

文章编号: 1000-7598 (2011) 02-0333-08

分布热源作用下裂隙岩体渗流-传热的 拉氏变换-格林函数半解析计算方法

项彦勇, 郭家奇

(北京交通大学 土木建筑学院, 北京 100044)

摘 要: 以裂隙岩体高放射性核废物地下处置库性能评估为目标, 提出了分布热源作用下单裂隙岩体渗流-传热的简化概念模型、控制微分方程和拉氏变换-格林函数半解析法, 为进一步采用半解析法计算分布热源作用下单裂隙岩体的渗流-传热问题奠定了基础。针对单裂隙岩体的渗流-传热问题, 建立考虑岩石内热源和二维热传导的控制微分方程, 利用拉氏变换域微分方程的基本解建立格林函数积分方程, 采用解析法处理其中的奇点, 通过数值积分和拉氏数值逆变换求解, 计算任意时刻裂隙水和岩石的温度分布。通过算例, 与基于岩石一维热传导假定的解析解进行了对比, 并计算分析了分布热源作用下单裂隙岩体的渗流-传热特征及其对裂隙开度、岩石热传导系数和热流集度的敏感度。算例表明, (1) 就裂隙水温度而言, 由于考虑了岩石的二维热传导, 拉氏变换-格林函数半解析解小于基于岩石一维热传导假定的解析解; (2) 裂隙水温度和岩石温度对裂隙开度和热流集度的敏感度较大, 对岩石热传导系数的敏感度较小。

关 键 词: 核废物地下处置库; 裂隙岩体; 渗流; 传热; 格林函数; 离散拉氏变换

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

A Laplace transform and Green function method for calculation of water flow and heat transfer in fractured rocks

XIANG Yan-yong, GUO Jia-qi

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: For performance assessment of nuclear waste repositories in fractured rocks, a simplified conceptual model and mathematical formulation is proposed; and a Laplace transform and Green function semi-analytical method is developed for calculation of flow and heat transfer in single-fracture rock with distributed heat source. Taking into account of distributed heat source and 2D thermal conduction in single-fracture rock of infinite extent, the mathematical model is formulated and solved by using a Green function approach, in which a fundamental solution of the governing differential equations after Laplace transform is employed. The singularities in the integral equation are handled through analytical integration; and a numerical procedure is developed to solve the transient temperature distributions in fracture water and rock matrix. Numerical examples are provided for illustration of the proposed method with comparison of an analytical solution based on 1D rock thermal conduction, as well as for features of flow and heat transfer in single-fracture rock and the sensitivities to fracture aperture, rock thermal conductivity and heat source intensity. The calculations indicate: (1) The temperature of water in the fracture calculated from using the semi-analytical method is lower than that calculated the analytical solution, due to the fact that the former method takes account 2D thermal conduction in the rock matrix, whereas the latter assumes 1D conduction. (2) Temperatures in fracture water and the rock matrix are more sensitive, in a relative sense, to the fracture aperture and the heat source intensity than to the thermal conductivity of the rock matrix. The proposed model and solution method may serve, among other possible applications, as a foundation for semi-analytical calculation of flow and heat transfer in multiple fracture rocks with distributed heat sources.

Key words: nuclear waste repository; fractured rock; groundwater flow; heat transfer; Green function; discrete Laplace transform

1 引 言

对于高放废物的处置, 在目前的科学技术水平

下建造地下处置设施进行隔离和监控, 并利用多重屏障系统阻滞和稀释核素的迁移, 是唯一可能实现的方案。地质处置系统的安全性与合理性取决于处

收稿日期: 2009-09-25

基金项目: 国家自然科学基金资助 (No. 50778014)。

第一作者简介: 项彦勇, 男, 1959 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 从事岩土工程方面的教学与研究。E-mail: xiang_yanyong@263.net

