
| S7   | 60         | 23.1                 | 1.17                            | 16.30                               |
| S8   | 40         | 23.5                 | 1.12                            | 5.02                                |
| S9   | 0          | 18.8                 | 1.00                            | 1.04                                |

注:  $C_v$  为甘油体积浓度,  $T$  为液体温度。

释放颗粒前先将颗粒在配制好的液体中加热排除颗粒孔隙内气体,确保下落过程中颗粒与液体之间能够充分接触。然后将颗粒在圆筒顶部释放(颗粒方向随机),使其沿中心轴线自由下落,使用佳能5D Mark III高速相机(1 280×720, 50 帧/s)对颗粒下落过程进行逐帧扫描拍摄。利用 Adobe Premiere Pro 视频处理程序对颗粒下落过程进行逐帧播放,图5展示了颗粒在液体中每隔一秒的瞬时位置,图片下方显示时间从左至右依次为分、秒和帧。剔除偏心及旋转翻滚强烈的颗粒,选择下落过程较顺畅的颗粒,记录其下落较稳定时一段时间内下落的距离,进而获得颗粒的最终沉降平衡速度。预估颗粒达到0.99倍平衡速度所需时间 $t_s$ ,其公式为<sup>[18]</sup>

$$t_s = \frac{4.6\rho d_p^2}{18\mu} \quad (8)$$

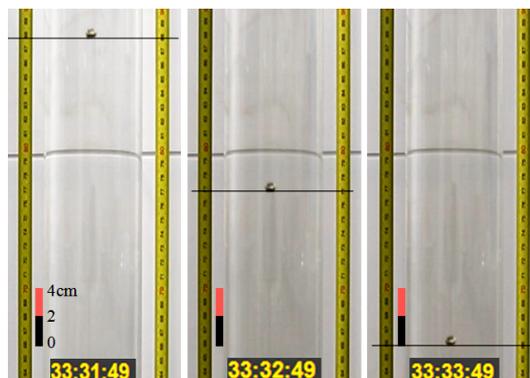


图5 单颗粒沉降瞬时位置

Fig.5 Images of a single particle settling

### 3 试验结果及误差分析

#### 3.1 试验结果

颗粒在静止牛顿流体中沉降过程遵守 Newton 阻力定律,即颗粒首先在重力和浮力共同作用下进入加速阶段,随着速度的增大,颗粒所受拖曳阻力不断增大,当颗粒所受到的体力与面力达到平衡时,颗粒进入匀速下落状态,此时颗粒的速度  $U_t$  记为沉降平衡速度,计算公式为

$$C_D = \frac{4gd_p(\rho_p - \rho)}{3\rho U_t^2} \quad (9)$$

式中:  $g$  为重力加速度。

通过试验获取颗粒相应参数及下落平衡速度后,采用式(2)、(9)分别计算出雷诺数  $Re$  及拖曳力系数  $C_D$ 。在双对数坐标下绘制出钙质砂颗粒的  $C_D$  和  $Re$  关系如图6所示。

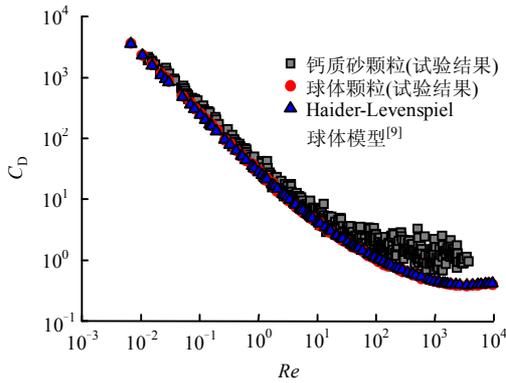


图 6 两种颗粒沉降  $C_D-Re$  关系图

Fig.6  $C_D$  as a function of  $Re$  for two kinds of particles

沉降试验中剔除旋转（翻滚）、偏移强烈的颗粒，最终共获得钙质砂颗粒有效数据点 521 个，雷诺数分布范围  $Re$  为 0.01~4 000，基本包含南海钙质砂在正常渗流及强渗流下所经历的雷诺数范围。为了对比分析，本试验中还采用规则玻璃球体进行了沉降试验，其结果见图 6。玻璃球体沉降稳定速度提取方法与钙质砂相同，玻璃球体为人工材料，其形状系数近似认为  $\Phi=1$ 。经与钙质砂对比发现，钙质砂拖曳力系数与玻璃圆球体存在差异，即在同等雷诺数条件下，球形颗粒的拖曳力系数较小；而由于其不规则形状的影响( $\Phi=0.5$ )，钙质砂颗粒拖曳力系数较大。这种差异随着雷诺数的增加而逐渐增大。

