

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.2110

# 基于改进粗糙表面 Greenwood-William 接触模型的离散元方法

赵婷婷<sup>1</sup>, 冯云田<sup>1</sup>, 王 敏<sup>1</sup>, 王 勇<sup>2</sup>

(1. 斯旺西大学 辛克维奇计算工程中心, 斯旺西 英国;

2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘 要:** 颗粒材料的表面粗糙度在很大程度上影响颗粒集合体的力学特性, 传统离散元方法中对颗粒具有光滑表面的假设, 使得其无法准确描述真实颗粒材料的接触行为, 因此有必要发展可以定量考虑颗粒表面粗糙度的随机离散元方法。在介绍经典粗糙表面接触模型 Greenwood-Williamson (简称 G-W) 模型的基础上, 分析了 G-W 模型应用于离散元模拟的缺陷, 提出了分别考虑颗粒重叠光滑部分和粗糙部分的改进模型, 并推导出了相应的无量纲形式, 对比了经典 G-W 模型与改进模型计算得到的粗糙颗粒接触时压力分布、变形分布、总接触力等结果。结果表明, 改进的接触模型能够更直观地反映颗粒表面粗糙度对颗粒接触的影响。基于改进的接触模型, 采用两步曲线拟合手段, 得到了可以直接应用于离散元模拟的随机法向接触定律。将该定律通过开发用户自定义接触模型引入到颗粒离散元程序 PFC<sup>3D</sup> 中。通过数值试验观察了表面粗糙度在不同加载路径下对颗粒集合体力学特性的影响。

**关 键 词:** 表面粗糙度; Greenwood-Williamson 模型; 接触定律; 随机离散元

中图分类号: TV 311

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018) 09-3440-014

## Modified Greenwood-Williamson model based stochastic discrete element method for contact with surface roughness

ZHAO Ting-ting<sup>1</sup>, FENG Yun-tian<sup>1</sup>, WANG Ming<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>2</sup>

(1. Zienkiewicz Centre for Computational Engineering, Swansea University, Swansea, United Kingdom;

2. Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, China Academy of Science, Wuhan, Hubei 430071, China)

**Abstract:** The surface roughness of particles may have a strong influence on the mechanical properties of granular assemblies. The assumption made in the classic discrete element method (DEM) that the particle surface is smooth makes it difficult to describe the contact behavior of real granular materials accurately. It is necessary therefore to develop the stochastic discrete element method (SDEM) which could quantitatively consider the surface roughness of particles. To this end, the most popular statistical treatment of rough surface—the Greenwood-Williamson (G-W) model is introduced. Then the defects of incorporating the G-W model into DEM simulation are fully addressed. An extended model which treats the rough surface as the combination of two parts is proposed and the corresponding non-dimensional form for subsequent DEM simulations is presented. The pressure distribution, deformation distribution and total contact force obtained by the G-W model and the extended version are compared. It shows that the extended model can better reflect the influence of the surface roughness on contact between rough particles. Based on the extended model, a new normal interaction law ready to be incorporated into DEM is derived by the curve-fitted empirical formula. A user defined contact model of the new normal interaction law is incorporated into (the particle flow code) PFC<sup>3D</sup>. Numerical simulations are first conducted to compare the influence of the surface roughness on mechanical properties of particulate system under different loading conditions.

**Keywords:** surface roughness; Greenwood-Williamson model; contact law; stochastic discrete element method

收稿日期: 2017-10-20

基金项目: 国家自然科学基金 (No.51579237)。

This work was supported the National Science Foundation of China (51579237).

第一作者简介: 赵婷婷, 女, 1989 年生, 博士研究生, 主要从事离散元方法的研究工作。E-mail: 842758@swansea.ac.uk

通讯作者: 冯云田, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 主要从事计算力学的教学与研究。E-mail: y.feng@swansea.ac.uk

## 1 引言

离散元方法 (discrete element method) 自 20 世纪 70 年代由 Cundall 等<sup>[1]</sup>提出以来, 已发展成为一种有效的针对颗粒离散材料的数值计算方法, 在相关科学研究和工程实际问题中得到了广泛的应用。从本质上来说, 经典的离散元方法是一种确定性的计算方法。计算之前, 需要输入确定的材料特性、几何特征、加载过程等参数。真实情况下这些参数都包含一定的随机因素, 根据这些确定量计算出的结果无法代表颗粒集合体可能出现的所有情况。严格来说, 一次离散元计算应该被看作对于颗粒系统进行的一次蒙特卡洛模拟。颗粒系统本质上包含的不确定性, 使得提出一种可以考虑系统内在随机性的计算方法具有很高的理论价值及现实意义。随机离散元方法 (stochastic discrete element method)<sup>[2]</sup>的提出对解决这一问题进行了初步尝试。

经典离散元方法在模拟现实中复杂的研究对象时存在不足之处。真实材料在宏观尺度和微观尺度上都具有几何不规则性。然而离散元方法中采用的基本单元都是类似圆盘、圆球等规则的几何形状, 并且认为这些基本单元的表面都是光滑的。近年来, 有关颗粒材料几何不规则性及其对颗粒集合体力学特性的影响这一问题逐渐引起研究者的重视。一些研究引入了更加复杂的几何形状, 包括椭圆、圆柱体、多面体等<sup>[3-4]</sup>; 还有一些研究者通过将基本单元捆绑在一起来模拟复杂形状<sup>[5-9]</sup>。以上这些方法都是从宏观尺度上研究真实材料的几何不规则性。

如何考虑颗粒微观尺度的不规则性, 即表面粗糙度, 是一个更加困难的问题。接触模型用来评价颗粒之间的接触力, 可以建立包含表面粗糙系数的接触模型来评价粗糙度对颗粒接触行为的影响。被广泛应用的库仑摩擦定律就是从这一角度通过摩擦系数影响颗粒切向接触力。同样, 表面粗糙度也会影响颗粒之间的相对滚动, 抗转动模型<sup>[10-11]</sup>针对这一问题进行了研究。可以看出, 以上这些方法都从确定性的角度研究了表面粗糙度对接触力学特性的影响。目前为止, 还没有研究涉及到颗粒表面微观尺度不均匀性的随机特征。离散元法中通常采用的法向接触模型 (线弹性接触模型、赫兹接触模型) 只针对解决光滑颗粒之间的接触问题。作者提出的随机法向接触模型<sup>[2, 12]</sup>, 引入了可以考虑颗粒表面粗糙度随机性的粗糙系数, 从随机角度研究了表面粗糙度对接触特性的影响。

随机法向接触模型基于 Greenwood-Williamson

(简称 G-W) 模型这一经典的从统计角度研究粗糙表面接触机制的方法。通过 Newton-Raphson 迭代用数值方法得到了接触力与接触特性之间的显式关系。采用线性拟合手段提出可以直接应用于离散元模拟的法向接触经验公式。作为理论基础的 G-W 模型, 其准确性和适用性直接影响最终法向接触模型的合理性。在之前的研究过程中发现 G-W 模型具有一定缺陷, 需要做进一步的改进。

综上所述, 本文在介绍经典粗糙表面接触模型 G-W 模型的基础上, 分析了 G-W 模型应用于离散元模拟的缺陷, 提出了分别考虑颗粒重叠光滑部分和粗糙部分的改进模型, 并推导出了相应的无量纲形式, 对比了经典 G-W 模型与改进模型计算得到的粗糙颗粒接触时的压力分布、变形分布、总接触力等结果。基于改进的接触模型的数值结果, 采用两步曲线拟合手段, 得到了可以直接应用于离散元模拟的随机法向接触定律。为了研究该定律中粗糙度系数对颗粒集合力学性质的影响, 通过开发用户自定义的接触模型, 将该定律引入到离散元程序 PFC<sup>3D</sup> 中进行粗糙颗粒接触问题的数值模拟。

## 2 经典 G-W 模型

两粗糙面接触时, 表面处的突起会影响真实接触面积。考虑到粗糙表面的复杂性, 可以认为突起顶端的高度满足某种概率分布, 建立数学模型描述粗糙面的剖面形态。1966 年, Greenwood 和 Williamson<sup>[13]</sup>提出了建立不规则表面模型的最简单方法, 称为 G-W 模型。在 G-W 模型中, 粗糙表面被描述为一系列凸起的组合, 凸起之间的接触力通过赫兹定律计算, 粗糙表面的总接触力为一系列凸起接触力的叠加。

在 G-W 模型中, 有 4 个前提假设: ①粗糙表面剖面凸起的高度服从高斯分布; ②凸起顶端形状为具有相同曲率半径的圆弧; ③凸起变形相互独立, 不受周围凸起变形的影响; ④忽略凸起下部的体积变形。需要指出, 正是因为第④个假设, 使得 G-W 模型无法直接应用于离散元模拟, 详见第 3 节的讨论。

