DOI：10.16285/j.rsm.2016.2971

基于薄层法和移动坐标系法的地铁竖向振动在成层土层中传播

包汉营，陈文化，张 谦

（北京交通大学 土木建筑工程学院，北京 100044）

摘 要：针对地铁竖向振动在成层地基中的传播，提出了移动荷载作用下层状地基的分析模型。基于该模型，利用狄拉克函数及三重傅里叶变换将时空域内单个移动简谐荷载转换为频率-波数域内的荷载，结合薄层法和移动坐标系法推导了单个移动简谐荷载和移动简谐线荷载作用下三维层状地基动力响应的解析解，并给出了移动简谐线荷载动力响应解析解中参数 n 的经验取值范围；分析了荷载的移动速度对层状地基动力响应的影响以及弹性模量、泊松比、阻尼比和荷载频率对土体临界速度的影响。结果表明：荷载的移动速度对不同频带的动力响应的影响范围不同；移动速度对低频响应的影响程度大于对高频响应的影响程度；相比于泊松比和阻尼比，弹性模量对土体临界速度的影响最大；频率越接近荷载振动频率的振动响应，其幅值越大，临界速度越小。

关 键 词：地铁振动；移动荷载；成层土层；临界速度；薄层法；移动坐标系法

中图分类号：TU 435 **文献识别码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 09－3277－08

Propagation of subway vertical vibration in layered soils based on thin layer method and moving coordinate system method

BAO Han-ying, CHEN Wen-hua, ZHANG Qian

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: To investigate the propagation of subway vertical vibration in layered soil, an analysis model of layered foundation under a moving load is proposed. The Dirac function and the triplex Fourier transform are used to transform a moving harmonic load in time-space domain to a load in frequency-wavenumber domain based on the analysis model. The analytical solutions of the dynamic response of 3D layered foundation under a moving harmonic load and a moving line harmonic load are deduced by using the thin layer method and the moving coordinate system method. The range of the parameter n in the analytical solution of a moving line harmonic load is given. The influence of load speed on the dynamic response of 3D layered foundation, and the influence of the elastic modulus, Poisson's ratio, damping ratio and load frequency on the critical speed of soil are analyzed. The results show that the influence scope of the load speed on the dynamic response of different frequency bands is different. The influence of moving speed on the low frequency response is greater than that of the high frequency response, and the elastic modulus has the greatest influence on critical speed of soil compared with Poisson's ratio and damping ratio. The dynamic response amplitude will increase and the critical speed will decrease when the frequency of the dynamic response is close to the load frequency.

Keywords: metro vibration; moving load; layered soil; critical speed; thin layer method; moving coordinate system method

1 引 言

随着地下轨道交通的迅速发展，其引发的环境振动问题也越来越突出，针对这一问题，国内外学者做了大量的研究。Eason[1]利用 Fourier 变换先后研究了表面移动点、圆形及矩形分布荷载作用下的

收稿日期：2016-12-24
基金项目：中央高校基本科研业务费专项资金资助（No.C17JB00300，No.2017YJS122）；国家自然科学基金项目（No.51178035）。
This work was supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (C17JB00300, 2017YJS122) and the National Natural Science Foundation of China (51178035).
第一作者简介：包汉营，男，1988 年生，博士研究生，主要从事岩土动力学的研究工作。E-mail: baohanying.happy@163.com
通讯作者：陈文化，男，1967 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事岩土动力学的研究工作。E-mail: whchen@bjtu.edu.cn

弹性地基的动力响应问题；Gakenheimer 等[2]研究了移动集中荷载作用下弹性半空间体瞬态响应的问题，并给出了相应的解析解；Dieterman 等[3]在荷载频率函数中考虑了临界速度以及土层厚度的影响，研究了移动集中荷载作用下单层土的动力响应问题；Jones 等[4]模拟了移动简谐点荷载作用下轨道-地基体系的动力响应，分析了荷载速度、频率等对地面响应的影响；Hung 等[5]利用 2.5 维有限元-无限元方法研究了地下轨道交通引起的地基动力响应问题。袁宗浩等[6]采用解析法建立了饱和土全空间中圆形衬砌隧道和轨道结构耦合分析模型，研究了地铁列车荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧道和轨道系统动力响应。胡安峰等[7]在平面应变条件下研究了下卧基岩饱和地基在移动线荷载作用下的动力响应问题。徐斌等[8]采用 TRM 方法研究了移动荷载作用下二维层状土动力响应问题，虽然考虑了地基土的分层特性，但仍然是在二维条件下进行的分析求解。张谦等[9]按照波函数展开法和镜像原理等推导了地铁列车轴向激励作用下出平面波的振动响应的解析解。司理涛等[10]利用虚拟激励法将系统的随机分析转化为确定性分析，研究了列车荷载作用下黏弹性半空间体的随机动力响应等问题。叶俊能[11]将列车荷载简化为简谐移动荷载，通过构建列车荷载-轨道系统-饱和地基模型研究了双层横观各向同性饱和地基的动力响应。周晔等[12]通过构造轨道、道碴、枕木及弹性层的横观各向同性饱和地基在列车荷载下的动力计算模型，得到了列车荷载作用下横观各向同性软土地基上弹性层动力响应的解析结果。巴振宁等[13]采用格林函数等方法分析了表面移动简谐荷载作用下层状地基-轨道耦合的动力响应问题。

