DOI：10.16285/j.rsm.2016.3005

软土虹吸排水完整井非稳定流模型及解析解

吴 纲[1]，孙红月[1]，付崔伟[2]，陈永珍[1]，汤碧辉[1]

(1. 浙江大学 海洋学院，浙江 舟山 316021；2. 香港城市大学 建筑学及土木工程学系，香港)

摘 要：软土地基的处理一直是工程界的难题，大多数处理方式采用排出软土中水的措施。虹吸排水免动力，且操作简单，可以降低地下水。根据该技术的这些优点，可以将其应用于软土地基处理领域。为了得到虹吸排水作用下土体内部的水位及虹吸管内流量的变化，针对软土中地下水运动进行理论分析。基于 Theis 理论，针对潜水含水层完整井的轴对称井流微分方程，采用 Boltzmann 变换，推求得到虹吸过程中软土地基中的水位和流量的显式解析解，并进行室内物理模拟试验验证。结果表明，解析解与试验数据较吻合。与前人经典解析解进行对比，表明相对误差绝对值范围为 0～15%，误差较小。推导得到的解析解相比经典解析解而言，计算更简单，更有利于工程应用。

关 键 词：虹吸；软土；潜水；井流；解析解

中图分类号：TU 470 **文献识别码**：A **文章编号**：1000－7598 (2018) 09－3355－08

A mathematical model and its solution for unsteady flow under siphon drainage by fully penetrating well in soft ground

WU Gang[1], SUN Hong-yue[1], FU Cui-wei[2], CHEN Yong-zhen[1], TANG Bi-hui[1]

(1. Ocean College, Zhejiang University, Zhoushan, Zhejiang 316021, China;
2. Department of Architecture and Civil Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: The treatment of soft ground deposit is problem in geotechnical engineering. Most treatments drain the water out of the soft soil deposit. Siphon method is simple and free of power, and can be used to dewater the groundwater. To better understand the mechanism of siphon drainage process in soft ground improvement, the analytical analysis are carried out to investigate the ground water level in soft ground and siphon discharge according to the ground water movement theory. An explicit analytical solution of axisymmetric well-flow differential equations in unconfined aquifer is derived to assess the water level and discharge in soft ground based on Theis theory and Boltzmann transformation. The analytical solution is verified by numerical simulation. The results show that the analytical solution agree well with data obtained from experiment. Relative error is 0−15% by comparing analytical solution and classical solution, and it is more simple than classical solution. It is more convenient than classical solution for engineering application.

Keywords: siphon; soft ground; unconfined aquifer; well flow; analytical solution

1 引 言

软土是指分布于河流及滨海地区的高含水率、高压缩性、低承载力土体，其强度低，渗透性差，因此，处理软土是土木工程中一个相当棘手的问题[1]。通常，工程常用的软土地基处理方式为排水固结法。排水固结法由两套系统组成，即加载系统和抽水系统。排水系统由设置于土体内部的竖向砂井或竖向排水板以及土层表面的砂垫层组成。通过加载系统，对砂垫层表面施加荷载，使土体内部的水顺着砂井或竖向排水板向外排出，土体发生固结沉降，从而达到加固土体的效果。对排水固结法的研究已有 50 多年的历史，已经形成较为完善的理论实践体系，但传统的排水固结法施工工艺复杂，控制要点较多，能耗较大，因此在实际工程中，应用不理想[2–3]。

收稿日期：2016–12–28
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No. 41272336）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(41272336).
第一作者简介：吴纲，男，1990 年生，博士研究生，主要从事岩土工程和地质工程方面的研究。E-mail：11534020@zju.edu.cn
通讯作者：孙红月，女，1970 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事岩土工程和地质工程方面的教学和研究工作。E-mail：shy@zju.edu.cn