### 3.2 试验误差分析

颗粒沉降试验过程中误差主要来源于以下几个方面：首先，由于钙质砂形状十分复杂，表面微孔隙发育，因此简单地将其视为三轴不等椭球体对其表面积进行估计难免存在一定的误差；其次，在颗粒沉降平衡速度的测量方面，本次试验采用 50 帧/s 的高速相机进行拍摄和回放，在时间记录方面会存在 2% 左右的误差，间接造成速度误差约 2%。

除以上几方面影响因素外，对试验结果影响最大的因素就是颗粒初始方向的选择及颗粒下落过程中的旋转偏移。在低雷诺区，颗粒基本沿圆筒中心轴线竖直沉降；而随着雷诺数的增大，颗粒下落过程中旋转偏移现象逐渐明显。针对该点，除了剔除沉降过程中旋转强烈、偏移严重的颗粒外，本试验在雷诺数较大时 ( $Re>10$ ) 进行 3 次平行试验，获得平均沉降平衡速度后再分别反算  $C_D$  和  $Re$  值，以达到减小误差的目的。表 2 为在体积浓度为 60% 甘油水溶液中 3 次平行沉降试验部分结果。

图 7 表示在此局部雷诺数区间进行的 3 次平行试验结果。

表 2 3 次平行试验速度及  $U_t$ 、 $Q$  表

Table 2 Velocities of three parallel tests and  $U_t$ ,  $Q$

| 编号 | $U_1$ (cm/s) | $U_2$ (cm/s) | $U_3$ (cm/s) | $U_t$ (cm/s) | $Q$ % |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|
| 1  | 13.10        | 13.50        | 13.65        | 13.42        | 1.56  |
| 2  | 14.15        | 14.18        | 14.49        | 14.27        | 1.00  |
| 3  | 19.76        | 18.05        | 18.71        | 18.84        | 3.26  |
| 4  | 17.91        | 17.16        | 17.72        | 17.59        | 1.67  |
| 5  | 20.47        | 21.20        | 21.24        | 20.97        | 1.59  |
| 6  | 19.51        | 19.98        | 20.06        | 19.85        | 1.14  |
| 7  | 24.52        | 23.29        | 24.97        | 24.26        | 2.67  |
| 8  | 21.13        | 20.71        | 20.87        | 20.9         | 0.72  |
| 9  | 21.03        | 20.91        | 21.24        | 21.06        | 0.57  |
| 10 | 24.26        | 22.93        | 23.95        | 23.72        | 2.19  |
| 11 | 25.47        | 24.56        | 24.58        | 24.87        | 1.61  |
| 12 | 25.33        | 24.04        | 24.08        | 24.48        | 2.30  |
| 13 | 25.05        | 25.25        | 24.97        | 25.09        | 0.43  |
| 14 | 29.02        | 27.75        | 28.28        | 28.35        | 1.58  |
| 15 | 29.39        | 28.63        | 29.53        | 29.18        | 1.27  |

注： $U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$  为 3 次平行试验测得的平衡速度； $Q$  为相对偏差。

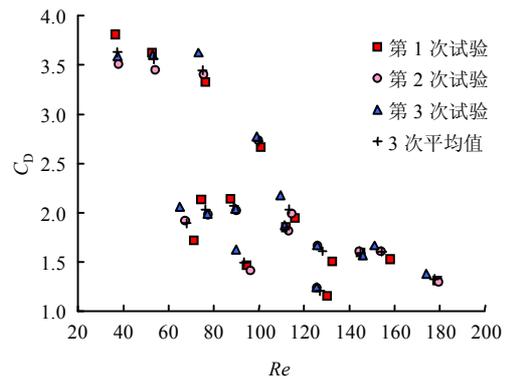


图 7 局部雷诺数区间 3 次平行试验  $C_D$  与  $Re$  关系

Fig.7 Relationships between  $C_D$  and  $Re$  in three parallel tests in a specific  $Re$  range

为了定量描述沉降过程中速度测量结果的误差，采用总体相对平均偏差  $Q_m$  对沉降稳定速度平行试验结果进行统计分析， $Q_m$  定义为

$$Q_i = \frac{\sum_{j=1}^3 \frac{|U_j - U_{t,i}|}{U_{t,i}}}{3} \times 100\% \quad (10)$$

$$Q_m = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n}$$

式中： $U_{t,i}$  为第  $i$  组试验的 3 次平行试验速度平均值； $U_j$  为第  $i$  组试验每次测量的速度； $Q_i$  为第  $i$  组试验相对平均偏差，代表第  $i$  组 3 次平行试验结果的离散程度，部分结果如表 2 所示； $Q_m$  为各组试验  $Q_i$  的平均值，本次试验中 ( $Re>10$ ) 3 次平行试验全部沉