### 2.1 粗糙表面特征

粗糙表面及其剖面如图 1 所示。通过详细描述剖面形态, 可以得到粗糙表面具有的一系列特征。

$z(x_i), (i=1, \dots, N)$  给出了在长度  $L$  范围内沿  $x$  方向剖面顶点的高度值。

#### 2.1.1 粗糙度均方根

粗糙度均方根  $\sigma$  (以下简称为粗糙度) 是粗糙表

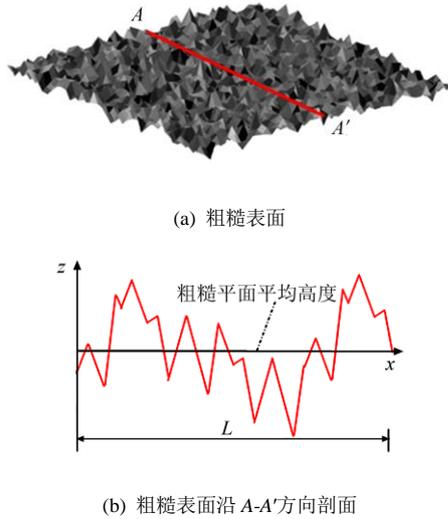


图 1 粗糙表面及剖面  
Fig.1 A rough surface and profile

面顶点高度与粗糙表面平均高度差值的标准差，公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L z^2(x) dx} \quad (1)$$

2.1.2 概率密度函数

概率密度函数  $\phi$  描述了剖面一点处高度的概率分布，如图 2 阴影部分所示。为了得到概率密度，剖面沿高度方向被分成间隔为  $dz$  的若干层。概率密度可以表示为高度出现在  $(z, z + dz)$  范围内的概率，即

$$\phi(z) = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{P(z, z + dz)}{dz} \quad (2)$$

在 G-W 模型中，认为粗糙表面凸起高度满足高斯分布，即

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

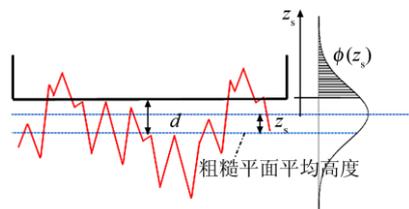


图 2 剖面高度及概率密度  
Fig.2 Profile heights and probability density

2.2 粗糙平面接触

粗糙平面 1 和 2 的粗糙度分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ，两平面平均高度之间的差值为  $d$ 。两粗糙平面的接触

问题可以看作刚性光滑平面与可变形粗糙平面间的接触，其中粗糙平面的粗糙度为原粗糙平面 1 和 2 的等效粗糙度  $\sigma$ ：

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (4)$$

通过凸起顶点的高度  $z_s$  描述剖面形态，粗糙表面平均高度及概率密度函数如图 2 所示。在 G-W 模型中，认为凸起顶端是具有相同半径  $\beta$  的圆弧，并且在单位面积内的凸起数量为  $N$ 。单个凸起与光滑平面的接触重叠量为  $z_s - d$ ，通过赫兹定律得到单个凸起与光滑平面的接触力为

$$f(z_s) = \frac{4}{3} E \beta^{1/2} (z_s - d)^{3/2} \quad (5)$$

式中： $E$  为两接触表面的等效杨氏模量。

在给定高度  $z_s$  处发生接触的概率为

$$prob(z_s > d) = \int_d^\infty \phi(z_s) dz_s \quad (6)$$

在单位面积上产生的总接触力为

$$P(d) = \frac{4}{3} EN \beta^{1/2} \int_d^\infty (z_s - d)^{3/2} \phi(z_s) dz_s \quad (7)$$

2.3 粗糙圆球接触

在两粗糙圆球接触问题中应用 G-W 模型<sup>[14]</sup>，需要考虑圆球剖面形状对两接触面之间距离的影响。接触面之间的距离不再是一个常数，而是一个与接触点距圆球中心线距离  $r$  有关的函数。可以将两圆球之间的接触简化为半径为  $R$  的可变形光滑圆球与粗糙度为  $\sigma$  的平面之间的接触，如图 3 所示。 $R$  和  $\sigma$  为两粗糙圆球的等效半径与等效粗糙度，满足以下关系：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (8)$$

式中： $R_1$ 、 $R_2$  为两圆球的半径； $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  为两圆球的粗糙度。

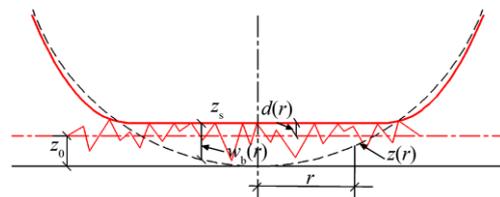


图 3 光滑圆球与粗糙平面之间的接触  
Fig.3 Contact between smooth sphere and nominally flat rough surface

在图 3 中,  $z_0$  是未变形圆球最低点与粗糙表面平均高度之间的距离, 与离散元模拟中两颗粒重叠量  $\delta$  定义相同。未变形圆球剖面各点与粗糙面平均高度之间的距离为

$$z(r) = z_0 - \frac{r^2}{2R} \quad (9)$$

变形后圆球与粗糙面平均高度之间的距离为

$$d(r) = w(r) - z_0 + \frac{r^2}{2R} \quad (10)$$

式中:  $w(r)$  为圆球的形变量。高度为  $z_s$  的凸起与圆球的重叠量为

$$\delta(r) = z_s - d(r) \quad (11)$$

圆球与凸起之间的接触力可以通过赫兹定律求得

$$f(z_s, r) = \frac{4}{3} E \beta^{1/2} [z_s - d(r)]^{3/2} \quad (12)$$

与两粗糙平面之间的接触类似, 考虑到接触发生的概率, 接触面的压力分布可以表示为

$$p(r) = C \int_{w(r)+\frac{r^2}{2R}}^{+\infty} [z_s - w(r) - \frac{r^2}{2R}]^{3/2} \phi(z_s - \delta) dz_s \quad (13)$$

其中:

$$C = \frac{4}{3} NE \beta^{1/2} \quad (14)$$

形变量  $w(r)$  为

$$w(r) = \frac{4}{\pi E} \int_0^{\bar{a}} \frac{t}{r+t} p(t) K(k) dt \quad (15)$$

式中:  $K(k)$  为第一类椭圆积分, 椭圆模量为

$$k = \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \quad (16)$$

对接触面的压力进行积分, 可以得到最终总的接触力为

$$P(\delta) = \int_0^{\bar{a}} 2\pi r p(r) dr \quad (17)$$

式中:  $\bar{a}$  为接触半径, 大于赫兹定律求得的接触半径。

### 2.4 无量纲形式

为了减少 G-W 模型输入参数的个数, 降低计算工作量, 提出了两种形式的无量纲形式, 分别以  $\sigma$

和  $\delta$  作为标准化量。需要引入以下两个无量纲系数  $\mu$  和  $\alpha$  (或  $\alpha'$ )。

$$\mu = \frac{8}{3} \sigma N \sqrt{2R\beta} \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{\delta}, \alpha' = \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta}{\sigma} \quad (19)$$

在无量纲形式下, 粗糙平面总的接触力可以表示为赫兹定律总接触力与无量纲总接触力的乘积。

$$P(\delta, \sigma, \mu) = P_H(\delta) P^*(\alpha, \mu) = P_H(\sigma) P^*(\alpha', \mu) \quad (20)$$

式中:  $P_H$  为赫兹接触力;  $P^*$  为无量纲接触力。

### 3 G-W 模型的缺陷

为了在离散元模拟中应用 G-W 模型, 需要得到总接触力  $P$  与颗粒相互重叠量  $\delta$  之间的显式关系, 直接根据 G-W 模型推导得出的接触定律存在一定不合理之处。离散元模拟中, 两颗粒之间的重叠量  $\delta$  是已知的, G-W 模型中忽略表面凸起下部体积变形的假设, 导致 G-W 模型推导得出的接触定律无法直接应用于离散元计算当中。

经典的 G-W 模型, 光滑圆球与粗糙接触面之间的接触力是已知的, 并且只引起颗粒粗糙表面凸起的变形。接触过程为用大小为  $P$  的压力向下压圆球直至圆球与接触面产生的接触力与  $P$  平衡。在不引起凸起下部体积变形的假设下, 接触力  $P$  的取值不能过大, 圆球的最低点始终高于粗糙表面平均高度, 即  $\delta$  为负值。

通过对图 4 圆球分别与光滑平面以及粗糙平面接触的分析可知, 在  $\delta$  为正值的情况下, 对接触过程应用 G-W 模型, 可以发现得出的接触压力只对