本文针对地铁竖向振动在成层土中的传播，将三维土体分成多层，利用薄层法及 δ 函数推导了竖向单个移动简谐荷载作用下三维层状地基动力响应的解析解；将移动线荷载转化为 n 个移动点荷载，结合移动坐标系法推导了移动简谐线荷载作用下层状地基的解析解。通过对比由单个移动简谐荷载的解析解与分层法[14]得到的计算结果，证明了所推导公式的正确性和适用性。通过算例分析，得到了移动简谐线荷载解析解中参数 n 的经验取值范围，并分析了移动速度对地基土动力响应的影响以及弹性模量、泊松比、阻尼比和荷载频率对土体临界速度的影响。

2 基于薄层法的三维层状地铁地基振动模型及理论

2.1 动力分析模型

天然土体由于自然的沉积作用，一般为分层介质，对于地铁列车引起的层状地基动力响应问题，本文采用图 1 的动力分析模型。

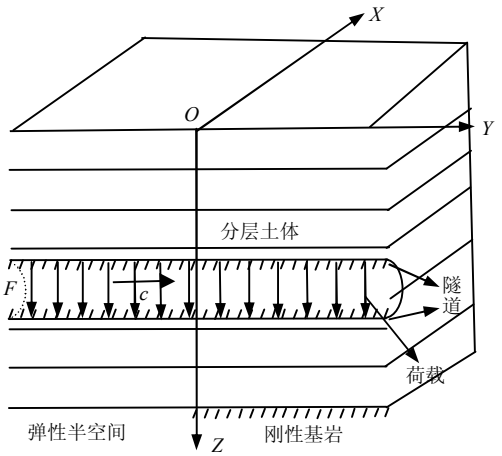


图 1 分析模型
Fig.1 Analysis model

2.2 三维分层土体中地铁振动理论[15-16]

对于图 1 中所示的三维层状半空间模型，将其沿竖直方向进行离散，利用伽辽金法进行求解。

（1）用水平节面沿地基深度方向将其分割成水平薄层，薄层单元的厚度可根据求解精度要求进行细化，各薄层单元假定为均匀弹性介质。

（2）将各薄层节面由地面开始按1, 2, 3, ……, N 进行编号，每个薄层单元的编号与其上表面编号相同。

（3）对于最下层的边界条件，可参考文献[15]的相关研究。

设单元内在厚度方向上的位移呈线性分布，由伽辽金残值法可得层单元的求解方程如下[16]：

$$\left(\kappa^2\begin{bmatrix}[A_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}} & 0\\ 0 & [A_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}0 & [B]_l^{\mathrm{e}}\\ ([B]_l^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[E_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}} & 0\\ 0 & [E_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{u_1\}_l^{\mathrm{e}}\\ \{u_3\}_l^{\mathrm{e}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{\sigma_1\}_l^{\mathrm{e}}\\ \{\sigma_3\}_l^{\mathrm{e}}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$(\kappa^2[A_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}+[G_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}-\omega^2[M]_l^{\mathrm{e}})\{u_2\}_l^{\mathrm{e}}=\{\sigma_2\}_l^{\mathrm{e}} \tag{2}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}
&\{\sigma_i\}_l^{\mathrm{e}}=\begin{Bmatrix}\sigma_i^l\\ \sigma_i^{l+1}\end{Bmatrix},\{u_i\}_l^{\mathrm{e}}=\begin{Bmatrix}u_i^l\\ u_i^{l+1}\end{Bmatrix},(i=1,2,3;l=1,2\cdots\cdots N)\\
&[A_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}=\frac{GH}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},[G_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}=\frac{G}{H}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\\
&[M]_l^{\mathrm{e}}=\frac{\rho H}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},[A_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}=\frac{(\lambda+2G)H}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\\
&[G_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}=\frac{\lambda+2G}{H}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},[B]_l^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\dfrac{-\lambda+G}{2}&\dfrac{\lambda+G}{2}\\-\dfrac{\lambda+G}{2}&\dfrac{\lambda-G}{2}\end{bmatrix}\\
&[E_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}=[G_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}-\omega^2[M]_l^{\mathrm{e}},[E_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}=[G_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}-\omega^2[M]_l^{\mathrm{e}}\\
&\kappa^2=\kappa_x^2+\kappa_y^2
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中：κ_x、κ_y 分别为 x、y 方向的波数；λ、G 为拉梅常数，可通过引入复拉梅常数考虑土体阻尼比的影响，即 $\lambda^*=\lambda(1+\mathrm{i}\xi)$，$G^*=G(1+\mathrm{i}\xi)$，$\xi$ 为土体的阻尼比；ρ 为土层密度；H 为土层厚度；ω 为角频率；$\{u_i\}_l^{\mathrm{e}}$、$\{\sigma_i\}_l^{\mathrm{e}}(i=1,2,3)$ 分别为层单元在频率–波数域内 3 个不同方向上的位移和应力向量；σ_i^l、u_i^l 表示第 l 节面处的应力和位移。