虹吸排水技术是一种免动力的跨流域调水技术[4]，19 世纪 80 年代开始被应用于边坡排水领域。而将其应用于软土地基排水，目前尚未见相关报道。

软土虹吸排水与传统的井点降水相似。传统的井点降水技术可以用于软土地基处理，但由于软土多处于河流或滨海地区，土体中的水位基本上与土体表面齐平，或在近地表处，软土强度低，施打降水井困难。排水固结法中的塑料排水板施打工艺可以解决上述难题。虹吸排水与井点降水的作用效果相同，但虹吸排水方法具有免动力和环保等优势，因此采用虹吸排水技术处理软土地基具有一定的可行性。在进行软土虹吸排水时，采用虹吸管与塑料排水板组合方式，插入软土地基中，进行虹吸降排水工作，工作示意如图 1 所示。由于虹吸扬程小于 10 m，因此，本文研究的工况为待处理软土层厚度小于等于 10 m[5]。

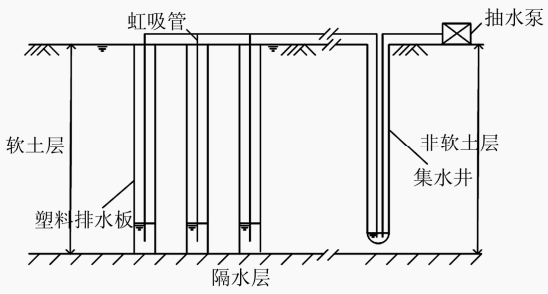


图 1 软土虹吸排水示意图

Fig.1 Sketch of siphon drainage in soft ground

对于传统的井流理论，有许多学者做了相应的研究。Theis[6]基于无越流情况下无限大均质含水层完整井情况，提出了著名的 Theis 公式。随着 Theis 公式的提出，国内外的学者开始对抽水引起的地下水非稳定流动进行深入的研究工作。Hantush 等[7]考虑越流条件下建立了非稳定流微分方程，并得到了相应的解析解；Boulton[8]考虑井流中的滞后给水效应，得到了相应条件下的非稳定井流解析解；Mishra 等[9–10]考虑含水层的压缩，针对饱和区和非饱和区水利特性差异对降深的影响，推求并得到了相应情况下的非稳定井流解析解；国内学者在非稳定井流方面做出了一些成果，刘凯[11]、文章[12]等构建了承压含水层井周围非 Darcy-Darcy 两区渗流模型，并得到了相应的解析解；王旭东等[13]考虑承压含水层顶板弯曲，得到改进 Theis 解析解；王玉林等[14–15]针对抽–灌同轴的情况，建立非完整井井流模型，并得到了相应的解析解。

本文在前人非稳定井流理论的基础上，针对软土虹吸排水技术，提出与其相对应的计算模型，即不考虑越流的潜水含水层完整井定降深非稳定井流模型。模型中假定潜水层均质各向同性，考虑井径对井流的影响，采用 Boltzmann 变换的方法，得到数学模型的解析解。该解析解与经典的解析解相比，计算简便，可以描述软土在虹吸排水过程中土体内部水位和虹吸流量的变化。通过室内物理模拟的方法，反演得到土体的渗透系数，代入所得到的解析解中，分析解析解与试验数据。通过所得到的解析解与经典解析解的对比，研究软土虹吸排水过程中水位和流量的发展变化规律。

2 数学模型的建立

2.1 问题描述和基本假设

将软土层视为潜水含水层，底面为不透水面，软土层与不透水面以下的隔水层之间不存在水量交换。在软土层中施打设置有虹吸管的塑料排水板，打穿软土层。在远离软土层的非软土层施打一集水井，将虹吸管中注入水，初始时刻，由于软土层的水位位于地表，可以认为施打的塑料排水板和集水井中的水位也位于地表，将注满水的虹吸管放入集水井中，打开抽水泵，将集水井中的水抽出。在虹吸作用下，塑料排水板中的水向着集水井中流动，从而达到抽水的效果。由于软土渗透系数较小，土体向排水板中汇水的速度较慢，而虹吸排水的速度较快，因此，当有水进入塑料排水板内，会在虹吸作用下，被迅速抽走，因此，塑料排水板中的水位始终保持在较低的某一水位。在软土中，没有设定定水头条件，此时的土体中的井流问题为非稳定流动。由于软土本质上是一种黏性土，而黏性土的渗透系数较小，软土的渗透系数范围大致在 10^{-7} cm/s 数量级，虹吸排水的影响半径相对较小，因此需要考虑井径对井流的影响。在井的形式方面，由于非完整井解析解相对复杂，暂时先考虑完整井的情况，综合上述分析，可以把软土虹吸排水看成是考虑井径影响下的潜水含水层完整井定降深非稳定井流问题。

