

# $K_0$ 条件下颗粒形状特征对砂土剪切模量的影响

罗 岚<sup>1,2</sup>, 夏唐代<sup>1,2</sup>, 仇浩淼<sup>1,2</sup>

(1. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

**摘 要:** 为了研究颗粒形状特征对砂土剪切模量的影响, 选取4种形状不同的砂样(福建标准砂和人工石英砂)作为研究对象, 通过扫描电镜获取其颗粒微观图像, 使用Image Pro Plus软件和自编Matlab程序提取试样颗粒的形状特征。采用改进的半径角和轮廓指数综合描述颗粒偏离圆或椭圆的程度以及棱角变化程度, 并基于这两个参数提出颗粒形状因子来综合表征颗粒的形状特征。之后在 $K_0$ 条件下通过弯曲元试验获得不同竖向荷载对应的4个试样的剪切模量, 试验结果表明, 砂土颗粒的形状因子与砂土的剪切模量具有良好的相关性。最后基于Hertz-Mindlin接触模型, 推导出引入形状因子的砂土剪切模量理论计算公式, 该计算公式与实测值吻合良好。

**关 键 词:** 颗粒形状特征; 砂土; 剪切模量; 形状因子; 图像处理; 弯曲元

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2018)10-3695-08

## Effect of particle shape on shear modulus of sand in $K_0$ condition

LUO Lan<sup>1,2</sup>, XIA Tang-dai<sup>1,2</sup>, QIU Hao-miao<sup>1,2</sup>

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China; 2. Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

**Abstract:** To study the effect of particle shape on shear modulus of sand, four sand samples with different particle shapes and grain sizes are prepared, including Fujian standard sand and artificial quartz sand. Image Pro Plus and Matlab program can extract the geometric parameters of particles from images of four samples obtained by scanning electron microscope. Two geometric parameters, radius angularity and form index, are improved and studied. Through statistical data of sand particle, the results show that radius angularity and form index describe different aspects of particle shape. As such, shape factor of sand is proposed based on radius angularity and form index to generalize particle shape. Then, a series of model tests in  $K_0$  condition is conducted to obtain the shear modulus of samples under different vertical stresses by bender element deployed in the sand. The tests show that shape factor is closely related with shear modulus of sand. Finally, based on Hertz-Mindlin contact model, shape factor is introduced to derive the formula of sand's shear modulus, which agrees well with the measured one.

**Keywords:** particle shape; sand; shear modulus; shape factor; image process; bender element

## 1 引 言

砂土的剪切模量作为岩土分析中的一个重要参数, 被广泛应用于判断砂土液化、分析动力荷载响应等方面。研究表明<sup>[1]</sup>, 砂土的剪切模量与土体的孔隙比、应力状态及颗粒的形状特征等因素有关。针对孔隙比和应力状态的影响, 很多学者已经开展了相关研究<sup>[2-3]</sup>, 而对于颗粒形状特征对砂土剪切模量的影响研究较少。同时, 一些学者基于图像处理技术对颗粒的形状特征开展了一系列的研究<sup>[4-5]</sup>, 表

明直接获取的单一形状参数很难完整描述颗粒的形状特征, 应结合不同的参数综合表征。综合考虑砂土颗粒各层面形状参数和剪切模量的研究并不多见, 而将其量化的相关理论计算公式则更罕见。

本次研究选取福建标准砂和人工石英砂共4个砂样作为研究对象, 采用扫描电镜获取颗粒的微观图像, 通过Image Pro Plus软件和自编Matlab程序获取试样多层面的形状特征参数。使用弯曲元获得 $K_0$ 状态下各个试样的剪切模量, 研究颗粒形状特征与砂土剪切模量的关系。最后将颗粒形状特征参数

引入 Hertz-Mindlin 接触模型, 推导砂土剪切模量的理论计算公式。

## 2 试验材料与方法

### 2.1 试验材料

本研究选取的试验材料为不同平均粒径的福建标准砂和人工石英砂, 共 4 个试样, 其主要矿物成分均为  $\text{SiO}_2$ 。4 种砂样被分别编号为 B1、B2、R1、R2, 其中 B1、B2 为福建标准砂, R1、R2 为人工石英砂。为了消除颗粒级配对试验结果的影响, 突出颗粒形状特征与砂土剪切模量的关系, 采用振动筛分机将上述 4 种砂样制备成级配不良的均粒土,  $C_u=1\sim 2$ 。试样信息及基本物理参数见表 1。

表 1 试样信息及基本物理参数

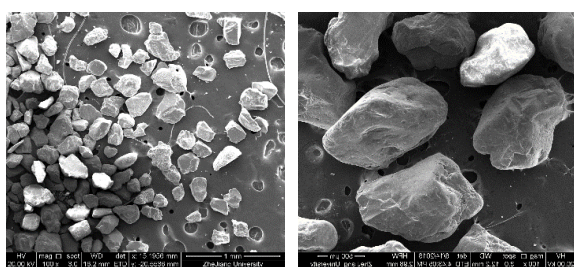
Table 1 Information and basic properties of the samples