将各层单元矩阵集总，可得总的层状地基体系的求解方程为

$$\left(\kappa^2\begin{bmatrix}[A_{\mathrm{p}}]&0\\0&[A_{\mathrm{s}}]\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}0&-[B]^{\mathrm{T}}\\-[B]&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[E_{\mathrm{s}}]&0\\0&[E_{\mathrm{p}}]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{u_1\}\\\{u_3\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{\sigma_1\}\\\{\sigma_3\}\end{Bmatrix}\tag{4}$$

$$(\kappa^2[A_{\mathrm{s}}]+[E_{\mathrm{s}}])\{u_2\}=\{\sigma_2\}\tag{5}$$

式中：$[A_{\mathrm{p}}]$、$[A_{\mathrm{s}}]$、$[B]$、$[E_{\mathrm{p}}]$、$[E_{\mathrm{s}}]$为体系的整体矩阵，分别由单元矩阵$[A_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}$、$[A_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}$、$[B]_l^{\mathrm{e}}$、$[E_{\mathrm{p}}]_l^{\mathrm{e}}$、$[E_{\mathrm{s}}]_l^{\mathrm{e}}$集总后得到；$\{u_1\}$、$\{u_2\}$、$\{u_3\}$、$\{\sigma_1\}$、$\{\sigma_2\}$、$\{\sigma_3\}$ 分别为3个不同方向上的整体位移向量和整体应力向量，由单元位移向量$\{u_1\}_l^{\mathrm{e}}$、$\{u_2\}_l^{\mathrm{e}}$、$\{u_3\}_l^{\mathrm{e}}$和单元应力向量$\{\sigma_1\}_l^{\mathrm{e}}$、$\{\sigma_2\}_l^{\mathrm{e}}$、$\{\sigma_3\}_l^{\mathrm{e}}$集总后得到。

利用振型叠加法求解式（4）、（5）。式（4）用广义坐标可表示为

$$\{\{u_1\}\ \ \{u_3\}\ \ \kappa\{u_1\}\ \ \kappa\{u_3\}\}^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{2N}\begin{Bmatrix}\{X_k\}\\\{Z_k\}\\\kappa_{\alpha k}\{X_k\}\\\kappa_{\alpha k}\{Z_k\}\end{Bmatrix}q_{\alpha k}+\sum_{k=1}^{2N}\begin{Bmatrix}\{X_k\}\\-\{Z_k\}\\-\kappa_{\alpha k}\{X_k\}\\\kappa_{\alpha k}\{Z_k\}\end{Bmatrix}q'_{\alpha k}\tag{6}$$

式中：$\kappa_{\alpha k}$为特征值；$\{\{X_k\}\{Z_k\}\}^{\mathrm{T}}$、$\{Y_k\}$为特征向量；$q_{\alpha k}$、$q'_{\alpha k}$为广义坐标。

式（5）用广义坐标可表示为

$$\{u_2\}=\sum_{k=1}^{N}\{Y_k\}q_{\beta k}\tag{7}$$

式中：$\{Y_k\}$为特征向量；$q_{\beta k}$为广义坐标。

3　移动荷载作用下层状地基动力响应解析

3.1　任意节面处竖向单个移动简谐荷载作用下三维层状地基动力响应的解析解[16]

以竖向移动简谐激振荷载为例。假设$t=0$ 时刻，分层土中只有第 S 层节面(S=1,2,3……N)上作用激振力$F_z\delta(y-ct)\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，其中$F_z$为荷载幅值，$\omega_0$为振动角频率，荷载作用方向竖直向下，起始位置为原点，以速度 c 沿 y 轴正方向移动。对该激振力做如下三重傅里叶变换：

$$\begin{aligned}
&P_{zs}(\kappa_x,\kappa_y,\omega)=\\
&\iiint_{-\infty}^{\infty}F_z\delta(y-ct)\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa_y y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\\
&2\pi F_z\delta(\omega-\kappa_y c-\omega_0)
\end{aligned}\tag{8}$$

则体系的荷载在频率–波数域中可表示为$[P_x]=[0]$，$[P_y]=[0]$，$[P_z]=[0\cdots P_{zs}\cdots 0]^{\mathrm{T}}$，其中：$[P_x]$、$[P_y]$、$[P_z]$分别为频率–波数域中总体荷载向量；$P_{zs}$表示频率–波数域中第 S 层节面处荷载值。

将$[P_x]$、$[P_y]$、$[P_z]$进行如下正交变换：

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma_1\}\\\{\sigma_2\}\\\{\sigma_3\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{[\kappa]}\begin{bmatrix}[\kappa_x]&[\kappa_y]&0\\[\kappa_y]&-[\kappa_x]&0\\0&0&i[\kappa]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[P_x]\\[P_y]\\[P_z]\end{Bmatrix}\tag{9}$$

式中：$[\kappa_x]=\mathrm{diag}(\kappa_x)$，$[\kappa_y]=\mathrm{diag}(\kappa_y)$，$[\kappa]=\mathrm{diag}(\kappa)$。

可得：$\{\sigma_1\}=\{0\}$，$\{\sigma_2\}=\{0\}$，$\{\sigma_3\}=\mathrm{i}[P_z]$。

只有$\{\sigma_3\}$作用时，式（6）中的广义坐标为

$$\left.\begin{aligned}
q_{\alpha k}&=\frac{\{z_k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_3\}}{D_{k\alpha}}\cdot\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa-\kappa_{\alpha k}}\\
q'_{\alpha k}&=\frac{\{z_k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_3\}}{D_{k\alpha}}\cdot\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa+\kappa_{\alpha k}}
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{k\alpha}=&\kappa_{\alpha k}^2\{X_k\}^{\mathrm{T}}[A_{\mathrm{p}}]\{X_k\}+\kappa_{\alpha k}^2\{Z_k\}^{\mathrm{T}}[A_{\mathrm{s}}]\{Z_k\}\\
&-\{X_k\}^{\mathrm{T}}[E_{\mathrm{s}}]\{X_k\}-\{Z_k\}^{\mathrm{T}}[E_{\mathrm{p}}]\{Z_k\}
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