为研究该模型中的水位变化和分布规律，建立三维轴对称地下水渗流模型。作如下基本的假设：①潜水含水层土体均质各向同性，竖向渗透系数和水平渗透系数相同，潜水含水层水平向无限延伸；②潜水含水层底面为不透水面，潜水层与外界不存在越流补给，同时不考虑外界的入渗和水量的蒸发作用；③流速分布满足 Dupuit 假定；④所研究的完整井为单井，不考虑井群影响。

2.2　地下水运动方程与初始边界条件

构建三维柱坐标系，构造各向同性潜水含水层完整井地下水三维渗流运动方程[16]：

$$a\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ (r_w<r<\infty,t>0) \tag{1}$$

式中：$a=Kh_m/\mu$；K 为渗透系数；h_m 为含水层平均厚度；μ 为重力给水度，取值范围为 0.2～0.3；$\varphi=H^2/2$，H 为水头高度；r_w、r 分别为井径和井距；t 为时间。

边界条件和初始条件分别为

$$\varphi(\infty,t)=\frac{1}{2}H_0^2,\ \varphi(r_w,t)=\frac{1}{2}H_w^2(t>0) \tag{2}$$

$$\varphi(r,0)=\frac{1}{2}H_0{}^2(r_w<r<\infty) \tag{3}$$

式中：H_0、H_w 分别为初始水头高度和井中水位高度。

2.3　方程的解

令 $x=r-r_w$，式（1）～（3）转换为

$$a\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{x+r_w}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial t},(0<x<\infty,t>0) \tag{4}$$

$$\varphi(\infty,t)=\frac{1}{2}H_0^2,\ \varphi(0,t)=\frac{1}{2}H_w^2(t>0) \tag{5}$$

$$\varphi(x,0)=\frac{1}{2}H_0{}^2(0<x<\infty) \tag{6}$$

采用 Boltzmann 变换，令

$$u=\frac{x^2}{4at} \tag{7}$$

则有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x}{2at}\frac{\partial\varphi}{\partial u} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{2at}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{x^2}{4a^2t^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{x^2}{4at^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u} \tag{10}$$

将式（8）～（10）代入式（4）可得

$$\left[0.5\left(1+\frac{x}{x+r_w}\right)+u\right]\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}+u\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2}=0 \tag{11}$$

边界条件和初始条件变换为

$$\varphi\big|_{u\to\infty}=\frac{1}{2}H_0^2,\ \varphi\big|_{u=0}=\frac{1}{2}H_w^2 \tag{12}$$

令 $0.5\left(1+\dfrac{x}{x+r_w}\right)=A$，则 A 的变化范围为 0.5～1.0。式（11）可简写成

$$(A+u)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}+u\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2}=0 \tag{13}$$

令 $\varphi'=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}$，则有

$$(A+u)\varphi'+u\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}u}=0 \tag{14}$$