试样信息	试样编号	颗粒相对密度 $d_s$	平均粒径 $d_{50}$	内摩擦角 $(^\circ)$	不均匀系数 $C_u$	极限孔隙比 $e_{\max}$	极限孔隙比 $e_{\min}$
福建标准砂	B1	2.659	0.156	29.3	1.63	0.947	0.662
	B2	2.655	0.710	28.4	1.43	0.858	0.614
人工石英砂	R1	2.651	0.133	28.8	1.94	0.855	0.480
	R2	2.650	0.704	32.4	1.44	0.836	0.544

注: 内摩擦角在相对密度为 0.8 时测得。

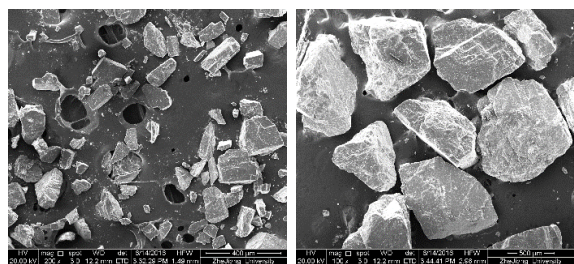
### 2.2 颗粒形状特征的获取与表征

对上述 4 种砂样分别选取大于 100 颗样本, 采用扫描电镜对样本进行扫描并获取微观图像。4 种砂样的颗粒扫描电镜图见图 1。



(a) B1

(b) B2



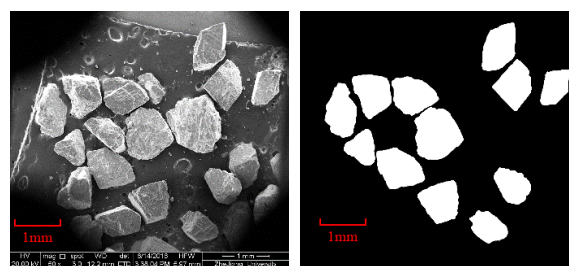
(c) R1

(d) R2

图 1 试样扫描电镜图像

Fig.1 SEM images of samples

通过电镜扫描得到的砂土微观颗粒图像为 4 波段图像, 并不能被计算机程序直接用于分析处理。本次研究选取试样在 50 倍放大倍数的扫描电镜图像, 采用 Image Pro Plus 软件对颗粒轮廓进行识别, 并将 4 波段图像转化为黑白二值图像。图 2 为 R2 砂样通过 Image Pro Plus 软件处理得到的黑白二值图像。Image Pro Plus 的颗粒自动轮廓循迹功能基于灰度阈值控制, 在处理相互重叠或紧贴的颗粒时可能形成较大的团粒从而影响颗粒形状参数的进一步提取。因此, 对于颗粒的重叠区域采用手动边界循迹加以修正, 并剔除轮廓不完整的颗粒。



(a) 扫描电镜图像

(d) 二值图像

图 2 R2 试样扫描电镜图像和二值图像 (放大 50 倍)

Fig.2 SEM image and binary image of sample R2 (enlarged 50 times)

Image Pro Plus 可以直接给出经过轮廓识别后的形状参数, 包括颗粒面积、分形维数、纵横比、周长、圆度等。表 2 列举了 Image Pro Plus 中常用的颗粒形状参数及其定义。

上述形状参数中, 分形维数、圆度等参数常被直接用来定义颗粒的粗糙度<sup>[6-7]</sup>。其中一些参数如纵横比、等效椭圆周长等参数基于颗粒轮廓的等效椭圆建立, 等效椭圆指与颗粒具有相同面积和相同一阶矩、二阶矩的椭圆, 其形心与颗粒形心重合。

表 2 Image Pro Plus 中常用的颗粒形状参数

Table 2 Common particle shape parameters in

Image Pro Plus

符号	名称	定义
Area	面积	颗粒轮廓包围的面积
Aspect	纵横比	颗粒等效椭圆的长短轴之比
D	直径	颗粒平均直径
F	分形维数	颗粒轮廓的分形维数
P	周长	颗粒轮廓的长度
P <sub>e</sub>	等效椭圆周长	颗粒等效椭圆的周长
Rd	圆度	颗粒轮廓的圆度

图 3 为 B2 试样某颗粒的等效椭圆示意图。以颗粒形心为极坐标中心, 在角度  $\theta$  处,  $R_\theta$  为颗粒轮

廓半径,  $REE_\theta$  为与颗粒所对应的等效椭圆的半径。基于极坐标及颗粒轮廓半径, AI-Rousan 等<sup>[8]</sup>提出了颗粒轮廓指数  $FI$  来描述颗粒的轮廓形状:

$$FI = \sum_{\theta=0}^{\theta=355} \frac{|R_{\theta+5} - R_\theta|}{R_\theta} \quad (1)$$

从轮廓指数的定义式可以看出, 当颗粒轮廓为圆时其值为 0, 而轮廓半径变化越剧烈时其值越大。与轮廓指数相类似, Masad 等<sup>[9]</sup>考虑等效椭圆半径提出了半径角量化指标, 其定义式如下:

$$RA = \sum_{\theta=0}^{\theta=355} \frac{|R_\theta - REE_\theta|}{REE_\theta} \quad (2)$$