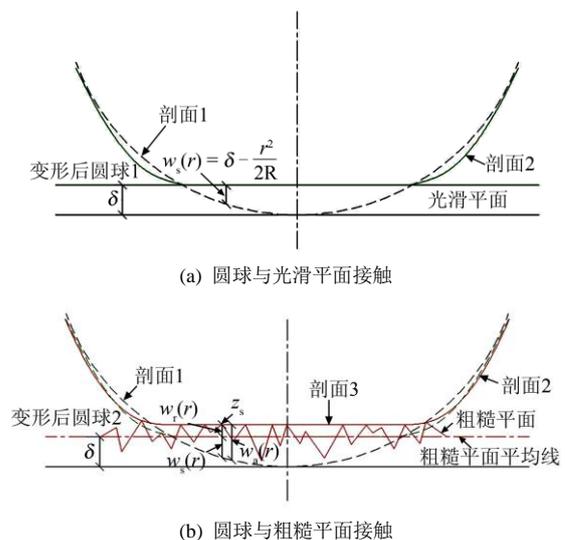


图 4 圆球与平面之间的接触

Fig.4 Contact between sphere and surface

应凸起导致圆球变形产生的压力，不包括重叠量  $\delta$  导致圆球变形产生的压力。

图 4(a)所示为圆球与光滑平面的接触，事先规定光滑平面与圆球最低点的重叠量为  $\delta$ ，变形后圆球为剖面 2，剖面 1 代表变形前圆球，可以看出曲面上距圆球中心线距离为  $r$  的一点处的变形为  $w_s(r) = \delta - r^2 / 2R$ ，下标 s 代表圆球与光滑平面接触。

图 4(b)所示为圆球与粗糙平面的接触，事先规定的重叠量  $\delta$  为正值，即粗糙平面平均线（中心线）高于圆球的最低点。图中折线代表粗糙平面，剖面 3 代表圆球与粗糙平面接触变形后的形状，剖面 2 代表圆球与光滑平面接触变形后的形状，剖面 1 代表未变形圆球。剖面 3 与剖面 2 之间的差值  $w_r(r)$  可以看作由表面粗糙度引起的变形。根据几何关系可以得到，G-W 模型中的圆球变形  $w(r)$ （参见 2.3 节）与这里  $w_r(r)$  表示的形变量是相同的。在  $\delta$  为正值的情况下，G-W 模型并未考虑重叠量  $\delta$  引起的压力。G-W 模型只考虑了粗糙平面平均高度与圆球最低点分离的情况。

在离散元模拟中，势必会出现  $\delta$  为正值的情况，根据 G-W 模型推导得出的接触定律显然不适合用于离散元模拟。

### 4 改进的 G-W 模型

为了在离散元模拟中引入更加合理的考虑颗粒表面粗糙度的接触模型，需要改进现有的 G-W 模型，提出更加适合离散元模拟接触模式的接触模型。上一节提到，圆球与粗糙平面接触时产生的变形可以分为两个部分，圆球与光滑平面接触产生的变形以及圆球与粗糙平面接触产生的变形。改进模型即从这点出发，将粗糙接触面分为上部凸起部分和下部光滑部分，分别考虑这两部分的压力与变形，光滑平面与圆球的接触问题直接应用赫兹定律求解，表面凸起引起的压力与变形由 G-W 模型解决。

当圆球与粗糙度为  $\sigma$ ，平均高度为  $\delta$  的粗糙平面接触时，最终的接触压力是圆球与高度为  $\delta$  的光滑平面接触产生的赫兹压力与圆球与粗糙度为  $\sigma$  的粗糙平面接触产生的 G-W 压力之和。下标 I、H、G 分别代表改进模型、赫兹模型和 G-W 模型：

$$p_I(r) = p_H(r) + p_G(r) \tag{21}$$

其中：

$$p_H(r) = \frac{2E}{\pi} \frac{a}{R} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \tag{22}$$

$$p_G(r) = C \int_{w_G(r)}^{+\infty} [z_s - w_G(r)]^{3/2} \phi(z_s) dz_s \tag{23}$$

当  $\delta$  为负值时，赫兹压力  $p_H$  显然为 0。当  $0 \leq \delta < \sigma$  时，可以认为粗糙部分的压力  $p_G$  也为 0，对于服从高斯分布的凸起高度  $z_s$ ，出现在  $[-3\sigma, +3\sigma]$  范围内的概率为 99.9%。

同样地，接触后变形也包括赫兹部分和 G-W 部分：

$$w_I(r) = w_H(r) + w_G(r) \tag{24}$$

其中

$$w_H(r) = \begin{cases} \delta - \frac{r^2}{2R}, & r \leq a \\ \frac{a^2}{\pi R} \left[ \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} + \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) \right], & r > a \end{cases} \tag{25}$$

$$w_G(r) = \frac{4}{\pi E} \int_0^{\bar{a}} \frac{t}{r+t} p_G(t) K(k) dt \tag{26}$$

在接触范围内对压力进行积分，可以得到最终的接触力为

$$P_I(\delta, \sigma, \mu) = P_H(\delta) + P_G(\sigma, \mu) \tag{27}$$

$$P_H(\delta) = \frac{4}{3} E \sqrt{R} \delta^{3/2} \tag{28}$$

$$P_G(\sigma, \mu) = \int_0^{\bar{a}} 2\pi r p_G(r) dr \tag{29}$$

在文献[2]中，我们通过极限分析讨论过 G-W 模型如何在表面光滑  $\sigma = 0$  的情况下退化为赫兹定律。相同的退化在改进模型中是很明显的，当  $\sigma = 0$  时， $z_s^* = w_G = p_G = P_G = 0$ ，以上式 (21)、(24)、(27) 直接退化为赫兹定律。

(1) 对于  $\delta$  型，改进模型的无量纲形式为

$$p_I^*(r^*, \alpha) = p_H^*(r^*) + p_G^*(r^*, \alpha) = \frac{2a^*}{\pi} \left(1 - \frac{r^{*2}}{a^{*2}}\right)^{1/2} + \mu \int_{w_G^*(r^*, \alpha)}^{+\infty} [z_s^* - w_G^*(r^*, \alpha)]^{3/2} \phi(z_s^*) dz_s^* \tag{30}$$

$$w_I^*(r^*, \alpha) = w_H^*(r^*) + w_G^*(r^*, \alpha) = \left(1 - \frac{r^{*2}}{2a^{*2}}\right) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{a}^*} \frac{t^*}{r^* + t^*} p_G^*(t^*, \alpha) K(k) dt^* \tag{31}$$

$$P_I^*(\alpha, \mu) = P_H^* + P_G^*(\alpha, \mu) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int_0^{\bar{a}^*} 2\pi r^* p_G^*(r^*, \alpha) dr^* \tag{32}$$

(2) 对于  $\sigma$  型，改进模型的无量纲形式为

$$p_1^*(r^*, \alpha') = p_H^*(r^*) + p_G^*(r^*, \alpha') = \frac{2a^*}{\pi} \left(1 - \frac{r^{*2}}{a^{*2}}\right)^{1/2} +$$

$$\mu \int_{w_G^*(r^*, \alpha')}^{z_s^*} [z_s^* - w_G^*(r^*, \alpha')]^{3/2} \phi(z_s^*) dz_s^* \quad (33)$$

$$w_1^*(r^*, \alpha') = w_H^*(r^*, \alpha') + w_G^*(r^*, \alpha') = \alpha' \left(1 - \frac{r^{*2}}{2a^{*2}}\right) +$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{a}^*} \frac{t^*}{r^* + t^*} p_G^*(t^*, \alpha') K(k) dt^* \quad (34)$$

$$P_1^*(\alpha', \mu) = P_H^*(\alpha') + P_G^*(\alpha, \mu) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int_0^{\bar{a}^*} 2\pi r^* p_G^*(r^*, \alpha') dr^* \quad (35)$$

以上由上标\*表示无量纲量与原参数之间的转换关系，可以参考我们之前的工作<sup>[2]</sup>。

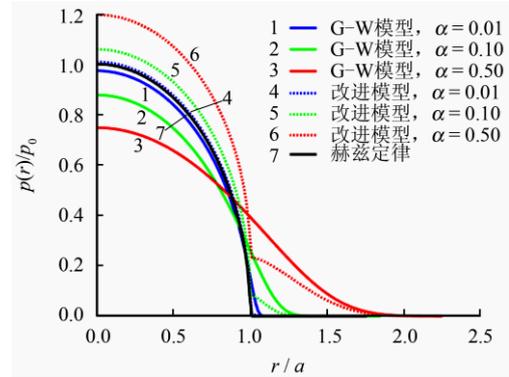
### 5 经典模型与改进模型比较

本节对比了 G-W 模型与改进模型计算得到的结果，具体数值实现过程可以参考文献<sup>[2]</sup>。因为最终的目的是要建立可以在离散元模拟中应用的接触模型，所以选择了  $\delta$  取值相同时的赫兹定律计算结果作为对比标准。在相同  $\delta$  的前提下，粗糙表面与圆球接触会产生更大的压力与变形。正如上文所解释的，G-W 模型忽略凸起下部体积变形的假设，导致了以下不合理结果的产生。通过以下讨论可以看出，改进模型更加适合作为推导离散元模拟接触定律的理论基础。