即得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\varphi'}=-\frac{A\mathrm{d}u}{u}-\mathrm{d}u \tag{15}$$

$$\ln\varphi'=-A\ln u-u+C \tag{16}$$

$$\varphi'=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}=\mathrm{e}^{-A\ln u-u+C}=C_1\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u=C_1\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(H_0^2-H_w^2) \tag{18}$$

$$C_1=\frac{(H_0^2-H_w^2)}{2\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u} \tag{19}$$

$$\int_u^\infty\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u=C_1\int_u^\infty\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}H_0^2-\varphi \tag{20}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}H_0^2-\frac{1}{2}(H_0^2-H_w^2)\frac{\int_u^\infty\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u}{\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u} \tag{21}$$

$$H=\sqrt{H_0^2-(H_0^2-H_w^2)\frac{\int_u^\infty\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u}{\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^A}\mathrm{d}u}} \tag{22}$$

$$u=\frac{(r-r_w)^2}{4at} \tag{23}$$

$$A=0.5\left(1+\frac{r-r_w}{r}\right),\ (r_w<r<\infty) \tag{24}$$

在计算虹吸排水流量时，根据 Dupuit 假定，近似将井壁处水位线斜率认为是井壁处水力梯度，与土体渗透系数的乘积，则在任一时刻，虹吸管抽水流量为

$$Q = 2\pi r H_{\mathrm{w}} K \frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=r_{\mathrm{w}}} \tag{25}$$

3 分析与应用

3.1 室内物理模型试验

为探究虹吸排水在软土地基中的作用机制，自主设计了模型柱进行试验，模型柱的高度为 2 m，内径为 20 cm，壁厚为 4 mm。4 mm 壁厚的模型柱，填土高度为 2 m 时，产生的侧向变形较小，基本可以消除土体侧向变形对试验的影响，具体的试验实物图如图 2 所示。采用的土体取自舟山市某工地软黏土，塑料排水板规格为 100 mm×4 mm，塑料排水板的等效半径为$(a+b)/\pi$，等效半径约为 3.3 cm。采用的虹吸管为内径 4 mm 的普通塑料软管。模型内设置测压管测量各处的水位。



图 2 试验实物图

Fig.2 Photo of experiment equipment

3.1.1 试验步骤

将测压管以 2 cm 的间隔布置，测压管一端套上土工布，布置于模型柱底座上。将虹吸管插入排水板中，排水板底部用土工布封底，防止土颗粒进入排水板内部。在虹吸管端部用土工布包裹，以防止虹吸管堵塞。将设置有虹吸管的排水板伸入模型柱内，布置于模型柱中央。测压管和塑料排水板布置完成后，将底座边缘抹上 PVC 胶水，与 20 cm 口径 PVC 管黏合，形成试验模型柱。将软土填入模型柱内，加水至土体表面，放置 1 d 时间，使测压管内充满水。再启动虹吸，排水开始后记录不同时刻的流量和测压管水位。

3.1.2 试验数据对比

由于土体的渗透系数未知，将某一时刻的非稳定流看成是稳定流，则利用稳定流的公式，反演土体渗透系数和测压管位置，具体的反演公式为

$$K = \frac{Q}{\pi(H^2 - h^2)} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \tag{26}$$

$$\frac{Q_a(\ln r_2 - \ln r_1)}{h_2^2 - h_1^2} = \frac{Q_b(\ln r_3 - \ln r_2)}{h_3^2 - h_2^2} \tag{27}$$

$$r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = 2 \tag{28}$$

通过反演参数，得到测压管距离井轴的距离 r_1、r_2、r_3 分别为 5、7、9 cm。得到渗透系数的变化如图 3 所示。渗透系数随着时间呈现下降的趋势，这是因为在抽水过程中，由于水位的下降，有部分空气进入土体内部，使得土体的渗透系数减小，但可以看出，土体的渗透系数大致在 2×10^{-7} cm/s 附近，故将渗透系数取为 2×10^{-7} cm/s。将试验得到的水位数据，与式（22）解析解结果进行对比，结果如图 4 所示。从图中看出，式（22）所得到的曲线与实际试验得到的结果吻合，这说明式（22）可以用于评估软土虹吸排水过程中，土体水位的变化关系。从图中看出，在虹吸过程初期，土体内的水位下降较快，6 d 过后，水位下降速率降为 1 cm/d，而且随着时间的增长，水位下降速率越来越慢。可以看出，软土虹吸排水其实是改变了井周的水力坡降，促使土体中的水在水力坡降作用下，向着井中汇流。当土体中的水汇流到井中时，在虹吸作用下，迅速将汇流的水抽走。因此，软土虹吸排水方法是一种依靠软土自身渗透而抽水的方法。

