DOI：10.16285/j.rsm.2017.0258

二维接触问题的互补算法及工程应用

林 姗[1,2]，李春光[1]，孙冠华[1]，王水林[1]，杨永涛[1]

（1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室，湖北 武汉 430071；2. 中国科学院大学，北京 100049）

摘 要：接触问题是一种常见的非线性问题，如何能够很好地模拟接触面的变形及受力特性，以及实现对变形体间的接触问题的真实模拟是该领域研究的难点问题。基于二维接触问题的实际物理意义，分别在法向和切向建立等价的互补模型。用非线性互补函数（NCP）中的 Fischer-Burmeister（FB）函数将互补函数模型转化为非光滑方程组表达，用常规的 Newton 法求解。同时，基于高斯积分法可以用较少的积分点达到较高的精度，为了进一步提高求解精度，改善不连续的通病，对面-面接触模型在高斯点上对接触面进行处理，可通过调节积分点数目对求解精度进行控制，方法易于理解，实现方便。在此基础上建立二维接触有限元模型，通过一系列工程算例验证该方法的可行性与有效性。结果表明，与 ABAQUS 有限元的计算结果相比，该方法有着较高的精度，更真实地反映问题的实际。

关 键 词：互补理论；接触问题；有限元；工程应用

中图分类号：TU 45 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 10－3863－12

Complementary algorithm for 2D contact problems and its engineering application

LIN Shan[1,2], LI Chun-guang[1], SUN Guan-hua[1], WANG Shui-lin[1], YANG Yong-tao[1]

（1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049 China）

Abstract: Contact problem is one of the common non-linear problems. How to simulate the deformation and strength characteristics of the contact surface and realize the real simulation of the contact problem between deformers is a difficult problem in this field. Based on the physical meaning of the 2D (2 dimensional) contact problems, their equivalent complementary models are established in normal and tangential directions respectively. Then a system of non-smooth equations is employed to describe the complementary models by Fischer-Burmeister (FB) function in the NCP function, which can be solved by the conventional Newton algorithm. In addition, good accuracy of the solution can be obtained by a small number of integration points based on the Gauss integration. In order to improve its accuracy and remove its discontinuity, a procedure of the contact surface at the Gauss point is employed in the surface-to-surface contact model, in which the accuracy of the solution can be controlled by adjusting the number of integration points. The procedure is easy to understand and convenient to implement. Based on this, a 2D contact finite element model is established, and the feasibility and effectiveness of the method are verified by some engineering examples. The results show that the proposed procedure has a higher accuracy and more realistic reflection of the actual problem than ABAQUS finite element method.

Keywords: complementarity theory; contact problems; finite element; engineering applications

1 引 言

接触问题在工程中非常普遍，接触问题广泛存在于岩土工程、建筑结构、水利、机械等实际工程中。接触问题求解的关键是真实地模拟对结构的力学行为有重要影响的不连续面，即研究变形体之间的接触问题[1−3]。同时接触问题有许多力学模型，这些力学模型对应于相应的数学模型，选择不同等价模型来求解，得到不同的效果[4−5]。对于复杂的接触问题，求解的关键是要建立一个尽可能反映工程实

收稿日期：2017-02-20
基金项目：国家自然科学基金(No. 11572009，No. 41472289)；国家自然科学基金青年基金(No. 51609240)。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (11572009, 41472289) and the National Natural Science Foundation for Young Scientists of China (51609240).
第一作者简介：林姗，女，1988 年生，博士研究生，主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: lin_shan@163.com
通讯作者：孙冠华，男，1982 年生，博士，研究员，主要从事计算岩土力学和边坡稳定性分析理论与方法等方面的研究工作。E-mail: sun_2001@163.com

际结构接触性质的数学、力学模型。

20 世纪 30 年代 Signorini[6]给出了单边接触问题的一般表达式，Fichera[7]证明了 Signorini 接触问题解存在的唯一性。对于二维接触问题，Ohtake 等[8]从变分原理出发，建立了罚有限元方程，用于求解无摩擦的弹性接触问题。Wriggers[9]、Heegaard[10]、Simo[11]等由变分不等式出发，建立了增广的拉格朗日法，且由变分不等式讨论其解的存在性和唯一性。对于互补算法及其理论在接触问题中的应用，Conry 等[12]采用线性规划法计算齿轮接触线上荷载的分布。陈国庆[13–14]、Leung[15]、李学文[16]、宣兆成[17]等将含有互补关系的接触约束条件和库仑摩擦定律转化为等价的非光滑方程，从而建立了摩擦接触问题的非光滑方程组模型，先后采用了磨光方程法及非光滑方程组法对模型求解。Bathe[18]、Christensen[19]等将接触问题中的所有不等式约束（即法向约束条件和摩擦条件）用光滑的约束函数来表达，将不等式约束变成等式约束，用 Newton-Raphson 迭代法求解。Christensen 等[19]首先利用 NCP 函数，将接触摩擦条件用等价的半光滑方程表示，对二维摩擦接触问题给出了非负变量作为约束的包含互补条件的光滑方程组提法。

随着有限元算法和计算技术的快速发展，使得计算机数值模拟接触的全过程逐渐成为 CAE 的一个重要组成部分，大型结构分析商业软件（ANSYS、ABAQUS、MSC. MARC、ADINA、LS-DDYNA3D 等）中装入拉格朗日乘子法、罚函数法、增广拉格朗日乘子法等迭代法求解。罚函数法的优点是实现简单，且不增加未知数，然而其是一种工程近似方法，允许接触体之间出现微小嵌入，选取的罚参数对接触力的收敛性和精度有很大影响。拉格朗日乘子法能精确满足接触条件，但会增加系统方程的维数和求解难度。增广拉格朗日乘子法与罚函数方法一样，其求解精度同样依赖于罚参数值的大小。上述方法的计算结果有时与实际工程的吻合度不高[20–22]。

接触问题属于非线性问题，与其他方法相比，基于互补方法的有限元法在解决这类非线性问题上优越性明显，计算结果精度高，结果与实际工程的吻合度好。本文主要基于互补模型对接触问题进行求解，建立了用 ϕ_{FB} 函数表达的互补模型。由于积分点的数目与高斯求积的精度及节点力求解的准确性密切相关，本文尝试在高斯点上实现对接触面的处理，编制了相应的程序，并将该方法用于求解工程中的接触面有限元计算问题。

2 二维接触问题

2.1 二维接触问题描述

许多力学的接触问题包括接触体的大位移，因此，在考虑接触问题时要充分考虑接触体的变形。对于二维问题，如图 1 所示的接触体系[23]，两者所含区域分别为 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$，记为 $\Omega=\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)}$。一般接触边界可分为应力边界 $S_{\mathrm{f}1}$、$S_{\mathrm{f}2}$，位移边界 $S_{\mathrm{u}1}$ 和 $S_{\mathrm{u}2}$，可能发生接触的 $S_{\mathrm{c}}=S_{\mathrm{c}1}+S_{\mathrm{c}2}$，$S_{\mathrm{c}}$ 定义为 $S_{\mathrm{c}1}$ 和 $S_{\mathrm{c}2}$ 所有接触对接触点中点的连线。可建立如图 1 所示的局部坐标系 $(n,\ s,\ t)$。