降成功组数  $n = 103$ ，计算得  $Q_m = 2.16\%$ ，此数值表征每组 3 次试验各自速度与最终确定的颗粒沉降平衡速度之间存在着 2.16% 的偏差，说明试验对速度的测量结果离散性较小，可信度较高。

### 4 拖曳力系数模型拟合

#### 4.1 模型建立

已有的研究发现<sup>[15]</sup>，拖曳力系数  $C_D$ 、雷诺数  $Re$  及颗粒形状系数  $\Phi$  之间存在一定的关联性表达式为

$$F(C_D, Re, \Phi) = 0 \tag{11}$$

为了确定钙质砂颗粒三者的关系，首先考虑最简单的情况，即球体颗粒在低雷诺 Stokes 层流区沉降时，其拖曳力系数与雷诺数之间的理论关系式<sup>[19]</sup>

$$C_D \cdot Re = 24 \tag{12}$$

两侧同乘  $Re$  整理得

$$Re = C_D \cdot Re^2 / 24 \tag{13}$$

而在本次钙质砂颗粒沉降试验中，主要有两点与上述条件不符。第一，钙质砂颗粒形状不规则；第二，本次试验雷诺数区间已经超出 Stokes 层流区。本文欲建立包含  $C_D$ 、 $Re$  及  $\Phi$  的钙质砂拖曳力系数模型，现基于这两个方面对式 (13) 进行修正。

为了考虑颗粒形状的影响，试验中通过调配液体改变黏滞系数和密度等方法，获得广泛的雷诺数区间，选取具有不同形状系数颗粒进行沉降试验，在双对数坐标下绘制  $C_D$  与  $Re$  关系曲线如图 8 所示 ( $\Phi=1$  为玻璃球体数据)。

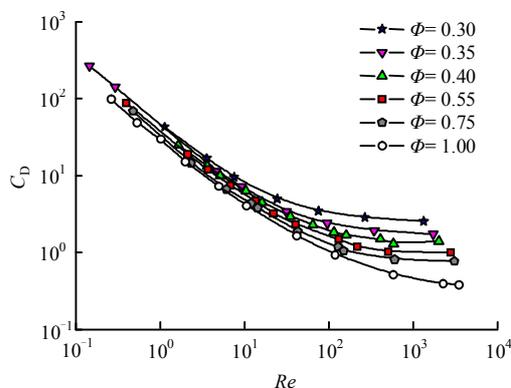


图 8 具有不同形状系数钙质砂颗粒拖曳力系数随  $Re$  变化曲线

Fig.8  $C_D$  as a function of  $Re$  for calcareous sand particles with various shape coefficients

从试验结果中可以得出以下规律：形状系数相

同情况下，钙质砂颗粒拖曳力系数随雷诺数的增加而减小；雷诺数相同的条件下，其拖曳力系数随形状系数的增大而减小，且随着雷诺数的增加，形状系数对拖曳力系数的影响逐渐增大。

针对雷诺数已经超出 Stokes 层流区的情况，综合考虑形状因素，引入形状系数  $\Phi$ ，在本次试验的整个雷诺数区间上采用以下数学表达形式拟合钙质砂拖曳力系数模型：

$$Re = F(C_D \cdot Re^2 \Phi^\alpha) \tag{14}$$

式中： $\alpha$  为形状影响系数，其值随  $Re$  变化，即

$$\alpha = F(Re) \tag{15}$$

Dellino 等<sup>[15]</sup>曾以式 (14) 的形式建立了高雷诺区天然浮石的拖曳力系数经验公式，但并未考虑形状影响系数  $\alpha$ ；Dioguardi 等<sup>[20]</sup>以火山灰为材料对 Dellino 模型低雷诺区进行了补充试验，通过引入相同雷诺数下球体的拖曳力系数  $C_{D,S}$ ，在整个雷诺区间上建立适合火山灰材料的拖曳力系数模型：

$$C_D = C_{D,S} / (Re^2 \Phi^\alpha) (Re/1.1883)^{2.0721} \tag{16}$$

针对钙质砂这种不规则形状颗粒材料，本文同样引入  $C_{D,S}$  对式 (14) 做如下修正：

$$Re = F[C_D / (C_{D,S} \cdot Re^2 \Phi^\alpha)] \tag{17}$$

$C_{D,S}$  可通过式 (1) 确定，关于式 (1) 中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的取值，根据本研究中圆球颗粒的试验结果，对多个圆球拖曳力系数理论模型<sup>[10, 21-22]</sup>进行准确性分析，发现 Haider-Levenspiel 模型<sup>[11]</sup>较其他模型准确，本文圆球颗粒试验结果与 Haider-Levenspiel 模型预测结果对比如图 6 所示，两者基本一致。因此，采用 Haider-Levenspiel 圆球颗粒拖曳力系数模型，确定系数  $A = 0.1806$ ， $B = 0.6459$ ， $C = 0.4251$ ， $D = 6880.95$ ，公式为

$$C_{D,S} = \frac{24}{Re} (1 + 0.1806 Re^{0.6459}) + \frac{0.4251}{1 + 6880.95 / Re} \tag{18}$$