完整圆或椭圆的半径角为 0, 与圆或椭圆偏离越大的颗粒半径角越大。

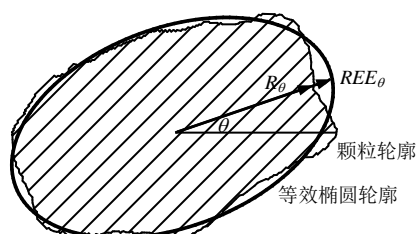


图 3 B2 试样某颗粒轮廓及等效椭圆

Fig.3 Particle shape and equivalent ellipse of one in sample B2

直接采用上述某单一参数来描述颗粒形状已在各种研究中得到广泛应用, 而 Santamarina 等<sup>[10]</sup>指出, 颗粒形状应该从球形度、棱角度、粗糙度 3 方面进行描述。刘清秉等<sup>[11]</sup>将颗粒形状参数分为轮廓全局面貌、磨圆度、表面微纹理结构 3 层, 使用 6 个参数综合描述颗粒的形状特征。参考上述研究成果, 本次研究选取半径角和轮廓指数两个参数, 分别用来描述颗粒偏离圆或椭圆的程度以及颗粒棱角变化特征。为了使描述更加精确, 两个参数均采用间隔  $1^\circ$  进行计算, 即  $RA_1$  和  $FI_1$ , 其表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} RA_1 &= \sum_{\theta=0}^{\theta=359} \frac{|R_\theta - REE_\theta|}{REE_\theta} \\ FI_1 &= \sum_{\theta=0}^{\theta=359} \frac{|R_{\theta+1} - R_\theta|}{R_\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$RA_1$  和  $FI_1$  并不能从 Image Pro Plus 中直接获取。本研究采用 Matlab 编制了图像参数提取程序, 从经过转化的黑白二值图像中提取出试样颗粒轮廓的  $RA_1$  和  $FI_1$ 。

## 2.3 砂土剪切模量的测定试验

### 2.3.1 试验设备及方法

本研究采用浙江大学软弱土与环境土工教育部

重点实验室研制的便携式弯曲元测试系统<sup>[12]</sup>, 在模型箱中测试不同竖向荷载下试样的剪切波速, 通过下式确定砂土的剪切模量  $G$ :

$$G = \rho V_s^2 \quad (4)$$

式中:  $\rho$  为试样的密度;  $V_s$  为剪切波速。图 4 为试验设备布置的示意图。为了消除边界面的反射和折射对剪切波速测定的影响, 采用大尺寸模型箱进行试验, 其尺寸为  $100 \text{ cm} \times 45 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  (长 $\times$ 宽 $\times$ 高)。

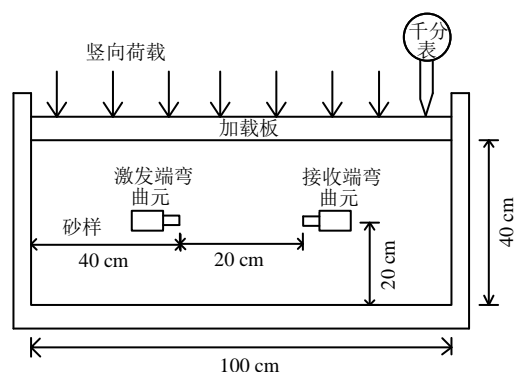


图 4 剪切模量试验设备布置图

Fig.4 Arrangement of instruments in shear modulus test

试样采用砂雨法进行制模来获得目标孔隙比。模型箱内壁每 5 cm 高设有一道水平控制线, 以保证制样的均匀性。试样总高度为 40 cm, 当制样到 20 cm 时, 按图 4 所示在模型箱中部布设弯曲元。

试样制模完成后, 在竖向荷载作用下从 0 kPa 逐级加载到 1 000 kPa, 加载速率为 50 kPa/min。加载到每级荷载时, 稳定 10 min 使砂样充分固结, 测量该级荷载下试样的剪切波速。加载板上装有千分表, 可以测量试样孔隙比的变化。为了保证试样处于  $K_0$  状态, 模型箱采用 5 cm 厚铝板并有 5 cm 厚加强铝肋条来限制砂土的侧向变形, 而加载板采用两层 5 cm 厚铝板中间夹 5 cm 厚铝肋条网的方式来保证刚度。

### 2.3.2 剪切波速的确定

对弯曲元获得的剪切波信号分析主要有时域分析和频域分析。根据 Yamashita<sup>[13]</sup>、顾晓强<sup>[14]</sup>等的试验结果, 本研究采用时域初达波法来判定剪切波在接收端弯曲元的到达点, 从而通过下式确定试样的剪切波速:

$$V_s = \frac{L}{t} \quad (5)$$

式中:  $L$  为激发端弯曲元到接收端弯曲元的距离;  $t$  为剪切波的传播时间。

在时域初达波法中, 如何判定剪切波的初达位置是得到准确剪切波速的关键, 而输入波形以及频率对接收到的剪切波形有显著影响。常用的输入波形有正弦波和方波。Blewett 等<sup>[15]</sup>通过大量试验发现, 正弦波的接收信号比方波更清晰, 因为方波到达接收端后在起振段便出现显著的变形导致波形畸变, 不能准确判断剪切波初达点, 而正弦波引起的变形较少。因此, 本研究采用正弦波作为输入信号。