通过测定 24 h 内的虹吸流量变化关系，发现虹吸流量与理论计算的结果较吻合，在 24 h 内的虹吸流量呈现指数下降的趋势，因此，可以认为式（13）可以反映软土虹吸过程中的流量变化情况。

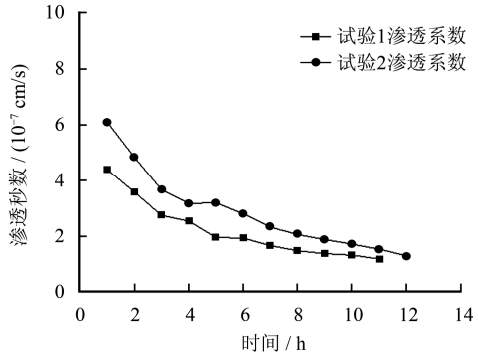
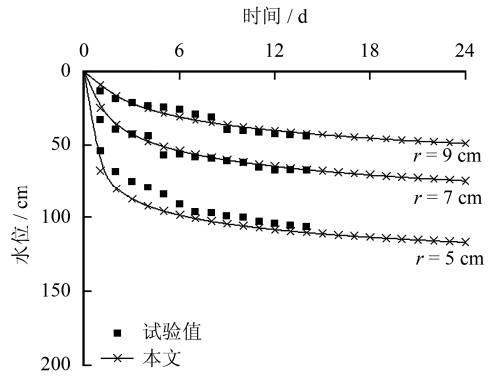
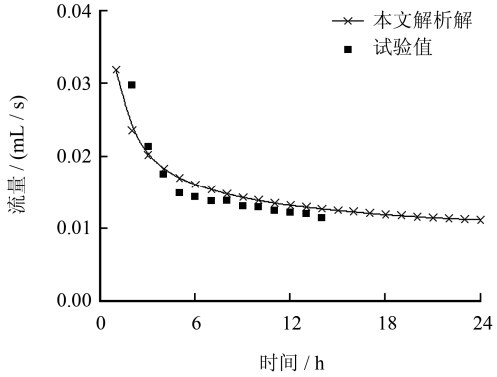


图 3 渗透系数变化图

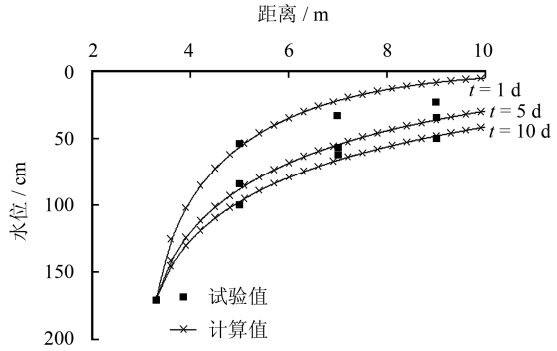
Fig.3 Variation of permeability coefficient



(a) 不同井距下水位对比图



(b) 流量对比图



(c) 不同时间水位对比图

图 4　解析与试验结果对比图

Fig.4　Comparisons between solution and experimental data

3.2　与前人解析解对比

陈崇希等[16]采用 Boltzmann 变换求解 Stallman 提出的定降深沟渠流方程，得到了二维定降深沟渠地下水流动解析解，通过承压水层与潜水含水层的对照，得到潜水含水层下的二维定降深沟渠地下水流动解析解：