在 Dioguardi-Mele 模型中， $\alpha$  按下式取值：

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= Re^{-0.23} \quad (Re \leq 50) \\ \alpha &= Re^{0.05} \quad (Re > 50) \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

其局部雷诺数如图 9 所示，可以看出  $\alpha$  随雷诺数增大先减小后增大，在  $Re=50$  时处存在明显的阶跃不连续性，不符合图 8 中钙质砂形状系数对拖曳力系数的影响随雷诺数的增大而连续增大的规律。

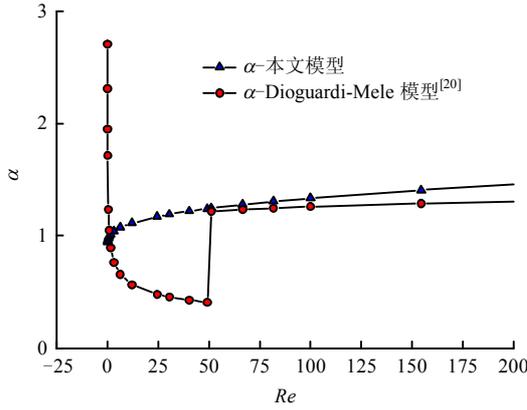


图 9 两模型  $\alpha$  随  $Re$  (局部) 变化趋势图

Fig.9 Variation of  $\alpha$  with  $Re$  (specific range) of two models

依据图 8，利用式 (14) 的假定，即在一定雷诺数条件下， $C_D \Phi^\alpha$  为定值，在双对数坐标下绘制  $\lg C_D - \lg \Phi$  散点图，拟合直线斜率的相反数即为  $\alpha$  值，再通过变化  $Re$  值，得到不同雷诺数条件下对应的  $\alpha$  值。根据  $\alpha$  随  $Re$  的变化趋势，本文采用复合指数形式来拟合二者关系，此时式 (15) 具体化为

$$\alpha = (Re^{0.028}) Re^{0.175} \quad (20)$$

$\alpha$  取值如图 9 所示，随  $Re$  单调增加，符合图 8 所反映的规律。

得到  $\alpha$  与  $Re$  关系后，根据式 (17) 的关系，以  $C_D / (C_{D,S} \cdot Re^2 \Phi^\alpha)$  为横坐标， $Re$  为纵坐标，在双对数坐标下绘制试验数据点，采用最小二乘法对二者关系进行拟合，拟合曲线如图 10 所示，建立方程为

$$Re = 1.228 0 [C_D / (C_{D,S} \cdot Re^2 \Phi^\alpha)]^{0.500 5} \quad (21)$$

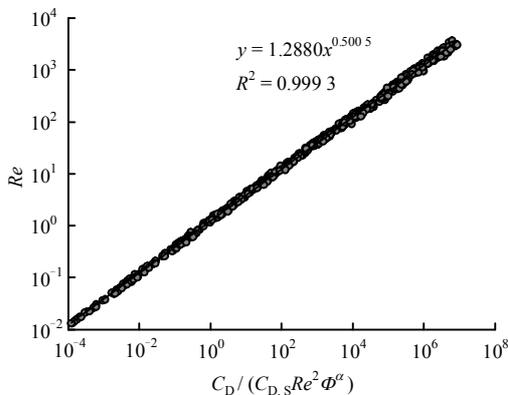


图 10 钙质砂颗粒拖曳力系数拟合曲线 (包含  $C_D$ 、 $Re$  及  $\Phi$  的)

Fig.10 Fitting curve of drag force coefficient for calcareous sand particles ( $C_D$ ,  $Re$  and  $\Phi$  involved)

提取  $C_D$  建立钙质砂颗粒在液体中沉降的拖曳

力系数经验模型：

$$C_D = 0.663 4 \frac{C_{D,S}}{\Phi^\alpha \cdot Re^{0.002 0}} \quad (22)$$

式中： $C_{D,S}$  和  $\alpha$  分别按式 (18)、(20) 取值。

#### 4.2 模型对比分析

为了验证本文模型对钙质砂的适用性和精确性，将本文所建立的拖曳力系数模型与其他两个拖曳力系数模型进行对比，分别为 Dioguardi-Mele 模型<sup>[20]</sup>及 Swamee-Ojha<sup>[23]</sup>模型，形式分别如式 (16) 及下式所示：

$$C_D = \left\{ \frac{48.5}{(1 + 4.5\beta^{0.35})^{0.8} Re^{0.64}} + \left[ \left( \frac{Re}{Re + 100 + 1\,000\beta} \right)^{0.32} \frac{1}{\beta^{18} + 1.05\beta^{0.8}} \right] \right\}^{1.25} \quad (23)$$