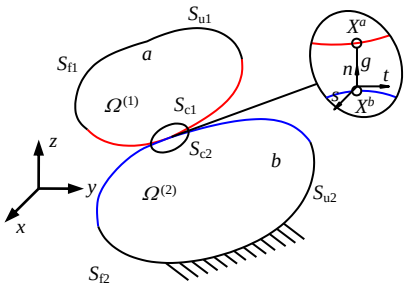


图 1 两物体间接触示意图

Fig.1 Schematic diagram of the contact between two objects

对于 Ω，在任何情况下两物体间隙 g 始终满足非穿透条件（非侵入条件），即

$$g=g_0+(u_i^a-u_i^b)n_i^b\geqslant 0 \tag{1}$$

式中：u_i^a 为接触点对应的位移；g_0 为初始间隙 $g_0=(x_i^a-x_i^b)n_i^b$，x_i^a 为相应的接触点坐标。

两物体未发生接触时，满足

$$g(x)\geqslant 0,\ -\sigma_n=0 \tag{2}$$

两者发生接触时，满足

$$g(x)=0,\ -\sigma_n\geqslant 0 \tag{3}$$

两者刚发生接触时，满足

$$g(x)=0,\ -\sigma_n=0 \tag{4}$$

法向接触力为

$$\sigma_n^{\Omega}=\sigma_{ij}^{\Omega}n_i^{\Omega}n_j^{\Omega} \tag{5}$$

式中：σ_n 为法向接触力，沿用弹性力学拉正压负的规定；σ_{ij}^{Ω} 为体内应力；n_i^{Ω} 为接触边界上的外法线。在法向满足不受拉条件：$-\sigma_n\geqslant 0$。

在切向，往往符合 Coulomb 摩擦定律，即

$$|\tau| \leqslant c - \mu\sigma_n \tag{6}$$

式中：τ 为接触面上的摩擦力，$|\tau| = \sqrt{(\tau_s^2 + \tau_t^2)}$，$\tau_s$、$\tau_t$ 分别为接触面上 s 和 t 方向上的摩擦力；c 为黏聚力；μ 为摩擦系数，它与摩擦角 φ 之间的关系为 $\mu = \tan\varphi$。

两接触物体在接触点上受到的切向力可用应力表达为

$$\tau_j^a = \sigma_{ij}^a n_j^a - \sigma_n^a n_i^a \tag{7}$$

因此，

$$|\tau_j^a| \leqslant c - \mu\sigma_n \tag{8}$$

两物体切向无相对滑移时，满足：

$$|\Delta u_t| = 0, c - \mu\sigma_n - |\tau_j^a| \geqslant 0 \tag{9}$$

式中：Δu_t 为两接触物体相对滑动距离。

两者切向发生相对滑移时，满足

$$|\Delta u_t| \geqslant 0, c - \mu\sigma_n - |\tau_j^a| = 0 \tag{10}$$

2.2　二维接触的等价互补函数模型

对于接触的法向：

$$\left.\begin{array}{c} g \geqslant 0 \\ -\sigma_n \geqslant 0 \\ g\sigma_n = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

利用互补函数，可以将式（11）呈现的互补关系用等价的互补方程（法向接触条件）描述为

$$\phi(g, -\sigma_n) = 0 \tag{12}$$

式（12）中函数 ϕ 是用来描述互补关系的互补函数，即如果对于任意的 $(x, y) \in R^2$，函数 ϕ：$R^2 \to R$ 满足 $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow [(x, y) \geqslant 0 \text{且} xy = 0]$，使函数 ϕ 等于 0 的点集恰好是两非负半轴，则称函数 ϕ 为互补函数[24]。

切向接触问题不等式中存在着绝对值符号，而绝对值函数是非线性函数，且导数不连续，因此，绝对值符号的存在明显增加了问题的非线性程度。

当 $\tau_t^a \geqslant 0$ 时，表示物体 a 在接触面上所受到的剪切应力方向与坐标轴 t 的正方向一致，而此时，物体 a 相对于物体 b 的相对位移则与受到的剪应力方向相反，即 $\Delta u_t \leqslant 0$，本构关系为

$$\left.\begin{array}{c} \tau_t^a \leqslant c - \mu\sigma_n \\ \Delta u_t \leqslant 0 \\ (c - \mu\sigma_n - \tau_t^a)\Delta u_t = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

其 Coulomb 条件图形如图 2 所示。

反之，当 $\tau_t^a \leqslant 0$ 时，表示物体 a 在接触面上所受到的剪切应力方向与坐标轴 t 的正方向相反，而此时，物体 a 相对于物体 b 的相对位移则与受到的剪应力方向相反，沿 t 轴的正方向，即

$$\left.\begin{array}{c} -\tau_t^a \leqslant c - \mu\sigma_n \\ \Delta u_t \geqslant 0 \\ (c - \mu\sigma_n + \tau_t^a)\Delta u_t = 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

其 Coulomb 条件图形如图 3 所示。

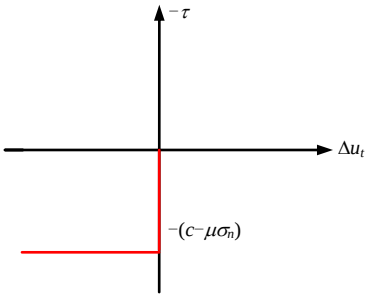


图 2　$\tau_t^a \geqslant 0$ 时的 Coulomb 条件

Fig.2　The Coulomb conditions of $\tau_t^a \geqslant 0$

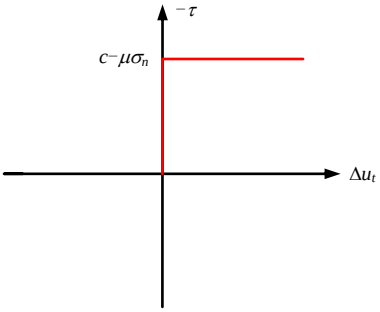


图 3　$\tau_t^a \leqslant 0$ 时的 Coulomb 条件

Fig.3　The Coulomb conditions of $\tau_t^a \leqslant 0$

上述两种情况仅有一种发生，借鉴线性规划中对不等式约束带处理方法，引入两个非负独立变量 Δu_t^- 和 Δu_t^+ [22, 25]，对于 1 种情况，$\Delta u_t^- \geqslant 0$，使得此时 $\Delta u_t = -\Delta u_t^- \leqslant 0$；对于第 2 种情况，$\Delta u_t^+ \geqslant 0$，使得此时 $\Delta u_t = \Delta u_t^+ \geqslant 0$。

此时，两种情况下的本构分别变为

$$\left.\begin{array}{c} c - \mu\sigma_n - \tau_t^a \geqslant 0 \\ \Delta u_t^- \geqslant 0 \\ (c - \mu\sigma_n - \tau_t^a)\Delta u_t^- = 0 \end{array}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{c} c - \mu\sigma_n + \tau_t^a \geqslant 0 \\ \Delta u_t^+ \geqslant 0 \\ (c - \mu\sigma_n + \tau_t^a)\Delta u_t^+ = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