置库子系统、近场地质子系统和远场地质子系统的综合阻隔能力与协调性。处置库子系统的布置和功能设计应该与近、远场地质子系统的稀释和阻滞能力相匹配。地质子系统由地质介质及其内部孔隙、裂隙中的空气和水组成。岩体孔隙-裂隙水是个动态的变饱和和渗流体系,不仅影响处置库的耐久性,还会把从工程屏障中漏出的核污染物通过岩体孔隙和裂隙运移到人类活动的地域。高放废物会在较长时间内产生很高的热量,使处置库缓冲回填材料和近场围岩温度升高,影响其物理和化学性质,并形成传热、渗流、应力及化学反应的多场耦合作用。处置库围岩原生和次生裂隙的渗透率一般远大于完整岩石的渗透率,因此,岩体裂隙水的形态与运动是影响处置库阻滞和稀释能力的关键因素。要评价裂隙岩体作为处置库主岩的可行性,就需要研究处置库近场裂隙岩体的渗流-传热耦合和其他多场耦合问题。

一般而言,裂隙岩体渗流-传热耦合的数学模拟涉及瞬态、非均质和非线性的数学问题,只能采用数值方法求解^[1-3]。但在特定条件下,采用简化概念模型,可以建立相对简单的数学物理方程和定解条件,并采用解析法或半解析法求解。与数值解法相比,针对简化概念模型的解析解或半解析解虽然局限于假设条件,但却具有理论表达透明、计算过程透明和计算方便的优点,可以较直接地用于分析裂隙岩体渗流-传热的基本特征和参数敏感度,还可以作为校验数值方法合理性与精确度的参考基准。

以地热开发为工程背景,考虑单井注水-单井抽水情况下单裂隙岩体的渗流-传热问题,忽略裂隙两侧岩石沿裂隙走向的热传导, Lauwerier^[4]、Gringarten 等^[5]和 Schulz^[6]分别提出了不同的简化概念模型和解析解; Cheng 等^[7]采用拉氏变换域内控制微分方程的基本解、数值积分和数值拉氏逆变换,提出了考虑裂隙两侧岩石二维热传导的半解析计算方法,并分析了岩石二维热传导对抽水温度的影响; Ghassemi 等^[8]采用类似的数学方法,提出了考虑裂隙两侧岩石三维热传导的半解析计算方法,并分析了岩石三维热传导对抽水温度和地热田使用寿命的影响。

本文借鉴 Cheng 等^[7]针对地热开发所提出的裂隙岩体渗流-传热计算理论,以裂隙岩体高放射性核废物地下处置库性能评估为目标,提出了分布热源作用下单裂隙岩体渗流-传热的简化概念模型和拉氏变换-格林 (Green) 函数半解析法,并通过算例分析了单裂隙岩体的渗流-传热特征与参数敏感度。

2 概念模型与控制微分方程

考虑图 1 所示的二维 (单位厚度) 单裂隙岩体概念模型, 设裂隙沿 x 坐标轴无限延伸, 两侧隔水岩石无限大, 裂隙水流速为常量; 考虑裂隙水沿 x 轴的对流传热和两侧隔水岩石的二维热传导, 忽略裂隙水的热存储和热扩散, 裂隙水的热能守恒方程 (设裂隙开度较小, 近似取裂隙-隔水岩石界面 $y=0$) 表示为

$$\frac{\partial T(x, y=0, t)}{\partial x} = \frac{\lambda_r}{b\rho_w c_w u_w} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1)$$

两侧隔水岩石的热能守恒方程为

$$\lambda_r \left[\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right] - \rho_r c_r \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$(x, y) \in R$

式中: T 为温度; b 为裂隙半开度; u_w 为裂隙水流速; ρ_w 、 c_w 分别为水的质量密度和比热; λ_r 、 ρ_r 、 c_r 分别为两侧隔水岩石的热传导系数、质量密度和比热; R 为 x - y 平面内除裂隙以外的区域。

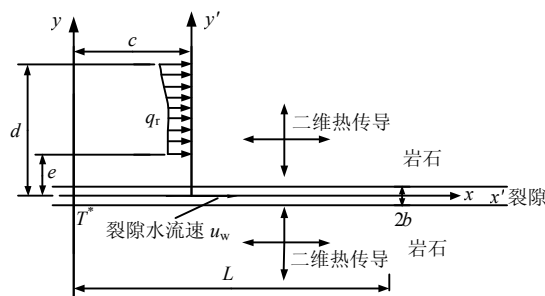


图 1 分布热源作用下单裂隙岩体的渗流-传热概念模型
Fig.1 Conceptual model of flow and heat transfer in single-fracture rock under distributed heat source