$$H=\sqrt{H_0^2-(H_0^2-H_w^2)\cdot erfc(s)} \qquad (29)$$

式中：$erfc(s)$为余误差函数。

其中：

$$s=\sqrt{\frac{r^2}{4at}} \qquad (30)$$

Jacob 研究三维轴对称地下水流动方程，采用 Laplace 变换的方法，得到定降深下的水位流量解析解[16]：

$$H=\sqrt{H_0^2-(H_0^2-H_w^2)A(\bar{r},\bar{t})} \qquad (31)$$

$$A(\bar{r},\bar{t})=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(z)Y_0(z\bar{r})-Y_0(z)J_0(z\bar{r})}{z[J_0^2(z)+Y_0^2(z)]}\exp(-\bar{t}z^2)\mathrm{d}z \qquad (32)$$

$$Q=\pi K(H_0^2-H_w^2)G(\bar{t}) \qquad (33)$$

$$G(\bar{t})=\frac{4\bar{t}}{\pi}\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{\bar{t}x^2}\left\{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left[\frac{Y_0(x)}{J_0(x)}\right]\right\}\mathrm{d}x \qquad (34)$$

式中：$A(\bar{r},\bar{t})$ 为无越流系统定降深井流降深函数；$\bar{r}=r/r_w$ 为无量纲径向距离；$G(\bar{t})$ 为无越流系统定降深井流流量函数；$\bar{t}=r_w^2/(at)$ 为无因次时间；$J_0(x)$ 为零阶第一类贝塞尔函数；$Y_0(x)$ 为零阶第二类贝塞尔函数。

选取软土层平均厚度为 196 cm，则初始水位 H_0 = 196 cm，井中恒定水位为 25.5 cm，土体渗透系数为 2×10^{-7} cm/s，给水度取为 0.25，分别取距离井轴 5、7、9 cm 处的水位变化情况进行分析。将式（22）、（25）与前人的理论结果进行对比，结果如图 5～8 所示。从图中看出，式（22）、（25）解析解与前人的解析解趋势一致，与 Jacob 的解析解更吻合。Jacob 的解析解被认为是完整井考虑井径影响的定降深经典井流解析解，本文所推导的解析解，其本质的微分方程与 Jacob 的微分方程相同，只是在处理该方程时，采用的方法不同，而且采用的假设也更利于求解该微分方程。利用相对误差公式，得到本文解析解与 Jacob 解析解的相对误差，如图 9 所示。从图中看出，本文解析与 Jacob 解析解的相对误差的绝对值小于 15%，可以认为本文解析解与经典的解析解很吻合。从图中看出，随着井距的增大，相对误差减小，说明在井距较大处，本文解析解与经典解析解能更好地吻合。从图中看出，在初始时刻，相对误差波动较大，随着时间增大，相对误差趋于稳定，所以，可以认为本文解析能反映考虑井径影响下的潜水定降深水位和流量的变化。由于 Jacob 的解析解较为复杂，不利于工程应

用，相对于 Jacob 的解析解，式（22）、（25）的水位、流量解析解更简单，因此更适合工程实际应用。由于陈崇希等[16]所推导的定降深沟流解析解所适用的情况为二维，本质的微分方程也只是二维情况下的井流微分方程，因此在三维条件下使用，会出现一定的问题。对比 Jacob 的解析解，陈崇希的水位解析解在距离井轴较近处时比较吻合，在较远处会出现一定的偏差。