对于接收端弯曲元, 最先到达的信号为近场项 P 波, 其极化方向与 S 波相反, 这将引发近场效应, 影响剪切波传播时间的判定。研究表明<sup>[16]</sup>, 尽可能提高  $L$  与剪切波长  $\lambda$  的比值可以有效减小近场效应, 获得更清晰的波形。EI-Sekelly 等<sup>[17]</sup>建议  $L/\lambda$  的值应大于 2。因此, 减小近场效应的影响可以从提高测试距离和激发波的频率两方面入手。

在三轴、共振柱等固定试样上的弯曲元试验, 由于测试距离固定, 只能通过提高激发频率来减小近场效应。顾晓强等<sup>[14]</sup>通过共振柱上的弯曲元试验指出信号频率高于 10 kHz 后输出信号基本稳定, 建议采用 10 kHz 作为激发频率。对于本次研究, 虽然可以同时提高测试距离和激发波的频率来减小近场效应的影响, 但是也需要考虑信号的强度。测试距离的增大会使接收信号减弱, 而激发波的频率则会影响弯曲元与土体之间的耦合以及波在试样中的散射。高频信号在试样中散射所引起的能量衰减大于低频信号, 会影响接收信号的强度。同时, 当弯曲元与土体发生共振时才能获得较强的信号。周燕国<sup>[12]</sup>通过试验证明, 当插入土中的弯曲元悬臂长度较短时, 弯曲元和土体的共振频率主要取决于弯曲元本身的特性; 对于长悬臂弯曲元, 共振频率主要取决于土体本身的刚度。三轴、共振柱等试验仪器上的试验高度较小, 弯曲元悬臂端通常只有 2~5 mm, 属于短悬臂, 而本次研究为了提高激发信号的强度, 采用了悬臂长度为 15 mm 的长悬臂弯曲元。

在每一级竖向荷载下, 以 6 kHz 激发频率得到的接收端弯曲元电压幅值  $U_0$  作为基准, 不同激发频率所对应的接收端弯曲元电压幅值  $U$  与  $U_0$  的比值  $U/U_0$  即最大相对幅值可以反映激发频率变化引起的接收端弯曲元信号幅值的变化。图 5 为 R1 试样在不同竖向荷载下不同激发波频率  $f$  所得到的接收波最大相对幅值  $U/U_0$ 。可以看出, 随着竖向荷载的升高, 土体刚度不断增加, 低频激发信号产生的接收信号的相对幅值降低, 而高频激发信号产生的接收信号的相对幅值升高, 产生最大相对幅值所需的

激发信号的频率逐渐升高。

综合上述分析, 本研究采用的激发端弯曲元到接收端弯曲元的距离  $L$  为 20 cm, 激发频率建议采用某一竖向荷载下能得到最大幅值接收信号的频率, 并在加载阶段逐步提高激发频率。图 6 为 R2 试样的典型 S 波信号, 可以看出, 近场效应已被控制在合理范围, 对剪切波的干扰较小, 且信号清晰。

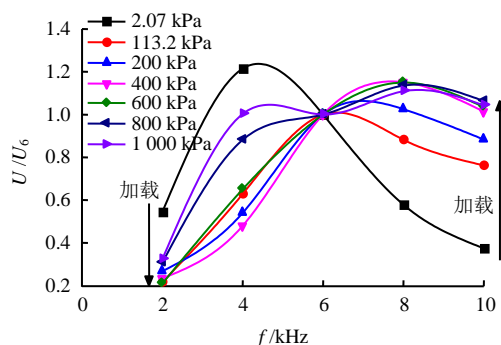


图 5 R1 试样不同竖向荷载下的激发频率-接收信号相对幅值图

Fig.5 Stimulating frequency-relative receiving amplitude curves of sample R1 under different vertical stresses

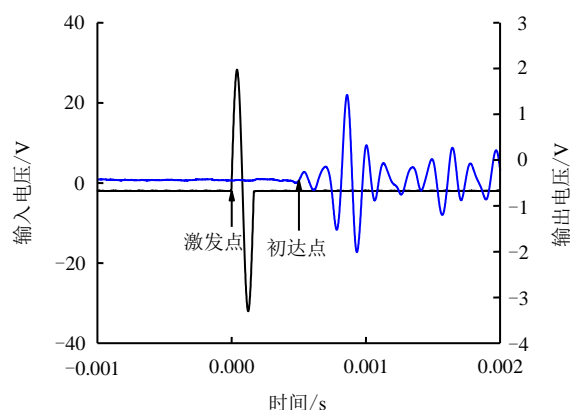


图 6 R2 试样 S 波信号

Fig.6 S-wave signal in sample R2

### 3 试验结果分析

#### 3.1 颗粒的形状特征

选取放大 50 倍的试样颗粒扫描电镜图像, 在 4 个试样图像中各随机选取 100 个颗粒, 分别提取颗粒轮廓指数和半径角指标, 将 100 个颗粒的平均值作为该试样的标准值, 结果如图 7 所示。