设裂隙水和岩石的初始温度为 T_0 , 裂隙计算起点的水温为 T^* , 岩石内热源的热流集度为 q_r , 微分方程式 (1)、(2) 的定解条件为

$$\left. \begin{aligned} T(x=0, -b \leq y \leq b, t) &= T^* \\ -\lambda_r \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=c, e \leq y \leq d} &= q_r \\ T(x, y, t=0) &= T_0 \\ T(x \rightarrow \pm\infty, y, t) &= T_0 \\ T(x, y \rightarrow \pm\infty, t) &= T_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3 拉氏变换-格林函数解

定义相对温度差为

$$T_D(x, y, t) = \frac{T(x, y, t) - T_0}{T^* - T_0} \quad (4)$$

把式(4)代入到微分方程式(1)、(2)和定解条件式(3), 并进行拉普拉斯变换。拉氏变换域内裂隙水热能守恒方程和岩石热能守恒方程分别为

$$\frac{dT_D}{dx}(x, y=0, s) = \frac{\lambda_r}{b\rho_w c_w u_w} \frac{\partial T_D}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}_D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}_D}{\partial y^2} \right] - \rho_r c_r s \tilde{T}_D(x, y, s) &= 0, \quad (x, y) \in R \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

裂隙计算起点处边界条件和热源边界条件分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_D(x=0, y=0, s) &= \frac{1}{s} \\ -\lambda_r \frac{\partial \tilde{T}_D}{\partial x} \Big|_{x=c, e \leq y \leq d} &= \tilde{q}_r / (T^* - T_0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: s 为拉氏变换参数; \tilde{T}_D 、 \tilde{q}_r 分别为 $T_D(x, y, t)$ 和 q_r 的拉氏变换。

式(6)类属变型海姆霍兹(Helmholtz)方程, 为了求得其基本解, 考虑岩石单位厚度上作用的稳态单位集度热源 $\delta'(x-x', y-y')$ (单位厚度上作用在 (x', y') 点的 Dirac 脉冲函数, W/m^3), 则岩石热能守恒方程为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] - \rho_r c_r \frac{\partial T}{\partial t} + \delta'(x-x', y-y') &= 0, \quad (x, y) \in R \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

引入式(4), 定义相对单位集度热源:

$$\delta(x-x', y-y') = \delta'(x-x', y-y') / (T^* - T_0) \quad (9)$$

并进行拉氏变换, 方程式(8)变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{T}_D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}_D}{\partial y^2} - \frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r} \tilde{T}_D(x, y, s) + \frac{1}{\lambda_r} \tilde{\delta}(x-x', y-y') &= 0, \quad (x, y) \in R \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

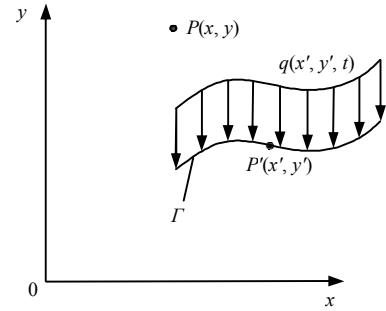
式中: $\tilde{\delta}(x-x', y-y')$ 为拉氏变换域内作用在点 $P'(x', y')$ 的相对单位集度热源 (即时间域内相对单位集度热源的拉氏变换)。方程(10)的解即是方程式(6)的基本解, 称为格林函数:

$$G(x, y, x', y', s) = \frac{1}{2\pi\lambda_r} K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r \right) \quad (11)$$

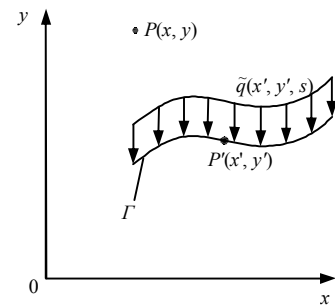
为拉氏变换域内相对单位集度热源 $\tilde{\delta}(x-x', y-y')$ 在点 $P(x, y)$ 处所产生的相对温差 \tilde{T}_D (时间域内相对温度差的拉氏变换); K_0 为第2类0阶变型贝塞尔(Bessel)函数; r 为点 (x', y') 与点 (x, y) 的距离。