这样就把Coulomb条件转化为两个等价的互补函数来处理。

即

$$\phi(\Delta u_t^-, c-\mu\sigma_n-\tau_t^a)=0 \tag{17}$$

$$\phi(\Delta u_t^+, c-\mu\sigma_n+\tau_t^a)=0 \tag{18}$$

从而降低了问题的非线性程度。

$$\Delta u=\Delta u_t^+-\Delta u_t^- \tag{19}$$

两组互补函数共引入两个独立变量，与系统其他方程组一起构成定解问题。

互补问题包含着不等式约束，通过非线性互补函数，可以将互补问题转化为等价的非线性方程组来求解。如果函数 ϕ：$R^2\to R$，满足 $\phi(x,y)=0\Leftrightarrow 0\leqslant x\perp y\geqslant 0$，则称 ϕ 为一个非线性互补函数（NCP 函数）。

NCP 函数可以将包含等式和不等式的3个条件的互补问题转化为只含有一个等式的问题，从而把一个复杂的非光滑问题归结为解方程组的问题。互补函数的选择不同，求解效果不同。$\phi_M=\min(x, y),\ (x,y)\in R^2$，为最小化函数，是最简单的 NCP 函数，其在整个 xy 平面上连续且除对角线外处处光滑。在非线性互补问题高效算法发展中起到核心作用的互补函数是 Fischer-Burmeister(FB) 函数，$\phi_{\rm FB}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-(x+y),\ (x,y)\in R^2$ [26] 函数形式简单，只在孤立点（0, 0）不可微，经常用来转化互补问题。本文也用它来求互补问题。

2.3 接触问题点–面接触模型

如图 4 将 a 接触边界称为主面(master)，b 接触边界为从面(slave)，且从面上的单元不能侵入主面，将主面上的单元称为主单元，从面上的单元称为从单元。

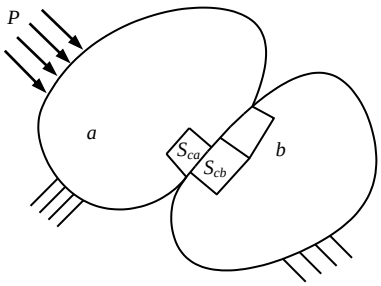


图 4 两物体接触单元划分示意图

Fig.4 Schematic diagram of two contact objects

如图 5 所示，节点 1 和节点 2 构成主面上的接触对，节点 3 为从节点，3′为从节点在主面上相应的投影。节点 1 和节点 2 的当前坐标分别为 X_1 和 X_2，节点位移分别为 U_1 和 U_2，容易通过计算求得单位切向量为 $\boldsymbol{t}$，单位法向量 $\boldsymbol{n}$，可以在主面上建立 n-t 局部坐标系，节点 1 和节点 2 的形函数分别为 N_1、N_2，3′的坐标可表达为

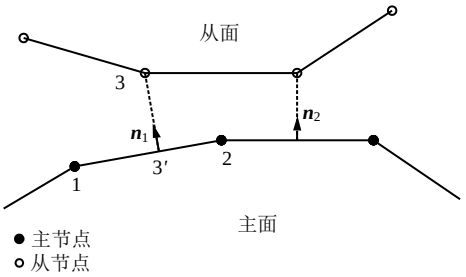


图 5 点–面接触模型

Fig.5 Point-surface contact model

$$X_{3'}=N_1X_1+N_2X_2 \tag{20}$$

投影点 3′的位移为

$$U_{3'}=N_1U_1+N_2U_2 \tag{21}$$

则从节点 3 和主面 1–2 的间隙为

$$g=g_0+(U_{3'}-U_3)n \tag{22}$$

设节点 3 受到的法向压力为 f_n，则 f_n 在节点 3 引起的节点荷载为

$$f_n^3=f_nn \tag{23}$$

节点 3 受到的切向力为 τ，则 τ 在节点 3 引起的切向节点荷载为

$$f_t^3=\tau t \tag{24}$$

在节点 3′引起的节点荷载为

$$f_n^{3'}=-f_nn \tag{25}$$

在节点 3′引起的切向节点荷载为

$$f_t^{3'}=-\tau t \tag{26}$$

其在节点 1 和 2 引起的等效节点力为

$$\left.\begin{aligned} f^i{}_n&=N_i f_n^{3'}\\ f^i{}_t&=N_i f_t^{3'}\end{aligned}\right\}\ (i=1,2) \tag{27}$$

由于应力和力仅差面积的关系，因此，在互补方程中，可以用力来代替应力，法向 F–B 函数为

$$\phi_{\rm FB}(g, f_n)=0 \tag{28}$$

切向 FB 函数为

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^{+},\ c-\mu f_n+\tau)=0\\&\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^{-},\ c-\mu f_n-\tau)=0\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

因此，离散后的方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{d}\Omega=\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}\\&u=\bar{u}\\&\phi_{\mathrm{FB}}(g,f_n)=0\\&\Delta u=\Delta u_t^{+}-\Delta u_t^{-}\\&\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^{+},c-\mu f_n+\tau)=0\\&\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^{-},c-\mu f_n-\tau)=0\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

式中：$\boldsymbol{B}$ 为应变矩阵；$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ 为外力向量，包括了接触力。

由于式（30）为非线性方程组，因此，一般可采用 Newton 法来进行迭代求解，迭代中的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix}\tag{31}$$

式中：$\boldsymbol{K}$ 为实体单元的刚度矩阵；列向量 $\boldsymbol{a}=[a_1\ a_2]$ 中 a_1 与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $-N_1n$、$-N_2n$ 和 n，a_2 与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $-N_1t$、$-N_2t$ 和 t；行向量 $\boldsymbol{b}=[b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^{\mathrm{T}}$，$b_1$ 中与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial U_1}$、$\dfrac{\partial\phi}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial U_2}$ 和 $\dfrac{\partial\phi}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial U_3}$，$b_2$ 中与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $\dfrac{\partial\Delta u}{\partial U_1}$、$\dfrac{\partial\Delta u}{\partial U_2}$ 和 $\dfrac{\partial\Delta u}{\partial U_3}$，$b_3$ 中与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{+}}\dfrac{\partial\Delta u^{+}}{\partial U_1}$、$\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{+}}\dfrac{\partial\Delta u^{+}}{\partial U_2}$ 和 $\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{+}}\dfrac{\partial\Delta u^{+}}{\partial U_3}$，$b_4$ 中与 1、2、3 点自由度对应的值分别为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{-}}\dfrac{\partial\Delta u^{-}}{\partial U_1}$、$\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{-}}\dfrac{\partial\Delta u^{-}}{\partial U_2}$ 和 $\dfrac{\partial\phi}{\partial\Delta u^{-}}\dfrac{\partial\Delta u^{-}}{\partial U_3}$；行向量 $\boldsymbol{c}=[\dfrac{\partial\phi}{\partial f_n}\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}]$。