对比 4 个试样, R1 试样的  $RA_1$  和  $FI_1$  均最大, 即颗粒的形状轮廓与圆或椭圆偏差最大, 棱角变化最剧烈。对于 B1、B2 和 R2 试样,  $RA_1$  和  $FI_1$  并没有在变化上表现出一致性。随机选取 4 个试样中的 200 个颗粒对  $FI_1$  和  $RA_1$  的关系进行分析, 其对比结果如图 8 所示。



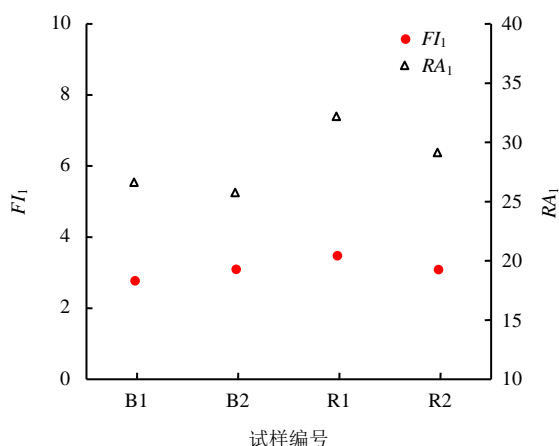


图 7 各试样的  $FI_1$  和  $RA_1$   
Fig.7  $FI_1$  and  $RA_1$  of four samples

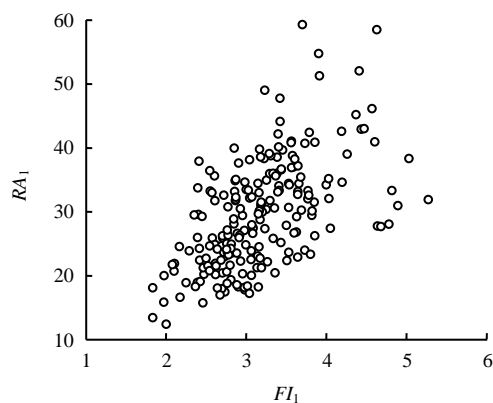


图 8  $FI_1$  和  $RA_1$  的相关性分析  
Fig.8 Correlation analysis between  $FI_1$  and  $RA_1$

从整体上看,  $RA_1$  和  $FI_1$  具有一定的相关性, 但是对于颗粒密集的区域, 即  $FI_1=2\sim4$  和  $RA_1=20\sim40$  的范围,  $RA_1$  和  $FI_1$  的相关性不明显。因此, 仅仅采用  $RA_1$  和  $FI_1$  两者之一并不能完整描述颗粒的形状特征, 应该综合颗粒整体轮廓和棱角特性两方面因素的影响。基于上述分析, 本研究定义了综合表征颗粒形状粗糙程度的形状因子  $\xi$ , 其定义式为

$$\xi = \frac{FI_1 \times RA_1}{100} \quad (6)$$

对于圆或椭圆颗粒, 其形状因子的值为 0; 颗粒的形状轮廓偏离圆或椭圆的程度越大, 棱角变化越剧烈, 则形状因子的值越大。

表 3 列出了 4 个试样的形状因子值。其中 R1 试样所对应的  $\xi$  最大, 其颗粒粗糙程度最大; B1 试样的  $\xi$  最小, 其颗粒粗糙程度最小。对比表 1 还可以发现, 颗粒粗糙程度越大, 其能达到的最小孔隙比越小, 这与 Cho 等<sup>[18]</sup>的研究结果相同。

### 3.2 颗粒形状特征对剪切模量的影响

本次研究主要测试了 4 个试样在密实状态下的

剪切模量, 其初始孔隙比及相对密实度见表 4。图 9 显示了竖向荷载  $\sigma_v$  从 0 kPa 加载到 1 000 kPa 的过程中 4 个试样孔隙比  $e$  的变化情况。加载开始阶段, 试样的孔隙比变化比较明显, 随着荷载的不断增大, 虽然孔隙比逐渐减小, 但是由于 4 种试样均处在密实状态, 其孔隙比变化不大。

表 3 试样的形状参数  
Table 3 Shape parameters of four samples

试样编号	$FI_1$	$RA_1$	$\xi$
B1	2.714 0	26.291	0.714
B2	3.037 8	25.420	0.772
R1	3.420 0	31.853	1.089
R2	3.031 0	28.800	0.873

表 4 试样的初始状态  
Table 4 Original state of test samples

试样编号	初始孔隙比	相对密实度/%	堆积状态
B1	0.711	82.66	密实
B2	0.624	96.01	密实
R1	0.482	99.50	密实
R2	0.553	96.90	密实