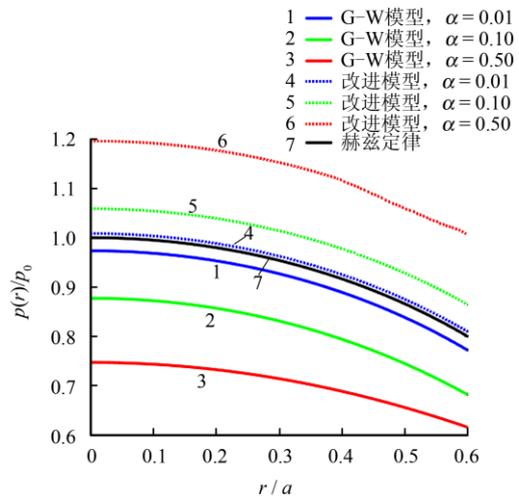
#### 5.1 与赫兹定律结果的对比

图 5(a)为分别通过赫兹定律、G-W 模型、改进模型计算所得的压力分布，粗糙度参数  $\alpha$  分别为 0.01、0.10、0.50 ( $\delta = 1$ )，图 5(b)为  $\alpha$  取值接近于 0 的局部放大图。各曲线分别代表不同  $\alpha$  取值时对应的压力分布，其中曲线 1~3 代表 G-W 模型的结果，曲线 4~6 代表改进模型的结果。曲线 7 为相同  $\delta$  情况下，由赫兹定律计算所得结果。可以看出，当  $\alpha$  取值不断减小，粗糙平面逐渐变得光滑的过程中，由两种模型计算所得的结果都逐渐趋近于赫兹定律的结果。不同在于，G-W 模型从下部向赫兹定律靠近，改进模型从上部向赫兹定律靠近。

图 6 显示了两种模型压力计算结果与赫兹定律计算结果的差值。同样地，曲线 1~3 代表 G-W 模型，曲线 4~6 代表改进模型。G-W 模型结果表示，表面粗糙度的增加会减小原接触范围内的压力，但



(a) 整体压力



(b) 局部放大

图 5 压力分布

Fig.5 Pressure distributions

会扩大接触范围。在原有接触面积边缘会有压力的突然增大。改进模型显示了不同的现象，当表面粗糙度增加时，接触范围逐渐增大，原有接触面积内的压力增加值基本相同，新增接触范围内的压力增加值随着距中心距离的增大而逐渐减小。与 G-W 模型相比，压力增大的幅度更为缓和。

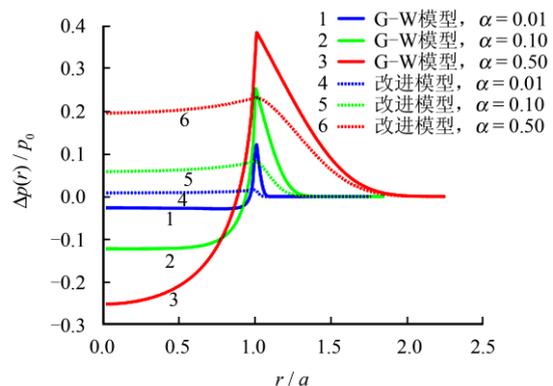
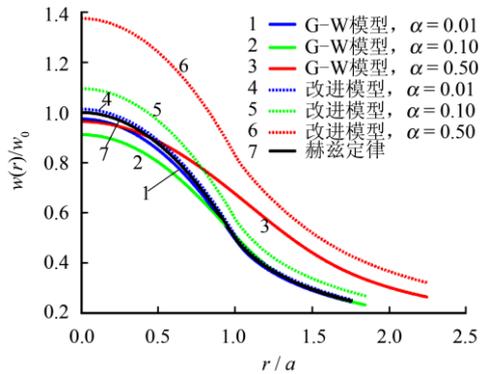


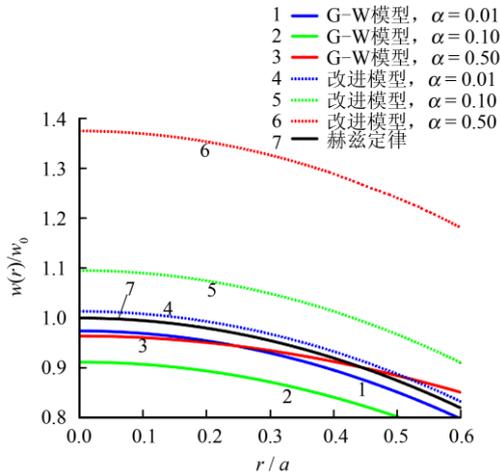
图 6 压力分布差值

Fig.6 Pressure distribution difference

图 7(a)为通过两种模型计算得到的变形分布，图 7(b)为局部放大图。对于 G-W 模型，随着粗糙度的增加，变形分布的变化表现出了不同的趋势。当表面粗糙度  $\alpha$  从 0.01 增加到 0.10，剖面中心线附近的变形减小，而当表面粗糙度  $\alpha$  从 0.10 增加到 0.50，相应的变形增大。而改进模型则显示了变形随着粗糙度的增加也逐渐增加。



(a)整体变形



(b)局部放大

图 7 变形分布  
Fig.7 Deformation distributions

图 8 显示了两种模型变形计算结果与赫兹定律计算结果的差值。如 G-W 模型的计算结果曲线 1~3 所示，表面粗糙度在不同的接触区域对变形的影响不同，在靠近剖面中心的区域，表面粗糙度使得该区域变形减小，这种减小随着接触位置的远离逐渐变为增加，在原接触范围的边缘达到最大值后再逐渐减弱。随着粗糙度的增加，其对变形的影响并不是单向变化的。曲线 4~6 显示的改进模型的结果表现出了更为明显的规律，粗糙度对变形影响的最大值出现在剖面中心点，随着接触位置的远离，影响逐渐减小。在原接触范围以外的区域，表现出了

更为明显的减弱。随着表面粗糙度的增加，这种趋势更加显著。

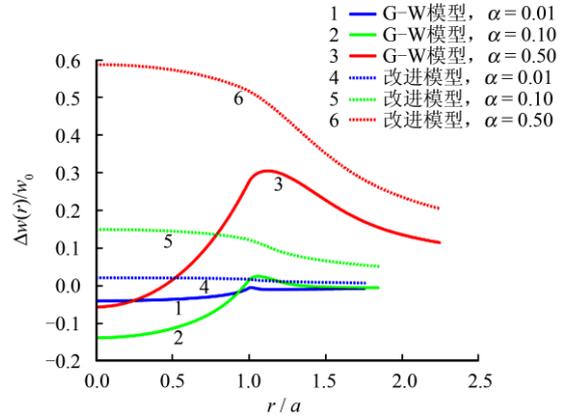


图 8 变形分布差值  
Fig.8 Deformation distribution difference

### 5.2 总接触力与粗糙度系数的关系

G-W 模型的一个不合理之处在于，当  $\alpha$  接近于 0 时，对于所有不同的  $\mu$ ， $P^*(\alpha, \mu)$  都小于 1。改进模型修正了这个缺陷。图 9 显示了  $P^*(\alpha, \mu)$  和  $P_1^*(\alpha, \mu)$  与不同粗糙度系数  $\alpha$ 、 $\mu$  的关系。同样地，曲线 1~3 代表 G-W 模型结果，曲线 4~6 代表改进模型结果。显然地， $P_1^*(\alpha, \mu)$  的所有值都大于 1。随着  $\mu$  增加， $P^*(\alpha, \mu)$  和  $P_1^*(\alpha, \mu)$  之间的差距逐渐减小。

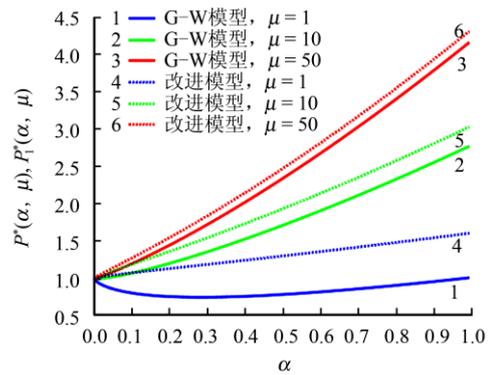


图 9 总接触力  
Fig.9 Total contact force

## 6 基于改进模型的接触定律

为了得到可以直接应用于离散元模拟的接触力与颗粒重叠量之间的显式关系，需要对由改进模型计算得到的数值结果进行曲线拟合。选用由无量纲形式总接触力计算得到的数值结果进行拟合，可以减少拟合工作量，提高拟合精度。计算公式为

$$P_1(\delta, \sigma, \mu) = P_H(\delta)P_1^*(\alpha, \mu) = P_H(\sigma)P_1^*(\alpha', \mu) \quad (36)$$