代入式（6）可得

$$\{u_1\}=\sum_{k=1}^{2N}\{X_k\}(\{Z_k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_3\})\frac{1}{D_{k\alpha}}\left(\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa-\kappa_{\alpha k}}+\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa+\kappa_{\alpha k}}\right)\tag{12}$$

$\{u_3\}=$

$$\sum_{k=1}^{2N}\{Z_k\}(\{Z_k\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_3\})\frac{1}{D_{k\alpha}}\left(\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa-\kappa_{\alpha k}}-\frac{\kappa_{\alpha k}}{\kappa+\kappa_{\alpha k}}\right) \quad (13)$$

本文只对竖向位移进行研究，对$\{u_3\}$中的κ_x、κ_y做傅里叶逆变换，可得到频域内任意 R 节面(R=1,2,3……N)处的竖向位移为

$$\{\tilde{w}\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a y}\sum_{k=1}^{2N}\frac{Z_{Rk}Z_{Sk}\kappa_{\alpha k}^2\mathrm{e}^{-Q_{\alpha k}|x|}}{D_{k\alpha}Q_{\alpha k}c}P_{zs} \quad (14)$$

式中：$\{\tilde{w}\}$为第 R 节面处点(x,y)在频域内的竖向位移；Z_{Rk}、Z_{Sk}分别为$\{Z_k\}$中第 R 和第 S 个元素的数值；a、$Q_{\alpha k}$分别为

$$a=\frac{\omega-\omega_0}{c},\ Q_{\alpha k}=\sqrt{a^2-\kappa_{\alpha k}^2} \quad (15)$$

式（14）即为分层土中任意 S 节面处竖向单个移动简谐荷载作用下三维层状地基在任意 R 节面内任意一点处竖向位移响应在频域内的解析解。

3.2 任意节面处竖向移动简谐线荷载作用下三维层状地基动力响应的解析解

假设荷载沿 Y 轴移动，待求点的起始坐标为(x_0,y_0,z_0)，将移动线荷载简化为多个移动点荷载。从第 1 个简化荷载开始，将其起始位置视为原点，此时待求点坐标为(x_0,y_0-y_1,z_0)，利用式（14）得到相应的位移响应；同理，当第 m 个简化荷载作用时，将其起始位置视为原点，此时待求点的坐标为(x_0,y_0-y_m,z_0)，由式（14）可得到相应的位移响应，直到最后一个简化荷载作用时，得到其相应的待求点的位移，将以上各位移值叠加，最终求得该移动线荷载作用下待求点(x_0,y_0,z_0)的位移响应。

由此可得移动简谐线荷载作用下，任意一点(x_0,y_0,z_0)处位移的解析解可表示为

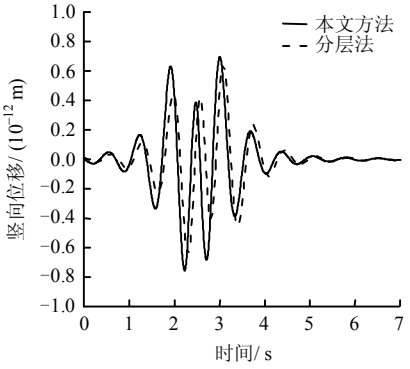
$$\tilde{w}=\sum_{m=1}^{n}P_{zsm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a(y_0-y_m)}\sum_{k=1}^{2N}\frac{Z_{Rk}Z_{Sk}\kappa_{\alpha k}^2\mathrm{e}^{-Q_{\alpha k}|x_0|}}{D_{k\alpha}Q_{\alpha k}c} \quad (16)$$

式中：P_{zsm}为第 m 段线荷载的合力，当 n 达到一定数值后，P_{zsm}的作用位置（从第 m 段线荷载的起点至终点）对结果的影响很小；n 为移动线荷载简化为单个移动荷载的数目；y_m为第 m 个移动简化荷载在原坐标系下的起始 y 坐标值。

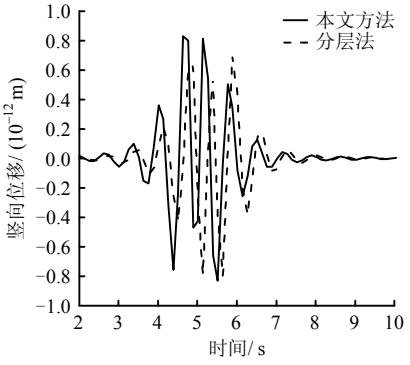
4 算例分析

4.1 竖向单个移动简谐荷载作用下三维层状地基的动力响应

利用式（14）和分层法分析了竖向移动简谐点荷载作用下 3 层弹性土体动力响应的算例。土层参数如下：第 1 层土体厚度为 4 m，弹性模量为 20 MPa，密度为 2 000 kg/m^3，泊松比为 0.3；第 2 层土体厚度为 3 m，弹性模量为 15 MPa，密度为 1 800 kg/m^3，泊松比为 0.35；第 3 层土体厚为 3 m，弹性模量为 20 MPa，密度为 2 000 kg/m^3，泊松比为 0.35，最下层为基岩。移动荷载作用在土体表面，荷载幅值为 1 N，振动频率 $f_0=\omega_0/(2\pi)=5$ Hz，速度 $c=20$ m/s，沿 Y 轴正向移动。图 2(a)、2(b)分别为地基表面控制点(10,50,0)和点（10,100,0）竖向位移的时程曲线。