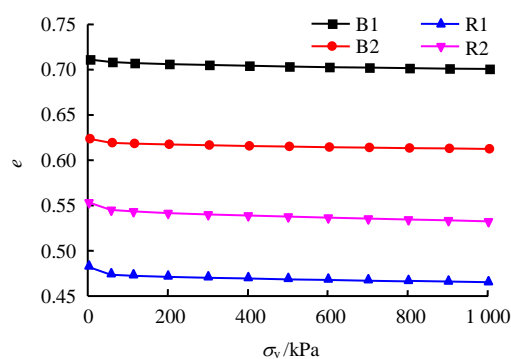


图 9 试样  $\sigma_v$  与  $e$  的变化关系  
Fig.9 Variation of  $\sigma_v$  with  $e$  of samples

孔隙比对砂土的剪切模量有显著的影响。Hardin 等<sup>[1]</sup>通过大量共振柱试验得出了砂土剪切模量的经验公式, 如下:

$$G = AF(e)P_a^{1-n}(\sigma'_0)^n \quad (7)$$

式中:  $A$ 、 $n$  为材料的试验参数;  $F(e)$  为孔隙比函数;  $P_a$  为大气压强;  $\sigma'_0$  为砂土平均有效固结应力。

4 个试样虽然均处在密实状态, 但其在试验过程中所对应的孔隙比范围不同。为了消除孔隙比的影响, 将  $F(e)$  对不同竖向荷载下的实测剪切模量进行归一化处理。根据姬美秀等<sup>[19]</sup>的研究, 本研究取  $F(e) = (2.973 - e)^2 / (1 + e)$ 。图 10 显示了 4 个试样的归一化剪切模量与竖向荷载的关系。从图中可以

看出,在同一竖向荷载下,R1 试样的归一化剪切模量最大,而 B1 试样的归一化剪切模量最小。4 个试样的归一化剪切模量与其形状因子呈现出良好的相关性,即在竖向荷载相同的条件下,颗粒形状粗糙程度越大,其形状因子越大,则对应的归一化剪切模量越大。

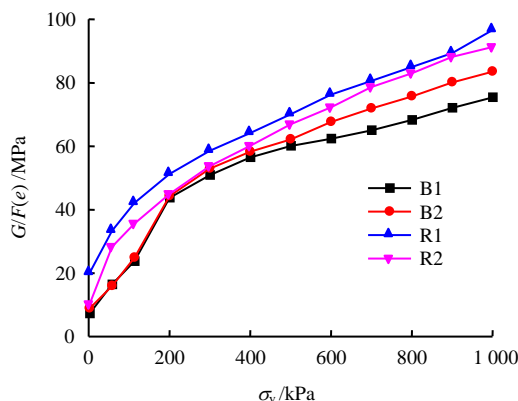


图 10 试样  $\sigma_v$  与  $G/F(e)$  的变化关系

Fig.10 Variation of  $\sigma_v$  with  $G/F(e)$  of samples

## 4 剪切模量理论计算公式推导

### 4.1 公式推导

根据 Hertz 接触模型,对于两个光滑球体的接触问题,其法向接触刚度  $D_n$  为

$$D_n = \frac{2E}{1-\nu^2} a \quad (8)$$

式中:  $E$  为球体材料的弹性模量;  $\nu$  为材料的泊松比;  $a$  为球体间接触面的半径。

Mindlin<sup>[20]</sup>基于 Hertz 模型推导了两粗糙球体间的切向接触刚度  $D_s$  为

$$D_s = \frac{4E}{(2-\nu)(1+2\nu)} a \quad (9)$$

Hertz 模型中,球体间接触面半径为

$$a = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu^2)rF_n}{4E}} \quad (10)$$

式中:  $r$  为球体的半径;  $F_n$  为球体间法向接触压力。

根据 Digby<sup>[21]</sup>基于随机堆积的等球体在静水压力中的研究,  $F_n$  可表示为

$$F_n = \frac{4\pi r^2 \bar{\sigma}(1+e)}{c} \quad (11)$$

式中:  $\bar{\sigma}$  为颗粒的平均围压;  $c$  为颗粒间接触配位数。

夏唐代等<sup>[22]</sup>通过拟合实测和计算机模拟结果得出了配位数  $c$  与孔隙比  $e$  之间的关系为

$$c = 0.023e^{\frac{1}{0.123(1+e)}} + 2.393 \quad (12)$$

研究表明<sup>[23]</sup>,颗粒形状的粗糙程度会影响颗粒间接触面积的大小,棱角的存在会使得实际颗粒间的接触面半径大于通过 Hertz 模型得出的接触面半径。基于上述研究成果,本研究将颗粒形状因子引入颗粒间接触面半径的确定中,本文假定颗粒形状因子在统计上各向同性,定义实际接触面半径  $a_0$  来计算颗粒的法向接触刚度和切向接触刚度,假定  $a_0$  与  $a$  的关系式为

$$a_0 = (1+k\xi)a \quad (13)$$

式中:  $k$  为一常数,其与颗粒形状特征的提取间距及颗粒材料种类有关。对于球体颗粒,实际接触面积与 Hertz 接触面半径相等。

基于粒径相同的各向同性散体介质假定,颗粒的宏观剪切模量与颗粒间接触刚度的关系如下<sup>[24]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{5cD_n}{4\pi r(1+e)} \left( \frac{\alpha}{3+2\alpha} \right) \\ \alpha &= \frac{D_s}{D_n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