式中： $\beta$  为形状系数，可表示为

$$\beta = \frac{s}{\sqrt{lm}} \quad (24)$$

式中： $l$ 、 $m$ 、 $s$  与本文定义一致，分别为椭球体长轴、中轴和短轴的长度。

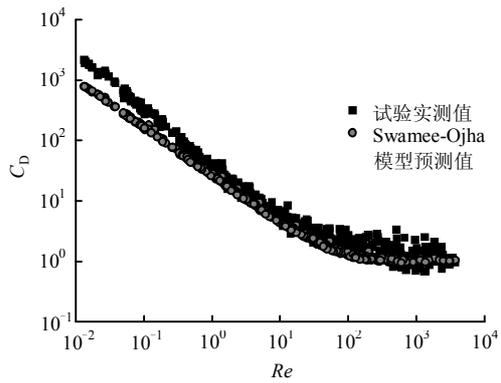
在某一雷诺数条件下，由式 (16)、(22)、(23) 分别计算出各模型预测的拖曳力系数  $C_{D,P}$ ，如图 11 所示，图 11(a)~(c) 表示在双对数坐标下 3 个模型预测的拖曳力系数随雷诺数  $Re$  变化与实测结果对比情况，比较可见 Swamee-Ojha 模型  $C_D$  预测值整体相比于试验实测值偏低，而 Dioguardi-Mele 模型则恰好相反，预测值整体偏高，本文模型整体预测趋势较好。图 11(d) 是以实测  $C_D$  为横坐标，以各模型预测值  $C_{D,P}$  为纵坐标拟合的 3 条直线。直线斜率越接近 1，拟合度越高，则表明模型整体预测精度越高。3 个模型拟合结果比较可知，无论是直线斜率接近 1 的程度，还是拟合的优度，本文模型都明显高于其他两个模型，这也体现了本文模型对  $C_D$  的预测具有更高的精度。现以拖曳力系数预测平均相对误差  $\overline{E_d}$  和均方根误差  $RMS$  两个指标定量地描述各模型对  $C_D$  的预测精度，定义式分别为

$$\overline{E_d} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{C_{D,P} - C_D}{C_D} \right|}{n} \times 100\% \quad (25)$$

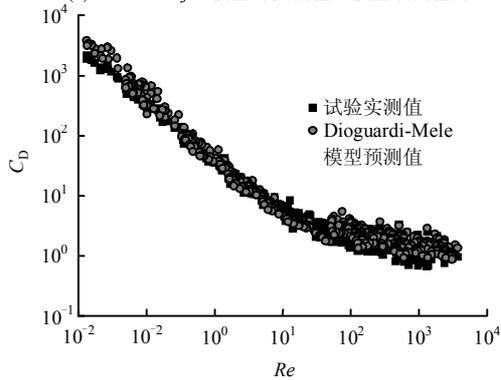
$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\lg C_{D,P} - \lg C_D)^2}{n}} \quad (26)$$