2.4　接触问题面−面接触模型

在有限元中常用到的接触模型为面−面接触单元模型，如图 6 所示，仅允许主单元上的节点穿透从单元（从单元上的高斯节点不允许穿透主单元）。在计算时，需要找出主单元与从单元及相应的高斯节点所形成的接触对，即找到主−从单元的接触点，首先针对从单元上高斯点 gp_1，找出其距离最近的投影点 pgp_1，投影点即为接触点或潜在接触点，以主单元边 34 外法线为 n_1，建立局部坐标系。

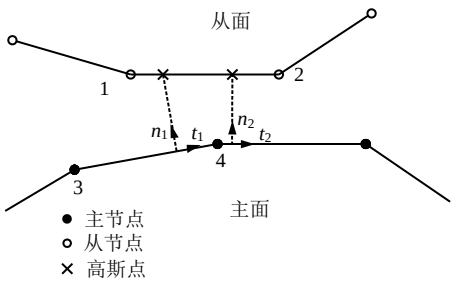


图 6　主−从面−面接触模型

Fig.6　Master-slave surface-surface contact model

以二节点高斯积分为例，设高斯点 1 为 gp_1，相应的从节点编号为 1、2，投影到主单元边编号为 3、4，在计算过程中考虑接触体的大变形。

设节点 1 和节点 2 初始坐标为 X_1 和 X_2，高斯点 1 对应的形函数为 N_1 和 N_2，节点位移分别为 U_1 和 U_2，在计算过程中 $X_1=X_1+U_1$。高斯点 1 坐标为

$$X_{gp_1}=\sum_{i=1}^{2}N_iX_i\tag{32}$$

设相应的高斯点应力为 f_{n_1}、f_{n_2}，单元长度为 l_{12}。通过高斯积分可求得等效高斯点处接触力为

$$f^{gp_1}=f_{n_1}\frac{l_{12}}{2}n_1\tag{33}$$

由作用力与反作用力求得对应的投影点 pgp_1 力为

$$f^{pgp_1}=-f_{n_1}\frac{l_{12}}{2}n_1\tag{34}$$

从节点受到的高斯点的等效接触力为

$$f^{i}=f_{n_1}N_i\frac{l_{12}}{2}n_1(i=1,\ 2)\tag{35}$$

主节点 3、4 受到的高斯点 1 的接触力为

$$\begin{bmatrix}f^3\\f^4\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}N_3\\N_4\end{vmatrix}f^{gpg_1}\tag{36}$$

设相应的间隙为 g_1，即为高斯点 1 到 34 边的距离。

$$\phi_{\mathrm{FB}}(g_1,f_{n_1})=0\tag{37}$$

若两物体发生接触，则切向力用 f_τ 表达。

可求得等效高斯点处接触力为

$$f_\tau=\tau\frac{l_{12}}{2}n_1\tag{38}$$

由作用力与反作用力求得对应的投影点 pgp_1 力为

$$f_\tau^{pgp_1} = -\tau \frac{l_{12}}{2} n_1 \tag{39}$$

从节点受到的高斯点的等效摩擦力为

$$f_\tau^i = \tau n_1 N_i \frac{l_{12}}{2} (i = 1,2) \tag{40}$$

主节点 3、4 受到的高斯点 1 的接触力为

$$\begin{bmatrix} f_\tau^3 \\ f_\tau^4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} N_3 \\ N_4 \end{vmatrix} f_\tau^{gpg_1} \tag{41}$$

经过有限元离散后，系统方程组可表达为

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \sigma \mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{C}} \\ &U = \overline{U}, 在\Gamma_{\mathrm{u}}上 \\ &\phi_{\mathrm{FB}}(gap, S_n) = 0, 在\Gamma_{\mathrm{C}}上 \\ &\Delta u = \Delta u_t^+ - \Delta u_t^- \\ &\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^+, c - fS_n + \tau) = 0, 在S_{\mathrm{C}}上 \\ &\phi_{\mathrm{FB}}(\Delta u_t^-, c - fS_n - \tau) = 0, 在S_{\mathrm{C}}上 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

式中：gap 为接触间隙；$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ 为给定的体积力、面力、集中力等形成的节点力向量；$\boldsymbol{F}^{\mathrm{C}}$ 为接触力向量。通常用 Newton 法来求解该非线性方程组。

3 算 例

基于前述理论研究与程序编制工作，对巴西圆盘、浅埋基础、土压力等岩土工程算例进行计算。旨在对算例在特定条件下求得解析解，可对比计算结果与解析解的相对误差，对计算结果的合理性进行评价。

3.1 Hertz 理论：弹性圆柱压在弹性平板上

根据 Hertz 接触理论[27]，经过积分变换，可以完成解析积分并求出点接触问题的解析解。用同样相似的方法，可完成对线接触问题的求解。

表 1 各参数取值

Table 1 Values of each parameter

E/ MPa	μ	L/ mm	R/ mm
4 000	0.35	190	50

几何构型如图 7 所示，取单位厚度，不计自重。设为平面应变问题，荷载 P 为 41.76 N/mm，半接触宽度 b 和接触面最大压力 q_0 的 Hertz 解析解为

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{4}{\pi} R \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) 2P \\ {q_0}^2 &= \frac{P}{\pi R} \frac{1}{2 \times \dfrac{1-\nu^2}{E}} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

式中：E 为弹性模量；ν 为泊松比。

考虑到最初接触状态为线性接触，且随着荷载的增大，接触线状态扩大为矩形接触面状态，同时由于对称性，取 1/4 的结构进行分析。对计算区域采用 1 412 个节点进行离散，如图 8 所示，并与以相同节点布置的 ABAQUS 解（采用 CPE4 型单元）、解析解进行比较。结果见表 2，显然，在相同节点布置条件下，本文的解相对 ABAQUS 的解接近理论解。

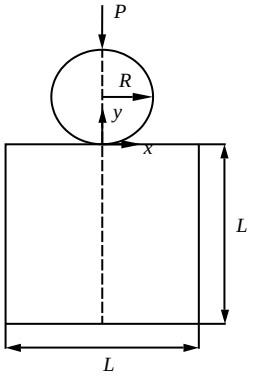


图 7 圆柱与平面接触

Fig.7 Cylinders on a flat plate

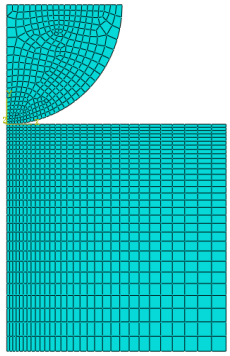


图 8 有限元网格整体示意图

Fig.8 Overall diagram of finite element meshes

表 2 半接触宽度和接触面最大压力

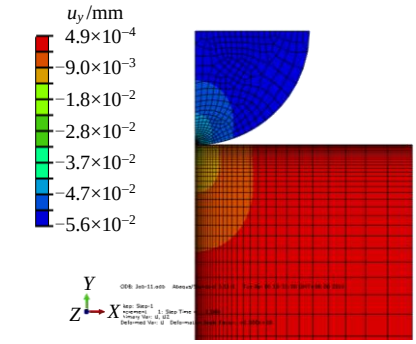
Table 2 Half-contact widths and the maximum pressures on contact surface