结合式 (8) ~ (14),可得出考虑颗粒形状特征的剪切模量计算公式为

$$G = \frac{5(1+k\xi)(1-\nu)}{(1+e)(10-7\nu)} \sqrt[3]{\frac{3c^2 E^2 \bar{\sigma}}{\pi^2 (1-\nu^2)^2}} \quad (15)$$

### 4.2 理论计算与试验对比分析

通过式 (15) 可计算试验中 4 个试样在每级竖向荷载下的理论剪切模量。参考相关研究<sup>[25-26]</sup>,取砂土颗粒的弹性模量  $E=10$  GPa, 颗粒泊松比  $\nu=0.3$ 。平均围压  $\bar{\sigma}$  可根据下式计算:

$$\bar{\sigma} = \frac{(2K+1)\sigma_v}{3} \quad (16)$$

式中:  $K$  为侧向土压力系数。本研究中试样在试验过程中均处在  $K_0$  状态,因此,  $K$  可取静止土压力系数,即

$$K = 1 - \sin \varphi \quad (17)$$

式中:  $\varphi$  为砂土的内摩擦角,本次研究取 4 个砂样在相对密实度为 0.8 的实测内摩擦角,如表 1 所示。

通过理论计算公式与实测剪切模量拟合可以发现,当系数  $k=0.1 \sim 0.15$  时,两者吻合较好。图 11 给出了  $k=0.1$  时 4 个试样的理论计算剪切模量和实

测剪切模量的对比图, 其中 BJ1、BJ2、RJ1、RJ2 分别对应了 B1、B2、R1、R2 这 4 个试样的理论计算剪切模量。从图 11 可以发现, 加载开始阶段, 砂土剪切模量增加较快, 随着加载的进行, 剪切模量变化速度减小。考虑颗粒形状特征的砂土计算剪切模量与实测剪切模量拟合较好, 理论计算公式达到了良好的计算精度。

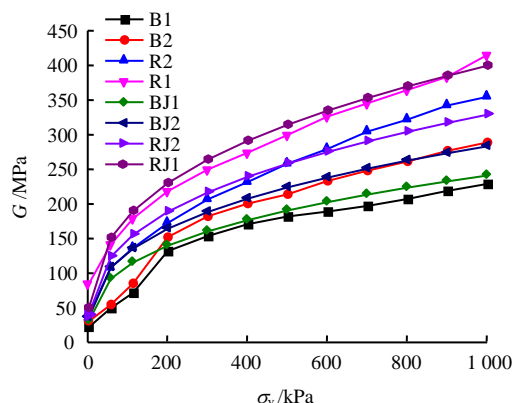


图 11 理论计算剪切模量与实测值的对比  
Fig.11 Comparison between calculated and measured results of shear modulus of four samples

## 5 结 论

(1) 对于大尺寸模型箱中的长悬臂弯曲元, 合理设置测试距离和激发信号的频率可以提高高应力条件下接收信号的清晰度, 减小近场效应, 提高剪切波速测试的精度。

(2) 将颗粒的形状特征划分为颗粒偏离圆或椭圆的程度以及颗粒棱角变化特征两层, 分别采用改进的颗粒半径角和轮廓指数来描述这两层特征, 综合两层特征参数提出了颗粒形状因子, 用以表征颗粒的粗糙程度。

(3) 砂土的归一化剪切模量和砂土颗粒的形状因子存在良好的相关性。颗粒的形状因子越大, 其颗粒偏离圆或椭圆的程度越大, 轮廓棱角变化越剧烈, 则砂土的归一化剪切模量越大。

(4) 在 Hertz-Mindlin 接触模型的基础上引入了颗粒形状因子, 推导出砂土剪切模量的理论计算公式。理论计算得到的砂土剪切模量和试验实测值吻合较好, 证明了本次研究的合理性。

## 参 考 文 献

[1] HARDIN B O, RICHART F E. Elastic wave velocities in granular soils[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1963, 89(1): 33—65.

[2] 庄海洋, 胡中华, 王瑞, 等. 南京饱和细砂液化后大变形条件下动剪切模量衰减特征研究[J]. *岩土力学*, 2017, 38(12): 3445—3452.  
ZHUANG Hai-yang, HU Zhong-hua, WANG Rui, et al. Shear moduli reduction of saturated Nanjing sand under large deformation induced by liquefaction[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(12): 3445—3452.

[3] 柏立懂. 荷载历史对砂土最大剪切模量影响的共振柱试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2011, 30(11): 2366—2374.  
BAI Li-dong. Effects of loading history on maximum shear modulus of sand by resonant column tests[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2011, 30(11): 2366—2374.

[4] KUO C Y. Correlating permanent deformation characteristics of hot mix asphalt with aggregate geometric irregularities[J]. *Journal of Testing and Evaluation*, 2002, 30(2): 136—144.