式中： $n$  为试验总组数 521 次，在此标准下各模型  $\overline{E_d}$

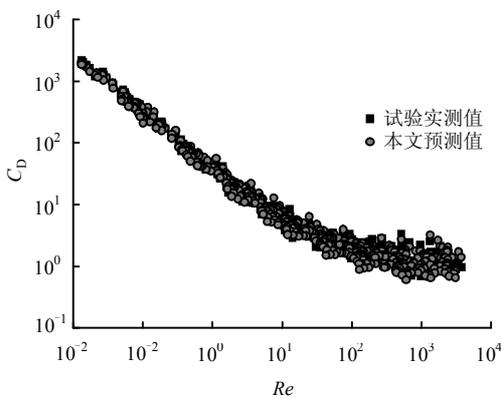
及  $RMS$  值如表 3 所示。



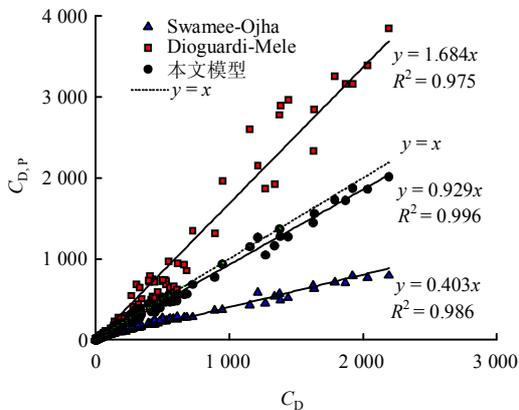
(a) Swamee-Ojha 模型与实测值、模型预测值对比



(b) Dioguardi-Mele 模型与实测值、模型预测值对比



(c) 实测值与本文预测值对比



(d) 3 种模型对比

图 11 3 个模型  $C_D$  值预测对比

Fig.11 Predictions of  $C_D$  of calcareous sands using three models

表 3 3 个模型  $C_D$  预测误差表

Table 3 Error of prediction of  $C_D$  by three models

| $\overline{E_d} / \%$ |                   |      | $RMS$          |                   |         |
|-----------------------|-------------------|------|----------------|-------------------|---------|
| Swamee-Ojha 模型        | Dioguardi-Mele 模型 | 本文   | Swamee-Ojha 模型 | Dioguardi-Mele 模型 | 本文      |
| 27.3                  | 25.0              | 14.5 | 0.181 8        | 0.119 7           | 0.077 5 |

从表 3 中可以看出, 本文模型对  $C_D$  的预测整体相对误差  $\overline{E_d}$  和均方根误差  $RMS$  都低于其他两个模型, 说明本文拟合的拖曳力系数模型在预测钙质砂这种天然不规则形状颗粒材料在液体中沉降特性时具有更高的精度和稳定性。由于每种材料形状的复杂程度不同, 表面起伏程度不同, 会导致其拖曳力系数模型有所差异。虽然本文拟合的模型在预测精度上已经达到满意的效果, 但在将来的研究中, 有必要进一步考虑钙质砂颗粒表面微孔隙对液体拖曳力系数的影响。

除了对拖曳力系数预测外, 对颗粒在液体中沉降平衡速度的预测也是体现模型精确性的一个重要方面, 下面考察本文模型对颗粒沉降平衡速度的预测能力。由式 (9) 变换可得颗粒沉降平衡速度  $U_t$ :

$$U_t = \sqrt{\frac{4gd_p(\rho_p - \rho)}{3\rho C_D}} \quad (27)$$

在某一雷诺数条件下, 首先根据式 (16)、(22)、(23) 得到钙质砂颗粒拖曳力系数后, 再由式 (27) 分别计算出 3 个模型预测的颗粒沉降平衡速度, 定义单个颗粒平衡速度测量相对误差  $E_u$  为

$$E_u = \frac{U_{t,p} - U_{t,m}}{U_{t,m}} \times 100\% \quad (28)$$

式中:  $U_{t,m}$  为试验实测颗粒平衡速度;  $U_{t,p}$  为各模型预测值。

各颗粒  $E_u$  随雷诺数变化如图 12 所示。图中可见, Swamee-Ojha 模型预测误差相较其他两种模型明显偏大; Dioguardi-Mele 模型预测误差虽有所降低, 但离散性稍大; 本文模型预测误差最低, 且离散性较小, 精度最高。

除了颗粒形状不规则外, 钙质砂表面微孔隙发育, 其对拖曳力系数也有一定的影响。为进一步探究钙质砂表面微孔隙对拖曳力系数的影响, 本研究将具有相同形状系数、表面光滑的颗粒与钙质砂颗粒进行对比。试验中, 针对两种形状系数  $\Phi=0.36$  和  $\Phi=0.67$  颗粒, 在测得其沉降平衡速度后, 利用式 (2)、(9) 可分别求得  $Re$  和  $C_D$ 。Pettyjohn<sup>[24]</sup>、Willmarch<sup>[25]</sup> 等对  $\Phi=0.36$  和  $\Phi=0.67$  的表面光滑颗

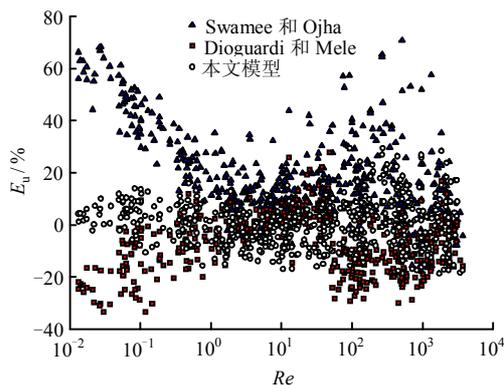


图 12 3 个模型  $U_i$  预测误差对比图  
Fig.12 Error of predicted  $U_i$  of calcareous sands using the three models