为了避免参数取值在数值求解中带来的困难，将输入参数的取值范围分为 3 种情况（情况 I， $0 \leq \alpha \leq 1$ ；情况 II， $0 \leq \alpha' \leq 1$ ；情况 III， $-3 \leq \alpha' \leq 0$ ）。相应的总接触力分别为  $P_{11}^*(\alpha', \mu)$ 、 $P_{12}^*(\alpha', \mu)$  和  $P_{13}^*(\alpha', \mu)$ 。总接触力需要在边界处满足附加的连续性条件：

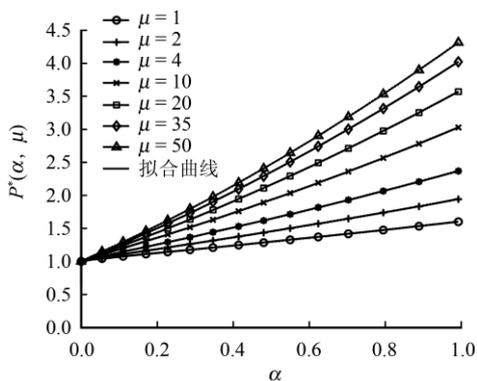
$$P_{11}^*(1, \mu) = P_{12}^*(1, \mu); P_{12}^*(0, \mu) = P_{13}^*(0, \mu) \quad (37)$$

拟合过程可以概括为两步：第 1 步选定一系列  $\mu$  的取值，对于给定的  $\mu$ ，进行相应  $P_G^*(\alpha, \mu)$  的曲线拟合，得到不同  $\mu$  值对应的形式一致、参数取值不同的表达  $\alpha$ （或  $\alpha'$ ）和  $P_G^*$  之间关系的拟合方程。第 2 步，通过拟合找到  $\mu$  与上述拟合方程参数之间的关系。

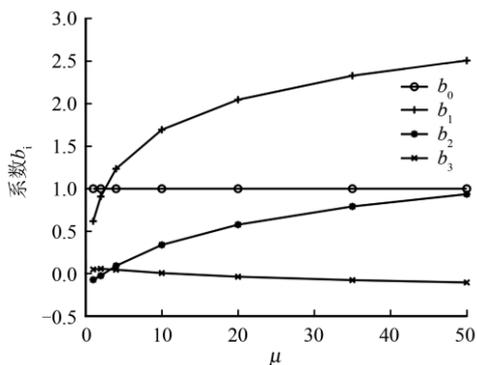
拟合所需的数值结果对应输入参数  $\mu$  的取值分别为 1、2、4、10、20、35、50，对于每一个  $\mu$  值，相应的  $\alpha$  为  $[0,1]$  范围内等距分布的 200 个值， $\alpha'$  为  $[-3,1]$  范围内等距分布的 1 000 个值。

### 6.1 情况 I

情况 I 下  $P_{11}^*$  的数值计算结果如图 10(a)所示，选择三次多项式对其进行拟合，注意该函数需要满



(a)  $P_{11}^*$  的三次多项式拟合曲线



(b)  $\mu$  与系数的关系

图 10 情况 I:  $0 \leq \alpha \leq 1$   
Fig.10 Case I:  $0 \leq \alpha \leq 1$

足连续性条件，即有

$$P_{11}^*(\alpha, \mu) = b_0(\mu) + b_1(\mu)\alpha + b_2(\mu)\alpha^2 + b_3(\mu)\alpha^3 \quad (38)$$

第 4 节中已经讨论过，改进模型在表面光滑  $\sigma = \alpha = 0$  的情况下可以退化为赫兹模型，所以有

$$P_{11}^*(0, \mu) = 1 + P_{G1}^*(0, \mu) = 1 \quad (39)$$

即有

$$b_0(\mu) = 1 \quad (40)$$

选择  $\alpha$  分别为 0、1/3、2/3、1 共 4 个点作为函数  $P_{11}^*(\alpha, \mu)$  的插值点，不同  $\mu$  值所对应的拟合曲线如图 10(a)所示。可以看出，拟合效果非常好。

多项式系数  $b_i (i=0, \dots, 3)$  与  $\mu$  的关系如图 10(b)所示，通过非线性最小二乘法拟合得到的拟合公式列于表 1 的表注中。

表 1 情况 I ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) 下不同  $\mu$  值对应的拟合多项式系数

Table 1 Coefficients of polynomial for different values of  $\mu$  of case I ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

$\mu$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	1.0	0.618 7	-0.069 4	0.051 3
2	1.0	0.907 8	-0.022 0	0.059 3
4	1.0	1.234 3	0.093 8	0.048 1
10	1.0	1.693 8	0.339 9	0.008 5
20	1.0	2.046 6	0.577 7	-0.034 4
35	1.0	2.329 1	0.791 9	-0.074 5
50	1.0	2.506 9	0.936 1	-0.101 8

注： $b_0 = 1.0$ ， $b_1 = 0.348 4 \ln \mu + 0.606 6 \mu^{0.164 2}$ ， $b_2 = 0.317 6 \mu^{0.378 2} - 0.413 5$ ， $b_3 = -0.074 54 / \mu - 0.173 7 \mu^{0.213 4} + 0.299 2$ 。

### 6.2 情况 II

情况 II 下  $P_{12}^*$  的数值计算结果如图 11(a)所示，选择二次多项式对其进行拟合，同样需要满足连续性条件，公式为

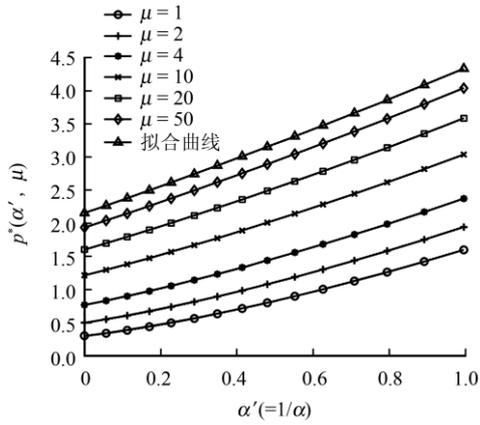
$$P_{12}^*(\alpha', \mu) = b_0(\mu) + b_1(\mu)\alpha' + b_2(\mu)\alpha'^2 \quad (41)$$

选择  $\alpha'$  分别为 0、1/2、1 共 3 个点作为函数  $P_{12}^*(\alpha', \mu)$  的插值点，不同  $\mu$  值所对应的拟合曲线如图 11(a)中所示，同样可以观察到非常好的拟合效果。

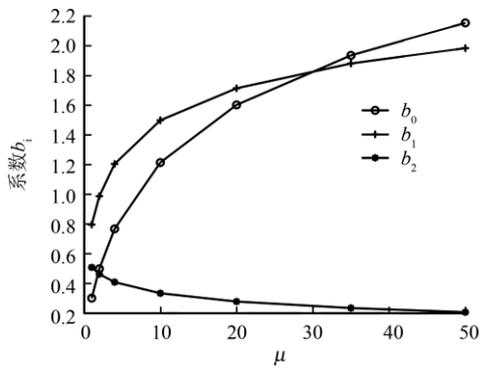
多项式系数  $b_i (i=0, \dots, 2)$  与  $\mu$  的关系如图 11(b)所示，相应的拟合公式列于表 2 的表注中。

### 6.3 情况 III

同样地，选择四次多项式对  $P_{13}^*$  进行曲线拟合，并且需要满足连续性条件：



(a)  $P_{12}^*$  的二次多项式拟合曲线



(b)  $\mu$  与系数的关系

图 11 情况 2 ( $0 \leq \alpha' \leq 1$ )  $P_{12}^* - \alpha'$ 、 $P_{12}^* - \mu$  曲线  
Fig.11 Curves of  $P_{12}^* - \alpha'$ ,  $P_{12}^* - \mu$  of case II ( $0 \leq \alpha' \leq 1$ )

表 2 情况 II ( $0 \leq \alpha' \leq 1$ ) 不同  $\mu$  值对应的拟合多项式系数  
Table 2 Coefficients of polynomial for different values of  $\mu$  of case II ( $0 \leq \alpha' \leq 1$ )

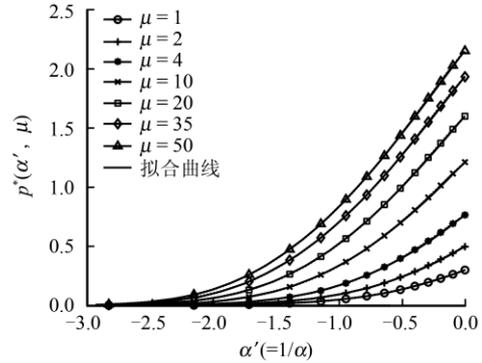
$\mu$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
1	0.301 1	0.796 0	0.508 2
2	0.498 9	0.987 7	0.463 0
4	0.767 2	1.204 4	0.409 0
10	1.214 1	1.498 6	0.333 9
20	1.602 2	1.713 9	0.278 1
35	1.935 7	1.881 0	0.234 2
50	2.154 4	1.984 5	0.206 6