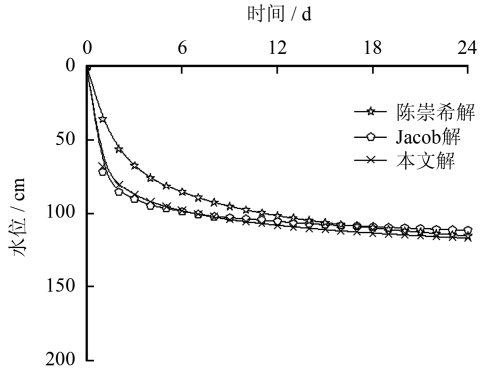


图 5 r = 5 cm 处水位对比图

Fig.5 Comparison of water level in r = 5 cm

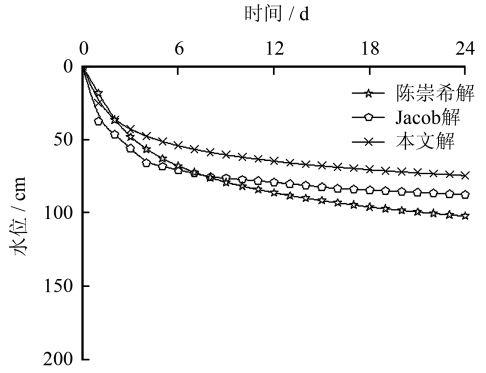


图 6 r = 7 cm 处水位对比图

Fig.6 Comparison of water level in r = 7 cm

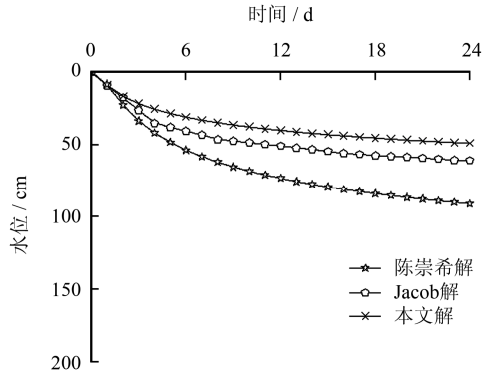


图 7 r = 9 cm 处水位对比图

Fig.7 Comparison of water level in r = 9 cm

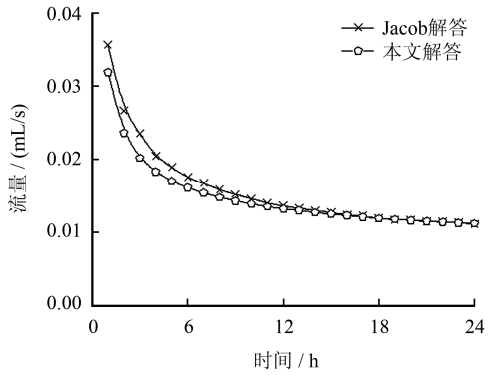
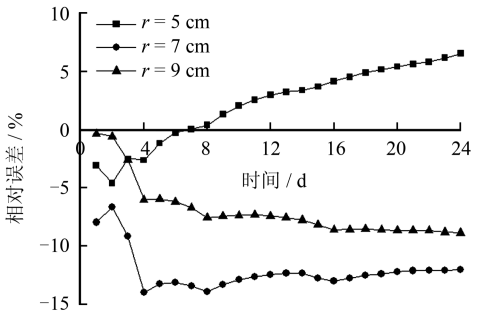
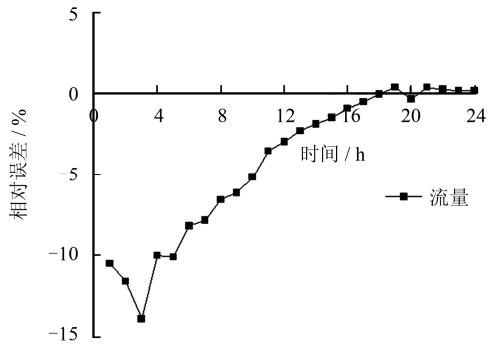


图 8 流量对比图

Fig.8 Comparison of discharge



(a) 不同井距处水位相对误差图



(b) 流量相对误差图

图 9 相对误差图

Fig.9 Variations of relative error

4 结 论

本文推导得到了软土在虹吸排水作用下土体中水位和虹吸流量的解析解，通过室内物理模拟试验，验证了所推求的解析解的正确性，并将所推求的解析解与经典的解析解相对比，进行误差分析，得到初步结论如下：

（1）基于 Theis 井流微分方程，采用 Boltzmann 变换，推导得到软土虹吸排水过程中，水位和流量变化解析解。

（2）通过室内物理模拟试验对比分析，表明

所推求的解析解与试验结果较吻合，认为所推求的解析解可以反映软土虹吸排水过程中水位和流量的变化规律。

（3）将所推求的解析解与经典的解析解进行对比，相对误差的绝对值范围为0～15%，由于所推求的解析解相对于经典的解析解更简单，因此工程适用性更好。

参 考 文 献

[1] 闫澍旺, 陈静, 孙立强, 等. 深厚软土地基上充灌袋围埝下沉计算研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(12): 3537－3544.
YAN Shu-wang, CHEN Jing, SUN Li-qiang, et al. A method for calculating penetration of geo-tubes dike resting on deep soft foundation soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(12): 3537－3544.