粒进行沉降试验，获得其沉降平衡速度后同样采用式 (2)、(9) 计算出  $Re$  和  $C_D$ ，其结果与钙质砂颗粒对比见图 13。通过比较发现，在低雷诺数区域，颗粒表面微孔隙对拖曳力系数影响较小；随着雷诺数增大，钙质砂与表面光滑颗粒的拖曳力系数逐渐分离，表面光滑颗粒具有更高的拖曳力系数，这是由于在高雷诺区颗粒下降时上部逐渐形成尾涡。随着速度增大，尾涡区域不断变大，上、下两侧产生的压差阻力增大，导致拖曳力增大。而钙质砂独特的表面微孔隙凹凸构造会延缓边界层的剥离<sup>[26]</sup>，从而减小负压区范围，表现出的拖曳力系数较小的结果。本文未对钙质砂表面微孔隙进行定量的描述，但在以后的研究中，有必要针对钙质砂颗粒表面微孔隙对拖曳力系数的影响进行定量分析。

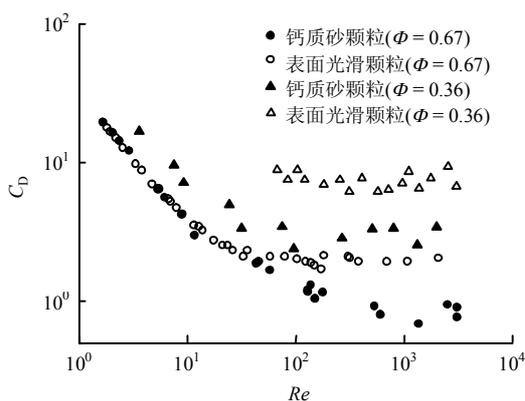


图 13 钙质砂与表面光滑材料拖曳力系数对比图  
Fig.13 Comparison of drag force coefficient between calcareous sand particle and materials with smooth surface

## 5 结 论

(1) 钙质砂颗粒形状极不规则，主要可分为片状、长条状及椭球状 3 种类型。本次试验定义形状系数  $\Phi$  对颗粒形状进行了定量描述，该形状系数既

考虑了颗粒整体偏离圆球形的程度，同时也能表征颗粒表面起伏形态，因此能够有效描述钙质砂这种形状复杂的天然岩土材料外形特征。

(2) 试验通过调配液体的组分改变黏滞系数和密度，获取较广泛范围的雷诺数区间。分析获得颗粒沉降平衡速度，拟合了包含  $C_D$ 、 $Re$  及  $\Phi$  3 个参数在内的拖曳力系数预测模型，发现在相同雷诺数条件下，钙质砂的拖曳力系数随形状系数降低而升高，且随着雷诺数的增加，这种升高的幅度逐渐增大。

(3) 经与其他两个针对不规则颗粒的拖曳力系数模型进行对比分析发现，在本研究所涉及的雷诺数区间上，本文模型在拖曳力系数预测精度上较其他两个模型有所提高，说明该模型对钙质砂这种天然不规则岩土材料具有更高的适用性。本文还针对钙质砂表面微孔隙对液体拖曳力系数的影响进行了定性分析，在以后的工作中有必要针对钙质砂颗粒表面微孔隙进行定量研究。

(4) 目前本文建立了钙质砂单个颗粒的拖曳力系数模型，该模型能够考虑不规则颗粒形状对拖曳力系数的影响，进而提高对土体渗透性预测的精度，对南海岛礁填筑工程中钙质砂固结和沉降的计算也具有重要意义。

## 参 考 文 献

- [1] 刘崇权, 杨志强, 汪稔. 钙质土力学性质研究现状与进展[J]. 岩土力学, 1995, 16(4): 74-84.  
LIU Chong-quan, YANG Zhi-qiang, WANG Ren. The present condition and development in studies of mechanical properties of calcareous soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1995, 16(4): 74-84.
- [2] 刘崇权, 汪稔. 钙质砂物理力学性质初探[J]. 岩土力学, 1998, 19(1): 32-37.  
LIU Chong-quan, WANG Ren. Preliminary research on physical and mechanical properties of calcareous sand[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1998, 19(1): 32-37.
- [3] 沈建华, 汪稔. 钙质砂的工程性质研究进展与展望[J]. 工程地质学报, 2010, 18(增刊): 26-32.  
SHEN Jian-hua, WANG Ren. Study on engineering properties of calcareous sand[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2010, 18(Supp.): 26-32.
- [4] YE J, JENG D S, CHAN A H C, et al. 3D Integrated numerical model for fluid-structures-seabed interaction: elastic dense seabed foundation[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2016, 92: 239-252.
- [5] 陈海洋, 汪稔, 李建国, 等. 钙质砂颗粒的形状分析[J].