注:  $b_0 = 0.228 4 \ln \mu + 0.276 8 \mu^{0.3913}$ ,  $b_1 = 0.268 8 \ln \mu + 0.787 3 \mu^{0.04508}$ ,  $b_2 = -0.077 8 \ln \mu + 0.513 2 \mu^{-0.0008}$ 。

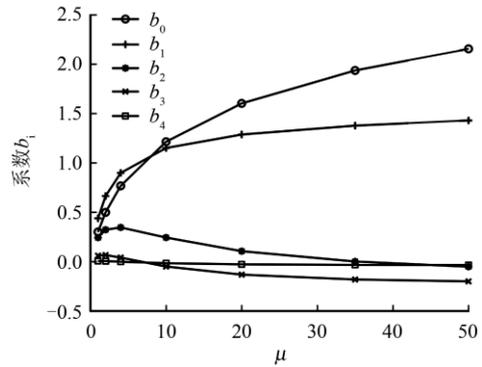
$$P_{13}^*(\alpha', \mu) = b_0(\mu) + b_1(\mu)\alpha' + b_2(\mu)\alpha'^2 + b_3(\mu)\alpha'^3 + b_4(\mu)\alpha'^4 \quad (42)$$

得到  $P_{13}^*(\alpha', \mu)$  所需的 5 个插值点  $\alpha$  分别为 -3、-9/4、-6/4、-3/4、0。拟合结果可见图 12 和表 3。  
综上所述, 最终基于改进模型的法向接触定律经验公式可以表示为

$$P_1(\delta, \sigma, \mu) = \begin{cases} P_H(\delta)P_{11}^*(\alpha, \mu), & \delta \geq \sigma \\ P_H(\sigma)P_{12}^*(\alpha', \mu), & 0 < \delta < \sigma \\ P_H(\sigma)P_{13}^*(\alpha', \mu), & -3\sigma < \delta < 0 \\ 0, & \delta < -3\sigma \end{cases} \quad (43)$$



(a)  $P_{13}^*$  的四次多项式拟合曲线



(b)  $\mu$  与系数的关系

图 12 情况 3 ( $-3 \leq \alpha' \leq 0$ )  $P_{13}^* - \alpha'$ 、 $P_{13}^* - \mu$  曲线  
Fig.12 Curves of  $P_{13}^* - \alpha'$ ,  $P_{13}^* - \mu$  of case III ( $-3 \leq \alpha' \leq 0$ )

表 3 情况 III 下 ( $-3 \leq \alpha' \leq 0$ ) 不同  $\mu$  值对应的拟合多项式系数  
Table 3 Coefficients of polynomial for different values of  $\mu$  of case III ( $-3 \leq \alpha' \leq 0$ )

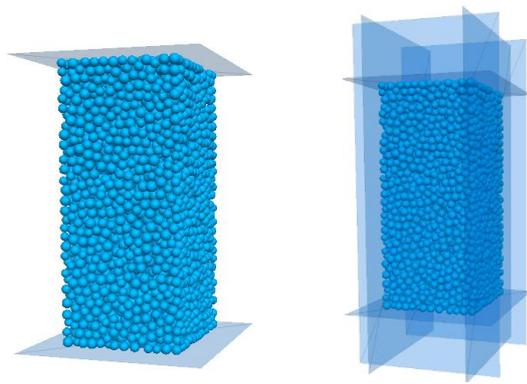
$\mu$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
1	0.301 1	0.438 5	0.243 1	0.060 4	0.005 7
2	0.498 9	0.663 8	0.322 7	0.066 5	0.004 7
4	0.767 2	0.898 1	0.346 0	0.040 8	-0.001 0
10	1.214 1	1.150 7	0.244 0	-0.049 8	-0.016 1
20	1.602 2	1.287 2	0.105 8	-0.131 6	-0.027 7
35	1.935 7	1.377 0	0.001 2	-0.181 0	-0.033 3
50	2.154 4	1.429 5	-0.051 6	-0.199 9	-0.034 5

注:  $b_0 = 0.228 4 \ln(\mu) + 0.276 8 \mu^{0.3913}$ ,  $b_1 = -0.286 2 / \mu + 0.191 \ln(\mu) + 0.709 5$ ,  $b_2 = -0.503 7 / \mu - 0.200 5 \ln(\mu) + 0.738 4$ ,  $b_3 = -0.234 7 / \mu - 0.147 3 \ln(\mu) + 0.226$ ,  $b_4 = -0.033 8 / \mu - 0.024 5 \ln(\mu) + 0.000 5 \mu + 0.038 7$ 。

## 7 算例分析

为了研究该定律中粗糙度系数对颗粒集合力学

性质的影响，通过开发用户自定义的接触模型，将该定律引入到离散元程序 PFC<sup>3D</sup> 中进行粗糙颗粒接触问题的数值模拟。模型文件的编写包括：某类的描述、成员函数的描述、模型的注册、模型与 PFC 之间的信息交换。本构模型以动态链接库文件的形式储存，在计算过程中主程序会自动调用用户指定的本构模型的动态链接库文件进行计算<sup>[15-16]</sup>。在此基础上，通过相关数值试验观察表面粗糙度对颗粒材料力学行为的影响。以下算例通过模拟压缩试验观察表面粗糙度对颗粒集合体在不同加载路径下力学特性的影响。



(a) 一维固结 (b) 三轴压缩

图 13 压缩试验

Fig.13 Compress tests

在高度为 50 cm，长度和宽度都为 25 cm 的立方体内生成试样。颗粒粒径同样满足高斯分布，平均半径为 1.5 cm，相对偏差为 0.25，颗粒总数为 5 225。采用两种不同的加载方式对试样进行压缩，即一维固结压缩和三轴压缩。对于一维固结试验，试样在初始状态下受到的各向同性压力值为 0.5 MPa (图 13(a))。通过在垂直方向移动上下墙体进行加载，侧向为周期边界。对于三轴压缩试验，试样初始的各向同性压力为 5 MPa，在各个方向试样都被墙体包围。模拟过程中，移动上、下墙体进行加载，并且通过伺服机制控制侧向墙体上的压力始终为 5 MPa (图 13(b))。

### 7.1 一维固结

试样在各向同性压力值为 0.5 MPa 时达到初始状态。试样表面粗糙度与初始孔隙率的关系如图 14 所示。随着表面粗糙度取值的增大，初始孔隙率从 0.536 增加到 0.544，表明试样逐渐变得松散。这一现象可以通过观察颗粒之间的法向接触力得到进一步的解释。

图 15 显示了不同表面粗糙度试样的法向接触力。第 6 节提到，随机法向接触定律被分为 3 种情

况，即情况 I:  $\sigma \leq \delta$ ; 情况 II:  $0 \leq \delta < \sigma$ ; 情况 III:  $-3\sigma \leq \delta < 0$ 。在图 15 中，蓝色对应情况 I 接触，红色对应情况 II 接触，绿色对应情况 III 接触。可以直观地看出，随着表面粗糙度的增大，属于情况 II 和情况 III 的接触逐渐增多。

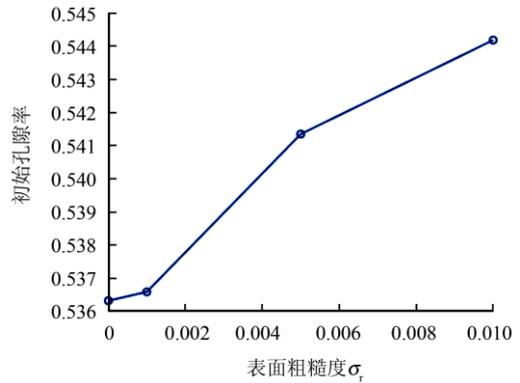
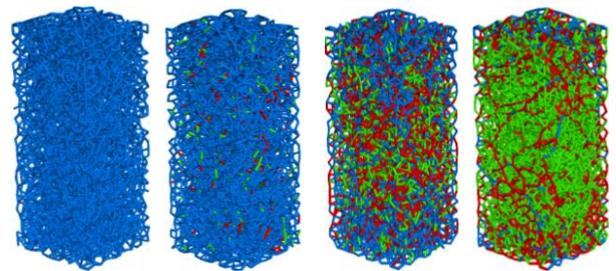


图 14 不同粗糙度对应的试样初始孔隙率

Fig.14 Initial porosity for different surface roughnesses



(a)  $\sigma_r = 0$  (b)  $\sigma_r = 0.001$  (c)  $\sigma_r = 0.005$  (d)  $\sigma_r = 0.01$

图 15 不同粗糙度对应的初始法向接触力

Fig.15 Initial normal contact for different surface roughnesses

表 4 列出了不同粗糙度情况下 3 种不同接触所占比例。对于  $\sigma_r = 0$  的光滑表面，法向接触定律退化为赫兹定律，所有接触都处于情况 I 的范围之内。对于  $\sigma_r$  分别为 0.001、0.005、0.010 的粗糙表面，位于情况 II 和情况 III 范围内的接触数量逐渐增大。对于  $\sigma_r = 0.001$  和  $\sigma_r = 0.005$ ，情况 II 和情况 III 中接触数量所占比例相差不大。对于  $\sigma_r = 0.010$ ，属于情况 III 的接触占比显著增大，达到 68.99%。