(a) 点(10, 50, 0)



(b) 点(10, 100, 0)

图 2 竖向位移时程曲线

Fig.2 Time history curves of vertical displacement

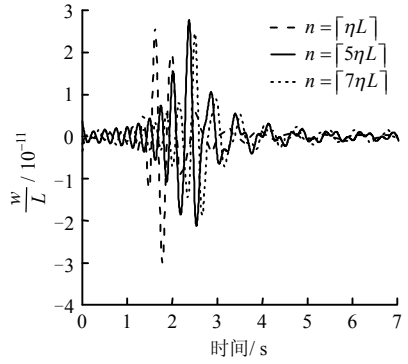
由图 2 可以看出，本文的计算方法和分层法所得到的竖向位移时程曲线能够比较好的吻合，证明了本文所得到的竖向单个移动简谐荷载作用下三维层状地基动力响应解析解的正确性。

4.2 内部竖向移动简谐线荷载作用下三维层状地基的动力响应

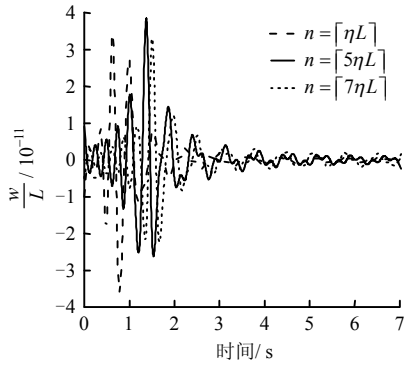
利用式（16）分析了一个内部竖向移动简谐线荷载作用下三维多层地基的动力响应的算例，并给出了式中参数 n 的经验取值范围。土层参数如下：第 1 层土体厚度为 5 m，弹性模量为 10 MPa，密度

为 1 600 kg/m^3，泊松比为 0.3；第 2 层土体厚度为 5 m，弹性模量为 15 MPa，密度为 1 800 kg/m^3，泊松比为 0.35；第 3 层土体厚度为 15 m，弹性模量为 20 MPa，密度为 2 000 kg/m^3，泊松比为 0.35；土体以下为基岩。移动线荷载作用在基岩以上 10 m 处，长度为 L，振动频率 $f_0=\omega_0/(2\pi)=5$ Hz，单位长度幅值为 1 N，速度 $c=20$ m/s，沿 Y 轴正向移动。图 3(a)、3(b)分别为参数 n 取不同数值时，由式（16）得到的地基表面控制点(30,100,0)和点(20,50,0)的 w/L 的时程曲线（w 为控制点在时域内的竖向振动位移）。

由图 3 可以看出：控制点的 w/L 时程曲线的振幅和达到最大振幅的时间，随着参数 n 取值的变化而变化。但当 n 值达到⌈(5～7)ηL⌉时，位移时程曲线已经基本趋于稳定。因此，在利用式（16）计算竖向移动简谐线荷载作用下地基土动力响应时，参数 n 取⌈(5～7)ηL⌉即可满足精度要求。其中⌈⌉表示向上取整，η 为归一化因子。



(a) 点(30, 100, 0)



(b) 点(20, 50, 0)

图 3　参数 n 对移动线荷载动力响应的影响

Fig.3　Influences of parameter n on dynamic response of moving line load

4.3　荷载移动速度对层状地基动力响应的影响

图 4～9 分别为表面控制点(10,10,0)处荷载移动速度对单个移动荷载和移动线荷载作用下三维层状地基频域内动力响应的影响曲线。土体参数同 4.2 节，移动荷载作用在基岩以上 10 m 处，点荷载幅值为 1 N，线荷载长度 $L=5$ m，单位长度幅值为 1 N，沿 Y 轴正向移动，振动频率 $f_0=\omega_0/(2\pi)=5$ Hz，参数 n 取 30。由图 4～9 可以看出：动力响应频率 f 发在 10 Hz 以内时，移动点荷载和移动线荷载的临界速度基本都在 20 m/s 以内；当 f 在 10～20 Hz（不

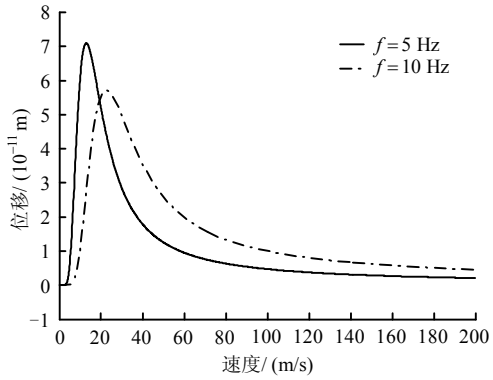
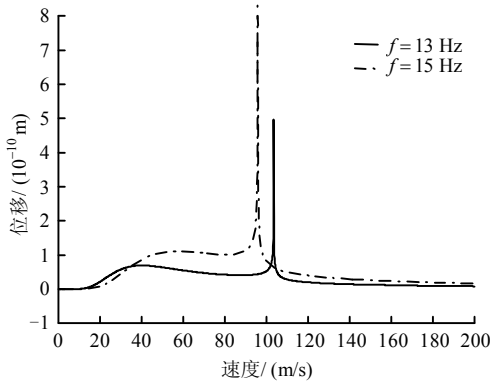
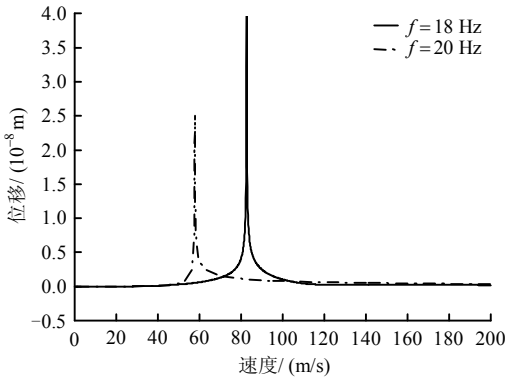