计算方法	b/ mm	q_0/MPa
Hertz	1.080 00	24.621 9
本文	1.099 57	23.843 7
ABAQUS	1.117 80	23.428 7

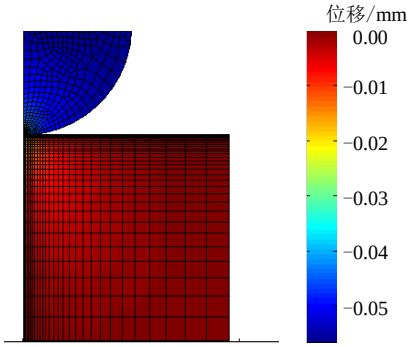
用本文方法，迭代次数 16 次残差为 6.13×10^{-9}，从图 9 可以得出，本文的计算结果与 ABAQUS 有限元的应力计算结果吻合性较好。

对比图 10、11 可看出，用基于罚函数算法的 ABAQUS 计算在接触处主单元与从单元有一定的

嵌入量，以受力前坐标重合的从节点 2(0, 0)和主节点 1 315(0, 0)为例，受力后由 ABAQUS 参考解可知，从节点 2 的位移量为 0.029 316 3 mm，主节点 1 315 的位移量为 0.028 994 3 mm，相对位移量为 0.000 322 mm，而用基于互补理论的接触算法计算结果变形后 2 的坐标为(0, 0.029 1)、1 315 的坐标为(0, 0.029 1)，相对位移量为 0 mm，与实际情况吻合较好。



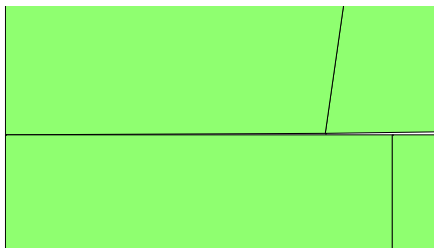
(a) ABAQUS 参考解



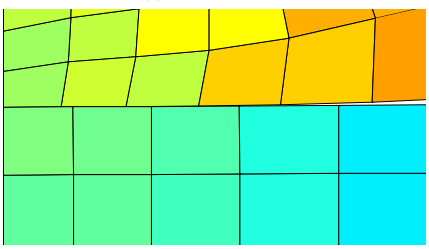
(b) 本文解

图 9　u_y 方向位移云图

Fig.9　Nephograms of vertical direction displacement



(a) 受力前接触面



(b) 受力后接触面

图 10　本文方法

Fig.10　Method proposed in this article



(a) 受力前节点 2 (1 315)



(b) 受力后节点 2、1 315

图 11　ABAQUS 参考解

Fig.11　ABAQUS reference solution

综上所述，基于互补方法能很好地求解弹性圆柱压在弹性平面上接触问题。且在侵入面处理上本文方法精度较高，与实际情况的吻合度高。

3.2　巴西圆盘

巴西圆盘试验通过径向加载，使试样承受线荷载，试样作用线方向通过圆盘的轴线，试件受力后可能沿着受力方向的直径裂开，根据弹性力学公式，试样的抗拉强度公式为

$$\sigma_{\mathrm{T}}=-\frac{2P}{\pi dl} \tag{44}$$

式中：σ_{T} 为式样的抗拉强度；P 为劈裂时的最大荷载；d 为圆柱试样的直径；l 为圆柱试样的长度。

根据弹性力学，圆盘径向受力时任一点的各应力分量为[28]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{2P}{\pi l}\left(\frac{\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{r_1}+\frac{\sin^2\theta_2\cos\theta_2}{r_2}\right)-\frac{2P}{\pi dl}\\ \sigma_y&=\frac{2P}{\pi l}\left(\frac{\cos^3\theta_1}{r_1}+\frac{\cos^3\theta_2}{r_2}\right)-\frac{2P}{\pi dl}\\ \tau_x&=\frac{2P}{\pi l}\left(\frac{\cos^2\theta_1\sin\theta_1}{r_1}+\frac{\cos^2\theta_2\sin\theta_2}{r_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

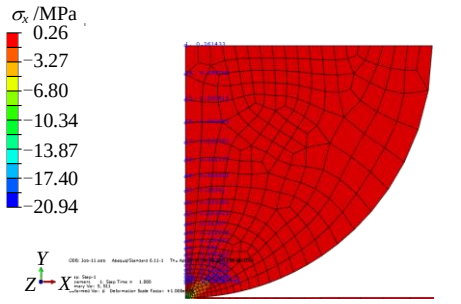
式中：σ_x 为拉应力，以拉应力为负。

基于算例 1 对巴西圆盘试验结果进行简单的数值分析，则抗拉强度的解析解为

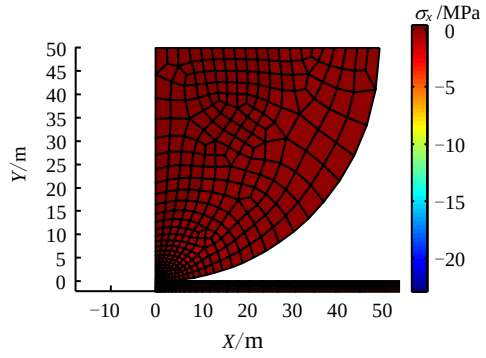
$$\sigma_{\mathrm{T}}=-\frac{2P}{\pi dl}=-0.265\ 987\ 26\ \mathrm{MPa}$$

从图 12、13 可看出，在远离试件与垫板接触区，

本文方法、ABAQUS 方法均与解析解吻合度较好，规律一致，即沿着垂直向直径几乎产生均匀的水平向的拉应力。在靠近接触区（加载区）出现应力集中，由拉应力逐渐转变为压应力，且过大的应力集中易造成加载区的局部破坏，这是加载方式造成巴西圆盘试验测定的抗拉强度与直接拉伸试验求得的强度有差别的原因。



(a) ABAQUS 参考解



(b) 本文解

图 12 应力σ_x的分布云图

Fig.12 Nephograms of horizontal stress distribution

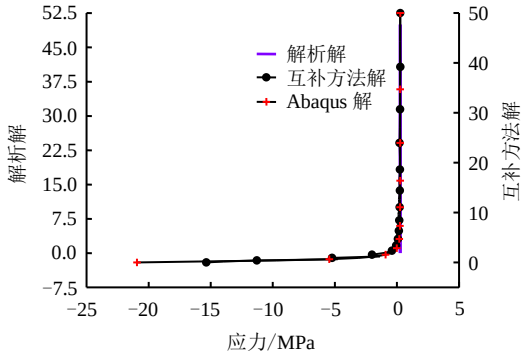


图 13 应力σ_x沿轴线分布示意图

Fig.13 Distribution of horizontal stress along the axis

3.3 浅埋刚性条形基础基底压力分布

浅埋基础是最常用的基础形式之一，由于基础的刚度与土的刚度相比通常很大，可假设为绝对刚性，在均布荷载作用下，基础只能保持平面下沉而不能弯曲。如图 14 所示，条形基础受到均布荷载为 15 kN/m^2，基础的宽度 2a=3 m、弹性模量为 20 GPa、泊松比为 0.25，地基的弹性模量为 20 MPa、泊松比为 0.25。设地基和基础的接触面光滑无摩擦，地基是均质、弹性、各向同性的半无限体，基础与地基的接触问题属于刚体−变形体接触问题。基底压力分布如图 15 所示，基底压力的解析解为

$$\sigma(y)=-\frac{2qa}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \tag{46}$$