表 4 不同情况对应的接触数量比例

Table 4 Proportion of contact number for three cases

情况	接触数量比例 / %			
	$\sigma_r = 0$	$\sigma_r = 0.001$	$\sigma_r = 0.005$	$\sigma_r = 0.010$
I	100.00	92.25	41.17	7.51
II	0.00	3.16	29.11	23.83
III	0.00	4.59	29.72	68.66

图 16 描述了接触分布、平均法向接触力以及相

应的法向接触定律。实线 1 代表法向接触定律，虚线 2 代表平均法向接触力，虚线 3 将接触范围划分为对应 3 种接触情况的 3 个部分，条形图代表随颗粒重叠量变化的接触数量分布。由于各组试样的初始压力相同，平均法向接触力的大小基本相同，为  $12 \times 10^6$  N。平均法向接触力（虚线 2）和法向接触定律（实线 1）的交点给出了最多接触发生时的颗粒重叠量。当  $\sigma_r = 0.001$  时，交点位置位于情况 I 所在范围内，相应地，大多数接触属于情况 I。当

$\sigma_r = 0.005$  时，交点接近情况 II 和情况 III 的分界线，位于情况 II 和情况 III 的接触数量基本相同。当  $\sigma_r = 0.010$  时，交点位于情况 III 范围内，导致大多数接触属于情况 III。

对 4 组表面粗糙度取值不同的试样进行一维压缩，最终的轴向应变为 0.2。图 17、18 为轴向应变取值在 0.10、0.15、0.20 附近时的应力-应变曲线局部放大图，以及轴向应变为 0.10，0.15，0.20 时对应的法向接触分布图。3 种不同的轴向应变下，粗

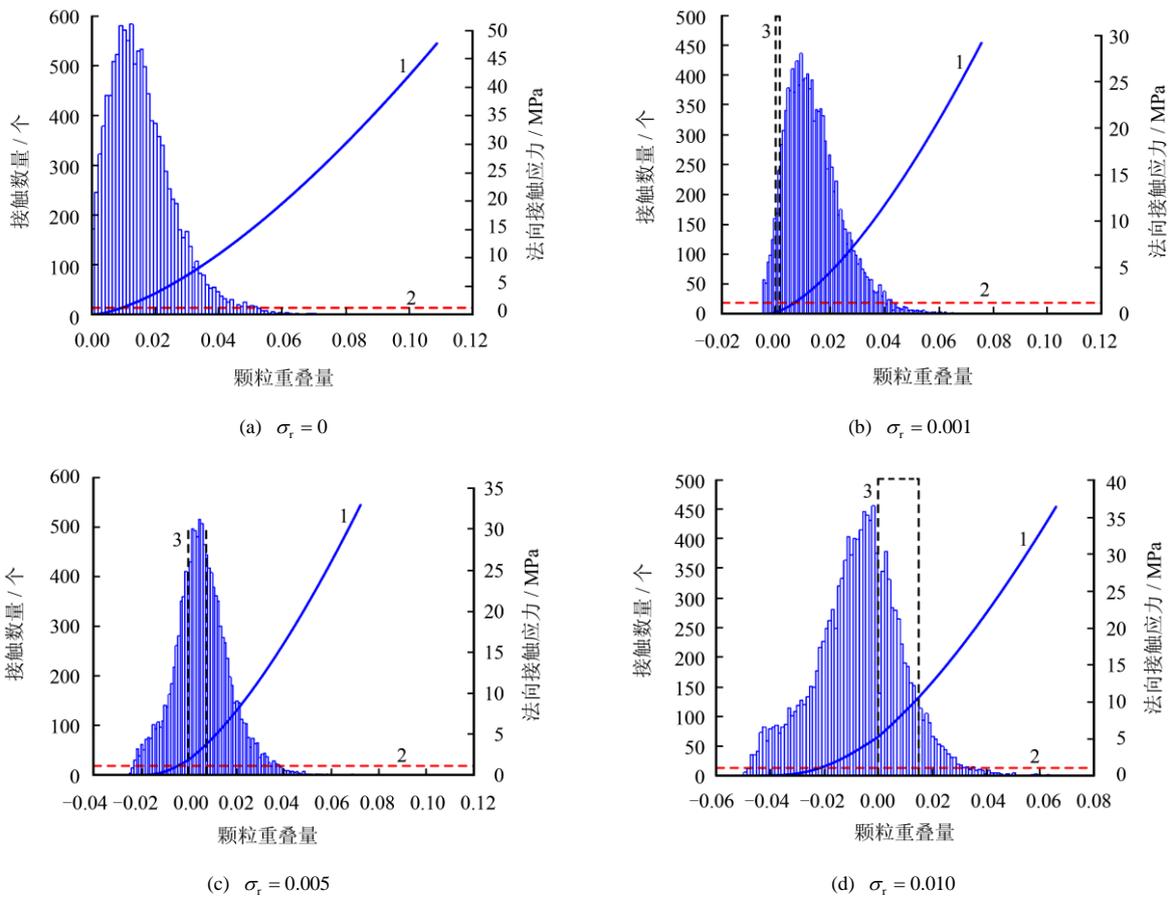


图 16 不同粗糙度对应的法向接触定律及法向接触分布

Fig.16 Normal contact laws and normal contact distributions for different surface roughnesses

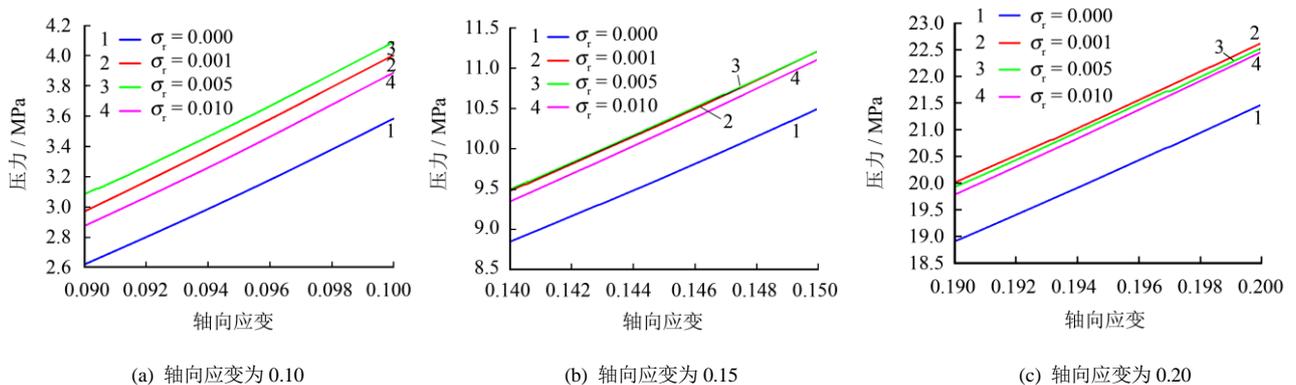


图 17 应力-应变曲线局部放大图

Fig.17 Details of stress-strain curves

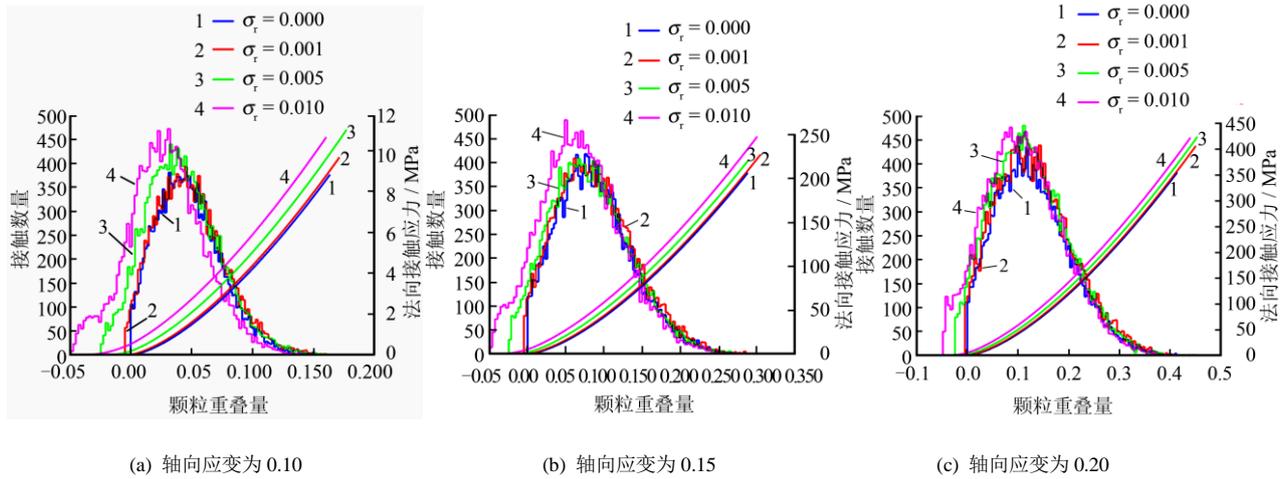


图 18 法向接触力分布  
Fig.18 Normal contact distributions

粗糙颗粒试样的压力均大于光滑颗粒试样的压力。对于不同粗糙度取值的试样，压力表现出了复杂的变化规律。为了解释这种规律，需要同时考虑相应的法向接触分布。颗粒之间的接触决定了试样的应力水平，接触数量和接触力的大小同时作出贡献。对于随机法向接触定律，3 种不同情况下接触力的增长速度是不同的。情况 I 对应最快的增长速度，情况 III 对应最慢的增长速度，情况 II 居中。当粗糙度增加时，情况 II 和情况 III 对应的接触范围同时增大。