图 4　动力响应频率在 10 Hz 以内时，移动速度对点荷载动力响应的影响

Fig.4　Influence of moving speed on dynamic response of point load when frequency is less than 10 Hz



(a) f 为 13、15 Hz



(b) f 为 18、20 Hz

图 5　动力响应频率在 10～20 Hz 之间时，移动速度对点荷载动力响应的影响

Fig.5　Influences of moving speed on dynamic response of point load when frequency is between 10 Hz and 20 Hz

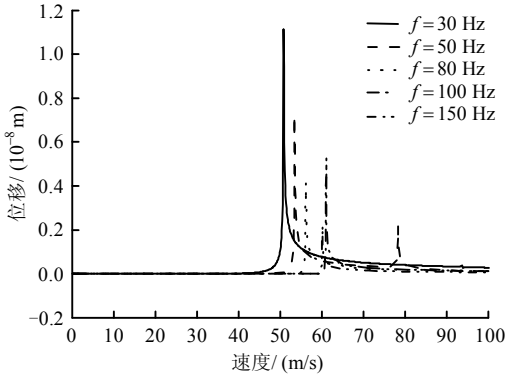


图 6 动力响应频率在 30 Hz 以上时，移动速度对点荷载动力响应的影响

Fig.6 Influence of moving speed on dynamic response of point load when frequency is above 30 Hz

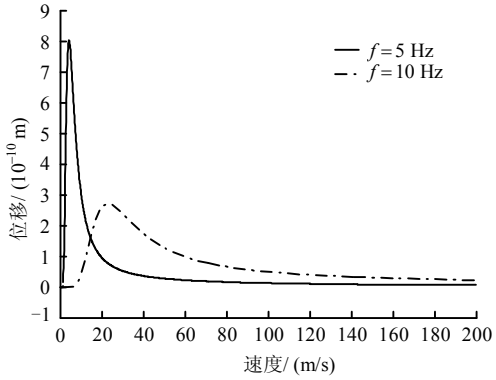


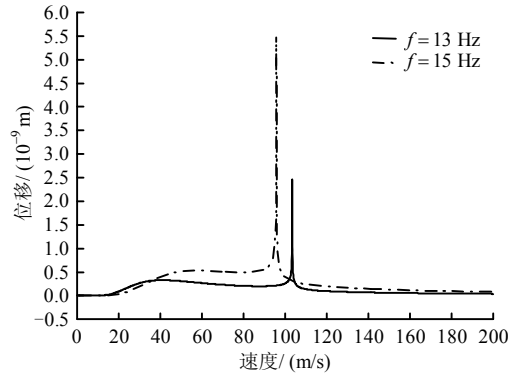
图 7 动力响应频率在 10 Hz 以内时，移动速度对线荷载动力响应的影响

Fig.7 Influence of moving speed on dynamic response of line load when frequency is less than 10 Hz

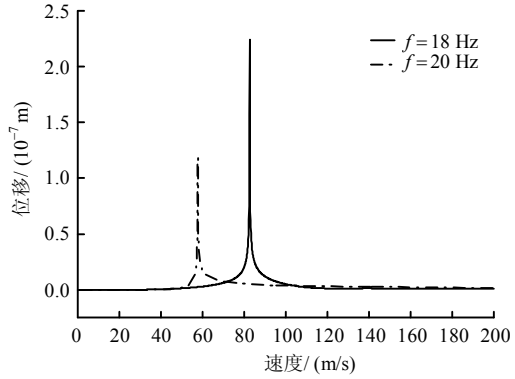
包括 20 Hz）之间时，点荷载和线荷载的临界速度可达 80～100 m/s；当响应频率继续增大，在 20 Hz 以上(包括 20 Hz)时，临界速度基本维持在 50～60 m/s 之间(图 6、9 中 80 m/s 所对应的波动为 50 Hz 的第二振幅，因此不是其临界速度)。由此可知，移动速度对不同频带的动力响应影响范围是不同的，不论是移动点荷载还是移动线荷载，低频时移动速度对动力响应的影响比高频时的影响要大。

4.4 土体弹性模量、泊松比、阻尼比以及荷载频率对临界速度的影响

图 10～13 分别为土体的弹性模量、泊松比、阻尼比和荷载频率对临界速度的影响（点(10,10)处 $f=30$ Hz 的位移响应）。土体厚度为 10 m，密度为 2 000 kg/m^3；线荷载长度 $L=5$ m，单位长度幅值为 1 N，作用在地表以下 7 m 处，沿 y 轴正向移动，参数 n 取 30。图 10～12 中，荷载振动频率 $f_0=\omega_0/(2\pi)=5$ Hz，通过复拉梅常数引入阻尼比，即 $\lambda^*=\lambda(1+\mathrm{i}\xi)$，$G^*=G(1+\mathrm{i}\xi)$。① 弹性模量的影响：$E$ 分别取 5、10、15、20、25 MPa，$\xi=0.02$，$\nu=0.3$；② 泊松比的影响：ν 分别取 0.10、0.20、0.30、0.35，$\xi=0.02$，$E=25$ MPa；③ 阻尼比的影响：ξ 分别取 0、0.02、0.05、0.08、0.12，$E=25$ MPa、ν 取 0.30；④ 荷载振动频率的影响：f_0 分别取 5、20、30、50、60、70、80 Hz，$E=25$ MPa，$\xi=0.02$，$\nu=$ 取 0.3。