[5] HRYCIW R D, ZHENG J X, SHETLER K. Particle roundness and sphericity from images of assemblies by chart estimates and computer methods[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2016, 142(9): 5—19.

[6] 汪海年, 郝培文, 肖庆一, 等. 粗集料棱角性的图像评价方法[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2008, 38(4): 637—641.  
WANG Hai-nian, HAO Pei-wen, XIAO Qing-yi, et al. Digital image evaluation method for angularity of coarse aggregates[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2008, 38(4): 637—641.

[7] SOUZA D O C, MENEGALLI F C. Image analysis: Statistical study of particle size distribution and shape characterization[J]. *Powder Technology*, 2011, 214(1): 57—63.

[8] AI-ROUSAN T, MASAD E, MYERS L, et al. New methodology for shape classification of aggregates[J]. *Journal of the Transportation Research Board*, 2005, 1913: 11—23.

[9] MASAD E, LITTLE D, TASHMAN L, et al. Evaluation of aggregate characteristics affecting HMA concrete performance[R]. [S. l.]: [s. n.], 2003.

[10] SANTAMARINA J C, CHO G C. Soil behavior: The role of particle shape[C]//Proceedings of Skempton Conference on Advances in Geotechnical Engineering. London: Thomas Telford, 2004: 604—617.

- [11] 刘清秉, 项伟, BUDHU M, 等. 砂土颗粒形状量化及其对力学指标的影响分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 1): 190—197.
- LIU Qing-bing, XIANG Wei, BUDHU M, et al. Study of particle shape quantification and effect on mechanical property of sand[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.1): 190—197.
- [12] 周燕国. 土结构性的剪切波速表征及对动力特性的影响[D]. 杭州: 浙江大学, 2007.
- ZHOU Yan-guo. Shear-wave velocity-based characterization of soil structure and its effects on dynamic behavior[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007.
- [13] YAMASHITA S, FUJIWARA T, KAWAGUCHI T, et al. Interpretation of international parallel test on the measurement of  $G_{\max}$  using bender elements[J]. **Soils and Foundations**, 2009, 49(4): 631—650.
- [14] 顾晓强, 杨峻, 黄茂松, 等. 干砂弹性参数测定的弯曲-伸展元试验[J]. 岩土力学, 2015, 36(增刊 1): 220—224.
- GU Xiao-qiang, YANG Jun, HUANG Mao-song, et al. Measurement of elastic parameters of dry sand using bender-extender element[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(Supp. 1): 220—224.
- [15] BLEWETT J, BLEWETT I J, WOODWARD P K. Phase and amplitude responses associated with the measurement of shear-wave velocity in sand by bender elements[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2000, 37(6): 1348—1357.
- [16] ARROYO M, WOOD D M, GREENING P D. Source near-field effects and pulse tests in soil samples[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(3): 337—345.
- [17] EI-SEKELLY W, MERCADO V, ABDOUN T, et al. Bender elements and system identification for estimation of  $V_s$ [J]. **International Journal of Physical Modelling in Geotechnics**, 2013, 13(4): 111—121.
- [18] CHO G C, DODDS J, SANTAMARINA J C. Particle shape effects on packing density, stiffness, and strength: Natural and crushed sands[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2006, 132(5): 591—602.
- [19] 姬美秀, 陈云敏. 不排水循环荷载作用过程中累积孔压对细砂弹性剪切模量  $G_{\max}$  的影响[J]. 岩土力学, 2005, 26(6): 884—888.
- JI Mei-xiu, CHEN Yun-min. Effect of accumulated pore pressure on shear modulus  $G_{\max}$  of saturated fine sand during undrained cyclic loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(6): 884—888.
- [20] MINDLIN R D. Compliance of elastic bodies in contact[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1949, 16(3): 259—268.
- [21] DIGBY P J. The effective elastic moduli of porous granular rocks[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1981, 48(4): 803—808.
- [22] 夏唐代, 刘瑜, 吴明, 等. 基于颗粒接触理论的深层砂土剪切波速度[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(4): 99—103.
- XIA Tang-dai, LIU Yu, WU Ming, et al. Shear wave velocity in deep buried sand based on spheres-contact theory[J]. **Journal of Harbin Institute of Technology**, 2011, 43(4): 99—103.
- [23] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The elastic contact of rough spheres[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1967, 34(1): 153—159.
- [24] CHANG C S, CHAO S J, CHANG Y. Estimates of elastic moduli for granular material with anisotropic random packing structure[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1995, 32(14): 1989—2008.
- [25] 赵庆新, 孙伟, 郑克仁, 等. 水泥磨细矿渣粉煤灰颗粒弹性模量的比较[J]. 硅酸盐学报, 2005, 33(7): 837—841.
- ZHAO Qing-xin, SUN Wei, ZHENG Ke-ren, et al. Comparison for elastic modulus of cement, ground granulated blast furnace slag and fly ash particles[J]. **Journal of the Chinese Ceramic Society**, 2005, 33(7): 837—841.
- [26] WIDULIŃSKI L, KOZICKI J, TEJCHMAN J. Numerical simulations of triaxial test with sand using DEM[J]. **Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics**, 2009, 56(3): 149—171.