[2] 张仪萍, 严露, 俞亚南, 等. 真空预压加固软土地基变形与固结计算研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊1): 149－154.
ZHANG Yi-ping, YAN Lu, YU Ya-nan, et al. Solutions for settlement and consolidation of soft ground with vacuum preloading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.1): 149－154.

[3] 蒋建清, 曹国辉, 刘热强. 排水板和砂井联合堆载预压加固海相软土地基的工作性状的现场试验[J]. 岩土力学, 2015, 36(增刊2): 551－558.
JIANG Jian-qing, CAO Guo-hui, LIU Re-qiang. Field test on behaviours of marine soft soil foundation treated with plastic drainage plate and sand column combined with surcharge preloading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(Supp.2): 551－558.

[4] 尚岳全, 蔡岳良, 魏振磊, 等. 滑坡虹吸排水方法[J]. 工程地质学报, 2015, 23(4): 706－711.
SHANG Yue-quan, CAI Yue-liang, WEI Zhen-lei, et al. Siphon drainage method for landslide prevention[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2015, 23(4): 706－711.

[5] CAI Y, SUN H, SHANG Y, et al. Air accumulation in high-lift siphon hoses under the influence of air dissolution and diffusion[J]. **Journal of Zhejiang University － Science A (Applied Physics & Engineering)**, 2015, 16(9): 760－768.

[6] THEIS C V. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage[J]. **Transactions-American Geophysical Union,** 1935, 16(2): 519－524.

[7] HANTUSH S M, JACOB C E. Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer[J]. **Transactions-American Geophysical Union**, 1955, 36(1): 95－100.

[8] BOULTON N S. Unsteady radial flow to a pumped well allowing for delayed yield from storage[M]. [S. l.]: International Association of Scientific Hydrology Publication, 1954: 472－477.

[9] MISHRA P K, NEUMAN S P. Improved forward and inverse analyses of saturated-unsaturated flow toward a well in a compressible unconfined aquifer[J]. **Water Resources Research**, 2010, 46(7): W07508.

[10] MISHRA P K, NEUMAN S P. Saturated-unsaturated flow to a well with storage in a compressible unconfined aquifer[J]. **Water Resources Research**, 2011, 47(5): W05553.

[11] 刘凯, 文章, 刘壮添. 第一类越流含水层系统中非完整井附近非达西渗流近似解析解[J]. 水利学报, 2013, 44(8): 966－972.
LIU Kai, WEN Zhang, LIU Zhuang-tian. Approximate analytical solution for non-Darcian flow to a partially penetrating well in the first kind of leaky aquifer[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2013, 44(8): 966－972.

[12] 文章, 刘凯, 陈晓恋. 承压含水层中非完整井附近“非达西–达西”两区渗流模型近似解析解[J]. 地球科学：中国地质大学学报, 2015, 40(5): 918－924.
WEN Zhang, LIU Kai, CHEN Xiao-lian. Approximate analytical solutions for two-region non-Darcian flow to a partially penetrating well[J]. **Earth Science-Journal of China University of Geoscience**, 2015, 40(5): 918－924.

[13] 王旭东, 殷宗泽, 宰金珉, 等. 柱坐标系下地下水非稳定流模拟的有限层法[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(1): 15－20.
WANG Xu-dong, YIN Zong-ze, ZAI Jin-min, et al. Finite layer method for numerical simulation of unsteady groundwater flow in cylindrical coordinate system[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(1): 15－20.

下转第3384页