(a) f 为 13、15 Hz



(b) f 为 18、20 Hz

图 8 动力响应频率在 10～20 Hz 之间时，移动速度对线荷载动力响应的影响

Fig.8 Influences of moving speed on dynamic response of line load when frequency is between 10 Hz and 20 Hz

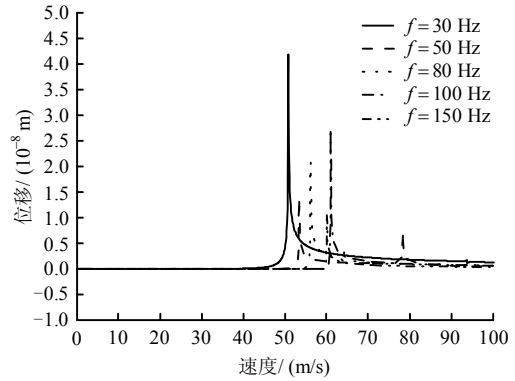


图 9 动力响应频率在 30 Hz 以上时，移动速度对线荷载动力响应的影响

Fig.9 Influence of moving speed on dynamic response of line load when frequency is above 30 Hz

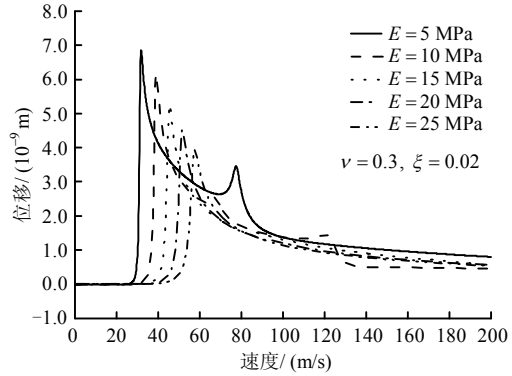


图 10　弹性模量对临界速度的影响

Fig.10　Influence of elastic modulus on critical speed

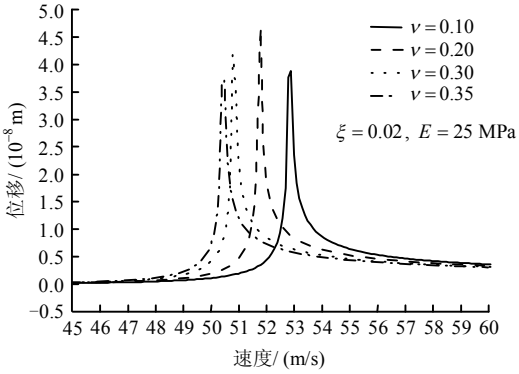


图 11　泊松比对临界速度的影响

Fig.11　Influence of Poisson's ratio on critical speed

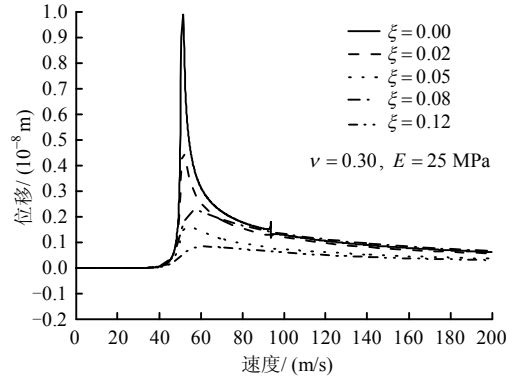


图 12　阻尼比对临界速度的影响

Fig.12　Influence of damping ratio on critical speed

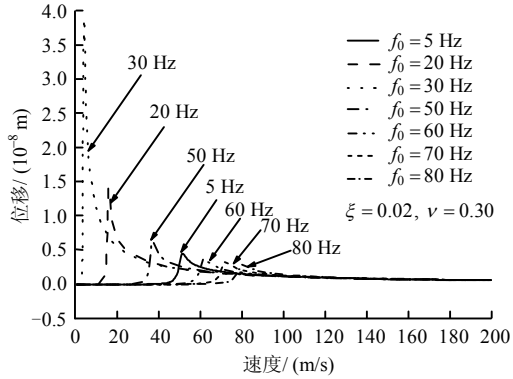


图 13　荷载频率对临界速度的影响

Fig.13　Influence of load frequency on critical speed

由图 10～12 可以看出：弹性模量、泊松比、阻尼比对土体临界速度的影响依次递减。$E=5$ MPa 时，临界速度约为 30 m/s，$E=25$ MPa 时，临界速度则达到 60 m/s；泊松比由 0.10～0.35 变化时，临界速度有减小趋势，但是变化区间仅为 50～54 m/s 之间；土体阻尼比由 0～0.12 变化时，临界速度几乎没有变化，因此在研究临界速度的影响因素时，可不考虑土体阻尼比的影响；由图 13 可以看出：响应频率和荷载振动频率越接近，其临界速度越小，但振幅越大；位移响应频率等于荷载振动频率时，其对应的临界速度最小，振幅最大。