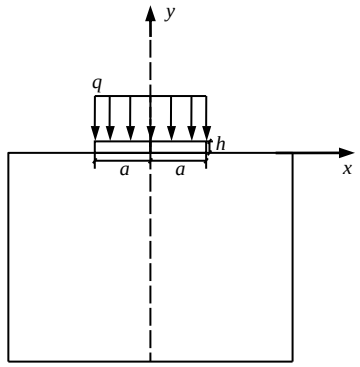


图 14 刚性条形基础示意图

Fig.14 Diagram of rigid strip foundation

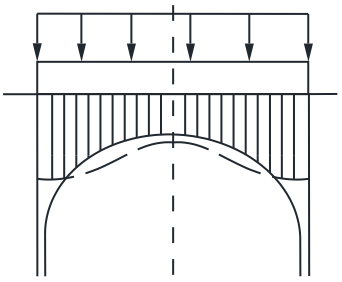


图 15 基底压力分布示意图

Fig.15 Distribution diagram of base pressure

由于对称性，取其模型的 1/2 进行计算，对计算区域采用 142 个节点进行离散，如图 16 所示，并与以相同节点布置的 ABAQUS 解（采用 CPE4 型单元）进行比较。

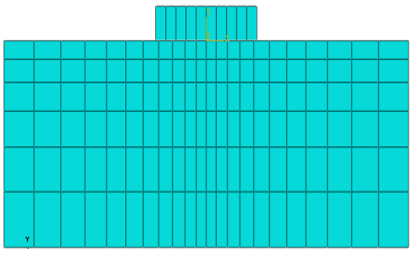


图 16 有限元离散模型

Fig.16 The finite element discrete model

对比图 14、17 可看出，本文方法求解在基础两端($x=\pm1.5$ m)基底压力存在应力集中，这与地基两侧土体对其的挤压变形有关，与实际规律的吻合度较好，而 ABAQUS 应力σ_y的分布云图中应力集中

情况不明显。对比结果可看出本文方法计算结果更加真实。

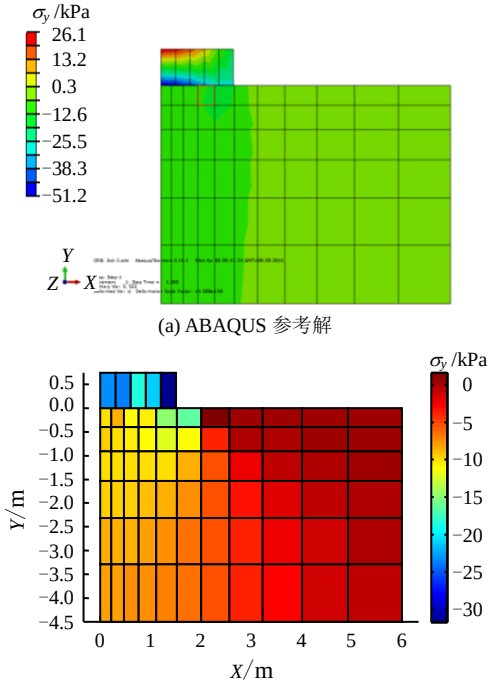


图 17　应力σ_y的分布云图

Fig.17　Nephograms of vertical stress distribution

从图 18、19 可以得出，本文方法的位移分布云图的计算结果与 ABAQUS 有限元的计算结果基本一致。

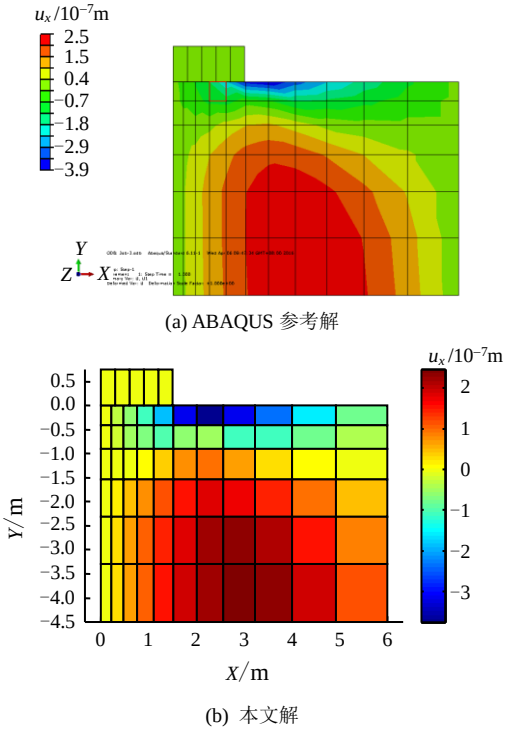


图 18　位移 u_x 的分布云图

Fig.18　Nephograms of horizontal displacement distribution

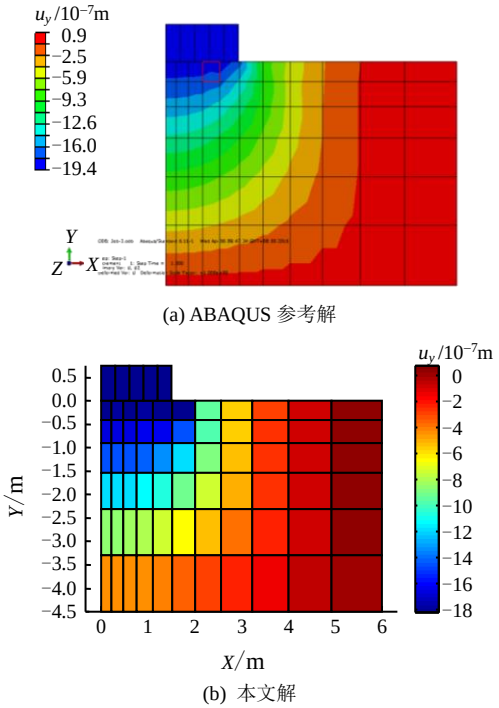


图 19　位移 u_y 的分布云图

Fig.19　Nephograms of vertical displacement distribution

综上所述，使用基于互补方法求解接触问题对浅埋刚性条形基础位移和应力的分析精度高。

3.4　衬砌−隧洞周围存在初始间隙的隧道

本文用厚壁圆筒的计算简化模拟盾构施工法中预制衬砌与岩（土）体间的受力变形问题。算例来自文献[19]两个相套的薄壁圆筒内壁受均布荷载，见图 20，由于对称性仅取 1/4 模型进行分析，内筒外壁与外筒内壁间的间隙为 0.15 cm，弹性模量为 210 GPa，泊松比为 0.3，所受径向压力为 180 MPa。计算时采用 CPE4 型单元，120 个节点，90 个单元，有限元离散模型如图 21 所示。