在图 17(a)、图 18(a)中，轴向应变为 0.1， $\sigma_r = 0.001$  和  $\sigma_r = 0.005$  对应的压力大于  $\sigma_r = 0.010$  对应的压力。这是因为当  $\sigma_r = 0.010$  时，大多数接触属于情况 III，法向接触力较小。当  $\sigma_r = 0.001$  和  $\sigma_r = 0.005$  时，虽然两者的大多数接触都属于情况 II，但  $\sigma_r = 0.005$  时的压力大于  $\sigma_r = 0.001$  时的压力，这是因为较大的粗糙度在情况 II 时对应更大的法向接触力。

在图 17(b)、图 18(b)，17(c)、图 18(c)中，当轴向应变位于 0.15 和 0.20 附近时，3 种不同粗糙度对应的应力之间的差距逐渐减小。 $\sigma_r = 0.001$  和  $\sigma_r = 0.010$  对应的应力逐渐接近  $\sigma_r = 0.005$  对应的应力。对于  $\sigma_r = 0.010$  而言，这种增长主要是因为随着加载过程的进行，更多的接触从情况 III 的范围内进入到情况 II 的范围内。而对于  $\sigma_r = 0.001$ ，相对于  $\sigma_r = 0.005$  来说更小的情况 II 的范围，使得更多的接触更早地进入到情况 I。

### 7.2 三轴压缩

三轴压缩试样的初始应力水平为 5 MPa，是一维固结试验试样初始应力水平的 10 倍。不同的应力

水平导致了初始接触分布的不同。表 5 列出了不同粗糙度试样中接触数量在 3 种不同接触情况下所占比例。对于所有不同的粗糙度，大多数的接触都位于情况 I 的范围内。在 5 MPa 的压力下，试样的初始状态更加密实，大多数颗粒之间的重叠量已经达到情况 I 所对应的范围。当  $\sigma_r = 0.001$  时，情况 II 和情况 III 对应的接触数量总比例小于 1%，对于  $\sigma_r = 0.005$  和  $\sigma_r = 0.010$ ，这一比例为 6% 和 16%。

表 5 不同情况对应的接触数量比例

Table 5 Proportion of contact number for three cases				
情况	0	0.001	0.005	0.010
I	100.00	99.07	93.79	83.21
II	0.00	0.32	2.37	8.11
III	0.00	0.61	3.84	8.68

对 4 组试样进行三轴压缩，最终的轴向应变为 0.4。图 19 显示了不同表面粗糙度试样的应力-应变曲线。不同曲线之间的差距并不明显，这种现象由

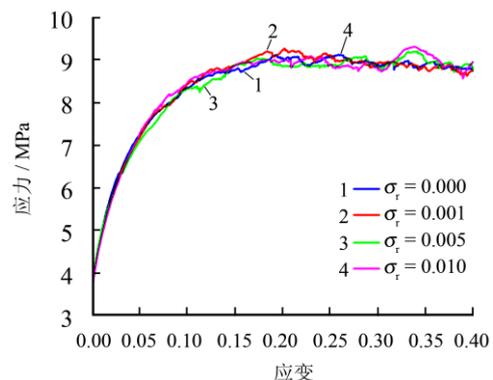
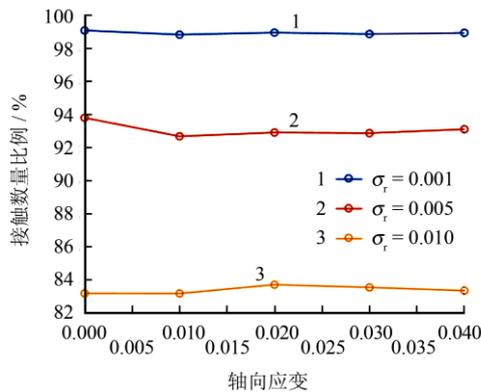
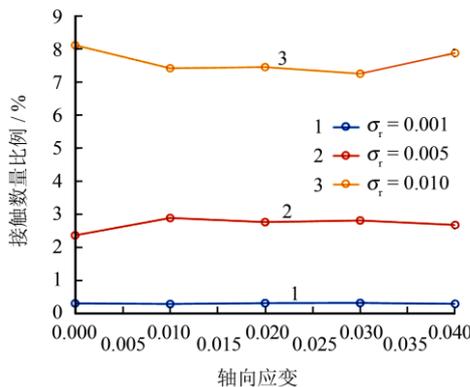


图 19 三轴压缩的应力-应变曲线  
Fig.19 Stress-strain curves under three-dimensional compression

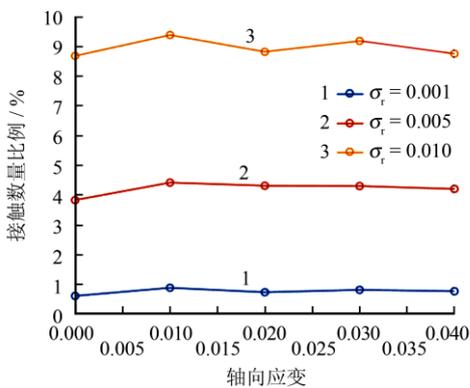
两种原因导致。其一,较高的初始应力水平使得各组试样的初始接触分布基本相同。其二,在加载过程中,侧向的压力始终为 5 MPa,使得试样可以一直维持基本一致的密实程度,在这种情况下,接触分布也会保持基本相同的状态。从图 20 中可以看出,不同情况接触数量所占比例随着轴向应变的增加基本不发生变化。



(a) 情况 I



(b) 情况 II



(c) 情况 III

图 20 3 种情况对应的接触数量比例与轴向应变的关系

Fig.20 Relationships between proportion of contact number and axial strain for three cases

## 8 结 论

(1) 在分析直接在离散元模拟过程中应用经典 G-W 模型计算粗糙颗粒接触力缺陷的基础上,提

出了分别考虑颗粒重叠光滑部分和粗糙部分压力与变形的改进模型,该模型能够合理地反映离散元模拟中颗粒接触的特点,也能够更加清楚地体现出表面粗糙度对接触结果的影响。

(2) 对比了经典 G-W 模型与改进模型计算得到的接触面应力分布,变形分布以及总接触力与颗粒重叠量的关系,根据改进模型得到的计算结果更加合理。

(3) 采用两步曲线拟合的方法,得到了对应于 3 种参数取值范围的随机法向接触定律,为改进模型在离散元模拟中的应用做好了准备。

(4) 将随机法向接触定律通过开发用户自定义接触模型引入到离散元计算软件中,进行数值模拟,可以直观地观察接触定律中的表面粗糙度系数对颗粒集合力学特性的影响。

(5) 在较小的初始应力水平下,表面粗糙度会增大颗粒试样的初始孔隙率,即要达到相同的密实程度,需要对粗糙颗粒组成的试样施加比光滑颗粒试样更大的压力。

(6) 表面粗糙度的影响对于排列较为松散的试样的影响更加明显。可以认为,对于排列紧密的试样来说,颗粒的变形量已经足够大,可以忽略表面粗糙度的影响。

## 参 考 文 献

- [1] CUNDALL P A, STRACK O D. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. *Geotechnique*, 1979, 29(1): 47-65.
- [2] FENG Y T, ZHAO T, KATO J, et al. Towards stochastic discrete element modelling of spherical particles with surface roughness: a normal interaction law[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 315: 247-272.
- [3] GARCIA X, LATHAM J P, XIANG J S, et al. A clustered overlapping sphere algorithm to represent real particles in discrete element modeling[J]. *Geotechnique*, 2009, 59(9): 779-784.
- [4] ZHOU W, MA G, CHANG X L, et al. Discrete modeling of rockfill materials considering the irregular shaped particles and their crushability[J]. *Engineering Computations*, 2015: 32(4): 1104-1120.
- [5] JENSEN R P, BOSSCHER P J, PLESHA M E, et al. DEM simulation of granular media—structure interface: effects of surface roughness and particle shape[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1999, 23(6): 531-547.