5　结　论

（1）推导了内部竖向单个移动简谐荷载及内部竖向移动简谐线荷载作用下，层状地基任意点处竖向位移响应的解析解，分析了解析解中参数 n 对竖向位移响应的影响，并给出了其经验取值范围为 $\lceil(5\sim7)\eta L\rceil$。

（2）荷载振动频率一定时，其移动速度对不同频带的动力响应的影响范围不同。不论是移动点荷载还是移动线荷载，移动速度对低频动力响应的影响要比高频动力响应的影响大。荷载频率为 5 Hz，位移响应在 10 Hz 以内时，点荷载和线荷载的临界速度基本都在 20 m/s 以内；位移响应在 10～20 Hz 之间时，点荷载和线荷载的临界速度可达 80～100 m/s；位移响应在 20～150 Hz 之间时，移动荷载的临界速度基本维持在 50～60 m/s 之间。

（3）土体的弹性模量对其临界速度有较为明显的影响，泊松比和阻尼比对临界速度的影响相对较小，在荷载频率等一定的条件下，弹性模量越大，土体的临界速度也越大；频率越接近荷载振动频率的振动响应，其幅值越大，所对应的临界速度越小。

参 考 文 献

[1] EASON G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force[J]. **International Journal of Engineering Science**, 1965, 2(6): 581－609.

[2] GAKENHEIMER D C, MIKLOWITZ J. Transient excitation of an elastic half-space by a point load traveling on the surface[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1969, 36(3): 505－515.

[3] DIETERMAN H A, METRIKINE A. Critical velocities of a harmonic load moving uniformly along an elastic

layer[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1997, 64(3): 596－600.

[4] JONES C J C, SHENG X, PETYT M. Simulations of ground vibration from a moving harmonic load on a railway track[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2000, 231(3): 739－751.

[5] HUNG H H, YANG Y B. Analysis of ground vibrations due to underground trains by 2.5 D finite/infinite element approach[J]. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, 2010, 9(3): 327－335.

[6] 袁宗浩, 蔡袁强, 袁万, 等. 地铁列车荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧道和轨道系统动力响应分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(4): 1003－1014.
YUAN Zong-hao, CAI Yuan-qiang, YUAN Wan, et al. Dynamic response of circular railway tunnel and track system in saturated soil under moving train loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(4): 1003－1014.

[7] 胡安峰, 孙波, 谢康和. 下卧基岩饱和地基在移动荷载作用下的动力响应[J]. 振动与冲击, 2012, 31(4): 151－156.
HU An-feng, SUN Bo, XIE Kang-he. Dynamic response of saturated subgrade with rock substratum subjected to moving loads[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2012, 31(4): 151－156.

[8] 徐斌, 陆建飞, 王建华, 等. 移动荷载作用下层状饱和土的动力响应[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3186－3192.
XU Bin, LU Jian-fei, WANG Jian-hua, et al. Dynamic response of layered saturated soil under moving loads[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(12): 3186－3192.

[9] 张谦, 陈文化. 地铁列车出, 进站加, 减速的轴向激励引起出平面振动[J]. 振动与冲击, 2016, 35(24): 96－101.
ZHANG Qian, CHEN Wen-hua. Out-of-plane vibration induced by axial excitation while a metro train arriving at or leaving a station[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2016, 35(24): 96－101.

[10] 司理涛, 赵岩, 张亚辉. 列车荷载作用下黏弹性半空间体的随机动力响应[J]. 计算力学学报, 2016, 33(2): 165－170.
SI Li-tao, ZHAO Yan, ZHANG Ya-hui. Dynamic response of viscoelastic half-space subjected to train loads[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2016, 33(2): 165－170.

[11] 叶俊能. 列车荷载下轨道系统-层状横观各向同性饱和地基动力响应[J]. 岩土力学, 2010, 31(5): 1597－1603.
YE Jun-neng. Dynamic response of track system-layered transversely isotropic saturated subgrade to train loads[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(5): 1597－1603.

[12] 周晔, 郑荣跃, 刘干斌. 列车荷载下上覆弹性层横观各向同性饱和地基的动力响应[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 604－610.
ZHOU Ye, ZHENG Rong-yue, LIU Gan-bin. Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(2): 604－610.

[13] 巴振宁, 金威, 梁建文. 移动简谐载荷作用下层状地基-轨道耦合系统动力响应分析[J]. 振动与冲击, 2016, 35(12): 61－70.
BA Zhen-ning, JIN Wei, LIANG Jian-wen. Dynamic responses of layered foundation-track coupled systems due to moving harmonic loads[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2016, 35(12): 61－70.

[14] 王国波. 移动荷载作用下地基土动力响应计算方法的研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2003.
WANG Guo-bo. The study of calculation method on dynamic response of soil induced by moving loads[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2003.

[15] 蒋通, 宋晓星. 用薄层法分析层状地基中条形基础的阻抗函数[J]. 力学季刊, 2009, 30(1): 62－70.
JIANG Tong, SONG Xiao-xing. Analysis of impedance functions of strip foundations embedded in stratified soils by using thin layer method[J]. **Chinese Quarterly of Mechanics**, 2009, 30(1): 62－70.

[16] 宋晓星. 薄层法在地下轨道交通引发环境振动计算中的应用[D]. 上海: 同济大学, 2009.
SONG Xiao-xing. Application of thin layer method in calculation of environmental vibration caused by underground rail transit[D]. Shanghai: Tongji University, 2006.