- 岩土力学, 2005, 26(9): 1389—1392.
- CHEN Hai-yang, WANG Ren, LI Jian-guo, et al. Grain shape analysis of calcareous soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(9): 1389—1392.
- [6] 朱长歧, 陈海洋, 孟庆山, 等. 钙质砂颗粒内孔隙的结构特征分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(7): 1831—1836.
- ZHU Chang-qi, CHEN Hai-yang, MENG Qing-shan, et al. Microscopic characterization of intra-pore structures of calcareous sands[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(7): 1831—1836.
- [7] 刘崇权, 汪稔. 颗粒破碎对钙质土力学特性的影响[J]. 岩土力学, 2002, 23(增刊 1): 13—16.
- LIU Chong-quan, WANG Ren. Influences of particle crushing on mechanical properties of calcareous[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(Supp.1): 13—16.
- [8] 秦月, 姚婷, 汪稔, 等. 基于颗粒破碎的钙质沉积物高压固结变形分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(11): 3123—3128.
- QIN Yue, YAO Ting, WANG Ren, et al. Particle breakage-based analysis of deformation law of calcareous sediments under high-pressure consolidation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(11): 3123—3128.
- [9] 任玉宾, 王胤, 杨庆. 颗粒级配与形状对钙质砂渗透性的影响[J]. 岩土力学, 2018, 39(2): 491—497.
- REN Yu-bin, WANG Yin, YANG Qing. Experimental study on the effects of the particle size distribution and shape on permeability of the calcareous sand[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(2): 491—497.
- [10] HAIDER A, LEVENSPIEL O. Drag coefficient and terminal velocity of spherical and nonspherical particles[J]. **Powder Technology**, 1989, 58(1): 63—70.
- [11] GANSER G H. A rational approach to drag prediction of spherical and nonspherical particles[J]. **Powder Technology**, 1993, 77(2): 143—152.
- [12] CHHABRA R P, AGARWAL L, SINHA N K. Drag on non-spherical particles: an evaluation of available methods[J]. **Powder Technology**, 1999, 101(3): 288—295.
- [13] LOTH E. Drag of non-spherical solid particles of regular and irregular shape[J]. **Powder Technology**, 2008, 182(3): 342—353.
- [14] HÖLZER A, SOMMERFELD M. New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles[J]. **Powder Technology**, 2008, 184(3): 361—365.
- [15] DELLINO P, MELE D, BONASIA R, et al. The analysis of the influence of pumice shape on its terminal velocity[J]. **Geophysical Research Letters**, 2005, 32(21): 67—82.
- [16] WADELL HAKON. Volume, shape, and roundness of rock particles[J]. **The Journal of Geology**, 1932, 40(5): 443—451.
- [17] 南京水利科学研究所. SL237—1999 土工试验规程[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999.
- Nanjing Hydraulic Research Institute. SL237—1999 Standards for soil mechanics tests[S]. Beijing: China Water & Power Press, 1999.
- [18] 童祐嵩. 颗粒粒度与比表面测量原理[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1989.
- TONG Hu-song. Measurement principles of grading and specific surface area of particles[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Literature Press, 1989.
- [19] 吴望一. 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2014.
- WU Wang-yi. Fluid mechanics[M]. Beijing: Peking University Press, 2014.
- [20] DIOGUARDI F, MELE D. A new shape dependent drag correlation formula for non-spherical rough particles experiments and results[J]. **Powder Technology**, 2015, 277(3): 222—230.
- [21] CLIFT R, GRACE J R, WEBER M E. Bubbles, drops, and particles[M]. New York: Academic Press, 1978.
- [22] FLEMMER R L C, BANKS C L. On the drag coefficient of a sphere[J]. **Powder Technology**, 1986, 48(3): 217—221.
- [23] SWAMEE P K, OJHA C S P. Drag coefficient and fall velocity of nonspherical particles[J]. **Journal of Hydraulic Engineering, ASCE**, 1991, 117(5): 660—667.
- [24] PETTYJOHN E S, CHRISTIANSEN E B. Effect of particle shape on free-settling rates of isometric particles[J]. **Chemical Engineering Progress**, 1948, 44: 157—172.
- [25] WILLMARTH W W, HAWK N E, HARVEY R L. Steady and unsteady motions and wakes of freely falling disks[J]. **Physics of Fluids**, 1964, 7(2): 197—208.
- [26] 任露泉, 张成春, 田丽梅. 仿生非光滑用于旋成体减阻的试验研究[J]. 吉林大学学报(工学版), 2005, 35(4): 431—436.
- REN Lu-quan, ZHANG Cheng-chun, TIAN Li-mei. Experimental study on drag reduction for bodies of revolution using Bionic non-smoothness[J]. **Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)**, 2005, 35(4): 431—436.