本文方法和 ABAQUS 有限元的计算结果的位移分布云图，如图 22 所示。使用本文方法的计算结果基本与参考解相符，如两种方法 u 的最大值为 0.289 7 cm（本文方法）和 0.290 828 cm（ABAQUS 参考解），且分布规律一致。

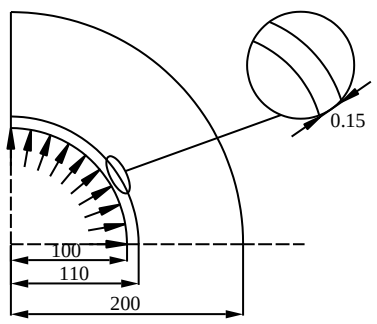


图 20　算例图（单位：cm）

Fig.20　Numerical example diagram (unit: cm)

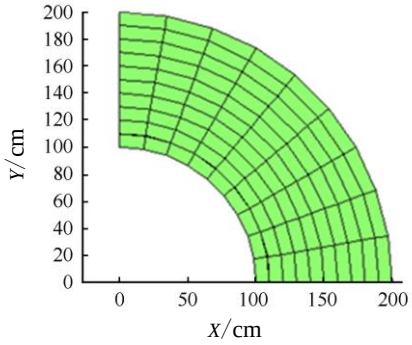
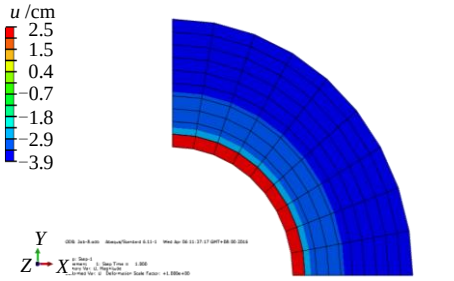
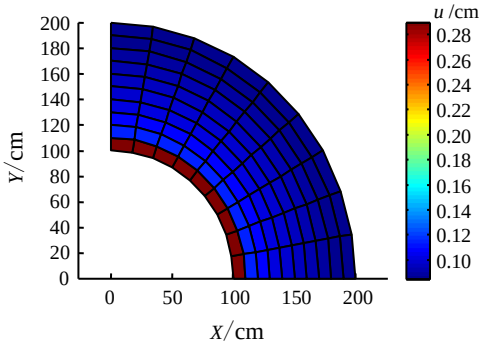


图 21 有限元离散模型

Fig.21 The finite element discrete model



(a) ABAQUS 参考解



(b) 本文解

图 22 变形后位移 *u* 的分布云图

Fig.22 Displacement distribution after deformation

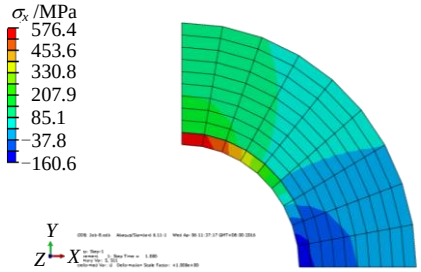
圆筒应力分布见图 23，由图可知，使用本文方法求得的应力分布云图基本与 ABAQUS 有限元分析的参考解分布一致。

下面选取节点 10、节点 80 的位移云图进行分析。

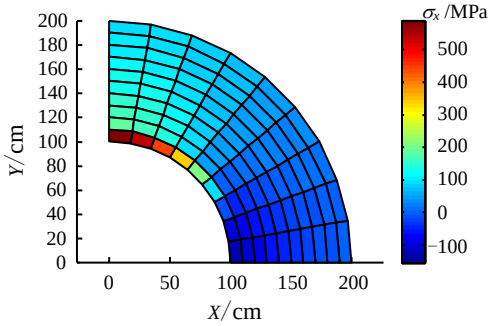
从图 24 可看出，变形前节点 10 与节点 80 水平相对坐标差为 $\Delta x = 0.114\ 9$ cm，$\Delta y = 0.096\ 5$ cm。两者间隙为 0.15 cm。

ABAQUS 变形后节点 10 与节点 80 的相对坐标差为 $\Delta u_x = -0.115\ 7$ cm，$\Delta u_y = 0.097\ 1$ cm，总位移量为 0.151 cm，可看出节点 10 嵌入到主单元中，这与实际工程现象有一定出入。

本文方法变形后两者水平位移差为 $\Delta u_x = 0.114\ 9$ cm，$\Delta u_y = 0.096\ 4$ cm，总位移量为 0.15 cm，与变形前节点 10 与节点 80 间隙相等，说明使用本文方法节点 10 与节点 80 重合。满足从面不侵入主面的规律，与实际工程实践吻合度较高。



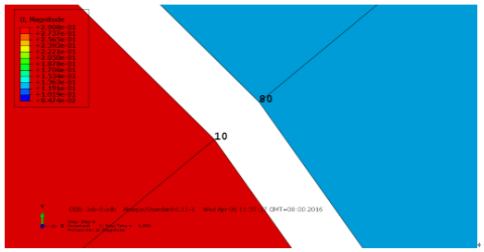
(a) ABAQUS 参考解



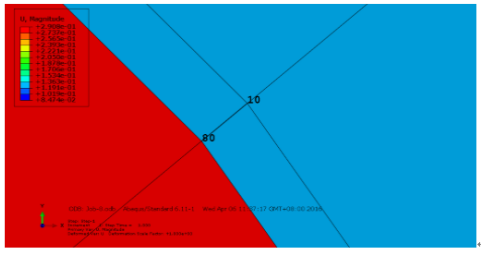
(b) 本文解

图 23 变形后应力 σ_x 的分布云图

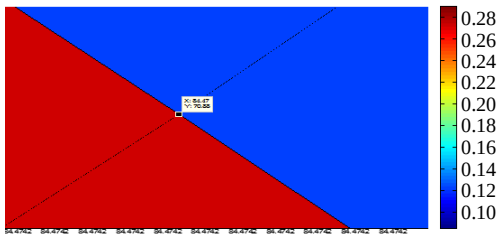
Fig.23 Nephograms of horizontal stress distribution after deformation



(a) 变形前



(b) ABAQUS 变形



(c) 本文解

图 24 间隙图（节点 10 位置变化图）（单位：cm）

Fig24 Gap diagrams (unit: cm)

以上计算结果的分析表明，互补方法可用来求解衬砌−隧洞周围存在初始间隙的隧道应力及位移问题，且互补方法结果与实际工程的吻合度较 ABAQUS 方法高。

4 结　论

本文主要利用 NCP 函数可以将互补问题的求解方便地转化为与之等价的方程组求解，在有限元基本方程的基础上建立光滑接触问题等价的互补函数模型，在高斯点上对面−面接触模型进行计算，方法易于理解，实现方便。通过一系列算例验证该方法对求解弹性力学平面问题的可行性并与 ABAQUS 商业软件对比表明该方法的求解精度。主要结论如下：

（1）根据二维接触问题的实际物理意义，分别在法向与切向建立了等价的互补模型，用 NCP 函数中的 ϕ_{FB} 函数进行求解。

（2）基于互补理论对接触问题的点−面、面−面接触模型给出了等价的有限元离散方程及相应的雅可比矩阵求法，编制了相应的有限元程序。

（3）利用上述方法，对典型的接触问题进行数值模拟分析通过与解析解或 ABAQUS 比较，证明本文方法的精度及计算结果的工程合理性。

通过理论推导与算例对比分析，虽然对接触问题互补算法有了一定的认识，但仍有许多需要改进和深入研究的地方。例如：本文方法在计算初期刚度矩阵的内存分配必须确定，对于复杂的工程问题，占用过大的内存，易造成计算机内存的不足；工程应用方面，工程实例的复杂性考虑不足；同时研究内容暂限于二维接触问题，对于三维接触问题，对滑动面方向的确定问题及三维摩擦问题中方向角周期性等不稳定问题，对接触面滑移过程中的接触面磨损、破碎以及错位等问题的认识尚不够深入。所有这些理论或应用中的问题，需要在今后的研究中解决。

参 考 文 献

[1] 姜育松, 苏超. 工程接触问题数值分析方法[J]. 水利发电, 2010, 36(4): 76－78.
JIANG Yu-song, SU Chao. Numerical analysis methods for solving contact problems in engineering[J]. **Water Power**, 2010, 36(4): 76－78.

[2] 赵万友. 接触问题的分析方法研究与工程应用[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2007.
ZHAO Wan-you. Research on the analyzing method of contact problems and engineering application[D]. Xi'an: Xidian University, 2007.

[3] 高云开. 三维摩擦接触问题数值解法与工程应用[D]. 上海: 同济大学, 2007.
GAO Yun-kai. Numerical methods and engineering application of 3D frictional contact problems[D]. Shanghai: Tongji University, 2007.

[4] 余德浩. 有限元、自然边界元与辛几何算法[J]. 高等数学研究, 2001, 4(4): 5－10.
YU De-hao. Finite element methods，natural boundary element method and symplectic geometry algorithms[J]. **Studies in College Mathematics**, 2001, 4(4): 5－10.

[5] 李翠华. 三维弹塑性和接触问题的非线性互补方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2014.
LI Cui-hua. Researches on the nonlinear complementary method for 3 elastoplasticity problems and contact problems[D]. Wuhan: Wuhan University, 2014.

[6] SIGNORINI A. Sopra alcune questioni di elastostatica[J]. **Atti Della Societa Italiana per Il Progresso Delle Scienze**, 1933, 21(2): 143－148.

[7] FICHERA G. Existence theorems in elasticity[M]. Berlin: Springer, 1973: 347－389.

[8] OHTAKE K, ODEN J T, KIKUCHI N. Analysis of certain unilateral problems in von Karman plate theory by a penalty method-part 1. A variational principle with penalty[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering**, 1980, 24(24): 187－213.

[9] WRIGGERS P, ZAVARISE G. Application of augmented Lagrangian techniques for non-linear constitutive laws in contact interfaces[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1993, 9(10): 815－824.

[10] HEEGAARD J H, CURNIER A. An augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1993, 36(4): 569－593.

[11] SIMO J C, LAURSEN T A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction[J]. **Computer & Structures**, 1992, 42(1): 97－116.

[12] CONRY T F, SEIREG A. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1971, 38(2): 387－392.

[13] 陈国庆. 三维弹性接触问题极小化数值解法——非线性互补原理、模型和算法[D]. 大连: 大连理工大学, 1994.

CHEN Guo-qing. Numerical method for solving the 3D elastic contact problem minimization nonlinear complementarity principle, model and algorithm[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 1994.

[14] 陈国庆, 陈万吉, 冯恩民. 三维接触问题非线性互补原理及算法[J]. 中国科学(A 辑), 1995, 25(11): 1181－1190.
CHEN Guo-qing, CHEN Wan-ji, FENG En-min. The complementary principle and algorithm for 3-D contact problems[J]. **Science in China Series A**, 1995, 25(11): 1181－1190.

[15] LEUNG A Y T, CHEN Guo-qing, CHEN Wan-ji. Smoothing Newton method for solving two-and three-dimensional frictional contact problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, 41(6): 1001－1027.

[16] 李学文, 陈万吉. 三维接触问题的非光滑算法[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 43－49.
LI Xue-wen, CHEN Wan-ji. Nonsmooth method for solving 3D frictional contact problems[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2000, 17(1): 43－49.

[17] 宣兆成. 二次规划的代理对偶算法及其在结构分析及优化中的应用[D]: 大连: 大连理工大学, 1998.
XUAN Zhao-cheng. Proxy duality algorithm of quadratic programming and its application in structural analysis and optimization[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 1998.

[18] BATHE K J, BOUZINOY P A. On the constraint function method for contact problems[J]. **Computers & Structures**, 1997, 64(5－6): 1069－1085.

[19] CHRISTENSEN P W, KLARBRING A, PANG J S. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, 42(1): 145－173.

[20] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
WANG Xu-cheng. Finite element method[M]: Beijing: Tsinghua University Press, 2009.

[21] 陈万吉, 胡志强. 三维摩擦接触问题算法精度和收敛性研究[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(5): 541－547.
CHEN Wan-ji, HU Zhi-qiang. Study on accuracy and convergence of 3D frictional contact problem[J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2003, 43(5): 541－547.

[22] 李小凯, 郑宏. 基于线性互补的非连续变形分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(6): 1787－1794.
LI Xiao-kai, ZHENG Hong. Discontinuous deformation analysis based on linear complementarity theory[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(6): 1787－1794.

[23] 朱昌铭. 基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法[J]. 力学学报, 1995, 27(2): 189－197.
ZHU Chang-ming. Linear complementary method for elastic contact problem based on virtual work principle[J]. **Chinese Journal of Theoretical Applied Mechanics**, 1995, 27(2): 189－197.

[24] FACCHINEI F, PANG J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. [S. 1.]: Springer-Verlag, 2003.

[25] 沙德松, 孙焕纯, 徐守泽. 弹性摩擦接触问题的边界元——线性互补解法[J]. 应用数学和力学, 1990, 11(12): 1035－1041.
SHA De-song, SUN Huan-chun, XU Shou-ze. Linear complementary method—boundary element for elastic frictional contact problem[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 1990, 11(12): 1035－1041.

[26] 孙林松. 三维弹塑性接触问题的线性互补方法及拱坝结构非整体性研究[D]. 南京: 河海大学, 2001.
SUN Lin-song. Linear complementarity method for 3D elasto-plastic contact problem and non-entirety analysis of arch dams[D]. Nanjing: Hohai University, 2001.

[27] 杨耀文. 二维弹性接触问题的接触面单元法[J]. 上海力学, 1996, 17(3): 201－211.
YANG Yao-wen. Contact surface element method for 2D elastic contact problems[J]. **Shanghai Mechanics**, 1996, 17(3): 201－211.

[28] 喻勇. 质疑岩石巴西圆盘拉伸强度试验[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(7): 1150－1157.
YU Yong. Questioning the validity of the Brazilian test for determining tensile strength of rocks[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24 (7): 1150－1157.