如图2所示, 对于沿线段 Γ 集度为 $q(x', y', t)$ 的分布热源, 对应的拉氏变换域内分布热源集度为 $\tilde{q}(x', y', s)$ (分布热源集度 $q(x', y', t)$ 的拉氏变换), 在点 $P(x, y)$ 处所产生的相对温差 \tilde{T}_D 为

$$\tilde{T}_D(x, y, s) = \int_{\Gamma} \tilde{q}(x', y', s) G(x, y, x', y', s) d\Gamma = \frac{1}{2\pi\lambda_r} \int_{\Gamma} \tilde{q}(x', y', s) K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r \right) d\Gamma \quad (12)$$



(a) 时间域



(b) 拉氏变换域

图2 岩石内的分布热源

Fig.2 Distributed heat source in rock

由于采用了格林函数(式(11)), 与式(12)中 $\tilde{T}_D(x, y, s)$ 相应的 T 自动满足无穷远条件(式(3)中第4式和第5式)。

对于图1情况, 根据式(5), 把裂隙边界的热交换集度表示为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_f(x', y=0, s) &= -2\lambda_r \frac{\partial \tilde{T}_D}{\partial y} \Big|_{y=0} = \\ &= -2b\rho_w c_w u_w \frac{dT_D}{dx'}(x', y=0, s) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

代入到式(12),并考虑岩石内热流集度为 q_r 的稳态分布热源,可得积分方程:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_D(x, y, s) = & -\frac{b\rho_w c_w u_w}{\pi\lambda_r} \int_0^L \frac{d\tilde{T}_D(x', 0, s)}{dx'} \cdot \\ & K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r\right) dx' + \frac{1}{2\pi\lambda_r} \int_e^d \frac{q^*}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r_q\right) dy' \end{aligned} \quad (14)$$

式中: L 为裂隙的有效计算长度; $q^* = q_r / (T^* - T_0)$; $r_q = \sqrt{(x-c)^2 + (y-y')^2}$ (温度计算点到均布热源计算点的距离)。

利用分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d\tilde{T}_D(x', 0, s)}{dx'} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r\right) dx' = & \tilde{T}_D(x', 0, s) K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r\right) \Big|_{x'=0}^{x'=L} - \\ & \int_0^L \tilde{T}_D(x', 0, s) \frac{dK_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r\right)}{dx'} dx' \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)变为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_D(x, y, s) = & \frac{b\rho_w c_w u_w}{\pi\lambda_r} \left[\frac{1}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} (x^2 + y^2)\right) - \right. \\ & \tilde{T}_D(L, 0, s) K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(L-x)^2 + y^2]\right) + \\ & \left. \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \int_0^L \tilde{T}_D(x', 0, s) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \cdot \right. \\ & \left. K_1\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r\right) dx' + \frac{1}{2\pi\lambda_r} \int_e^d \frac{q^*}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} r_q\right) dy' \right] \end{aligned} \quad (16)$$

式中: K_1 为第2类1阶变型贝塞尔函数($dK_0(x)/dx = -K_1(x)$)。

在裂隙上($y=0, 0 \leq x \leq L$),式(16)可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_D(x, 0, s) = & \frac{b\rho_w c_w u_w}{\pi\lambda_r} \left[\frac{1}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x|\right) - \right. \\ & \tilde{T}_D(L, 0, s) K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |L-x|\right) + \\ & \left. \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \int_0^L \tilde{T}_D(x', 0, s) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & K_1\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x-x'|\right) dx' + \\ & \left. \frac{1}{2\pi\lambda_r} \int_e^d \frac{q^*}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(x-c)^2 + y'^2]\right) dy' \right] \end{aligned} \quad (17)$$

式(16)、(17)即为拉氏变换域内定解问题式

(1)~(3)的格林函数解,类属菲德海姆(Fredholm)第2类积分方程,可以采用数值积分方法求解。

4 求解方法与计算流程式

为了求解方程(17),需要先把其中 K_1 所含的1阶($1/r$)奇点正则化。为此,用 $\tilde{T}_D(x, 0, s)$ 替代式(17)中奇异积分的 $\tilde{T}_D(x', 0, s)$,解析积分可得

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \int_0^L \tilde{T}_D(x, 0, s) \frac{x-x'}{|x-x'|} K_1\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x-x'|\right) dx' = \\ & \tilde{T}_D(x, 0, s) \left[K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |L-x|\right) - K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x|\right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

用式(17)减去式(18)可得

$$\begin{aligned} \tilde{T}_D \left[\frac{\pi\lambda_r}{b\rho_w c_w u_w} - K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |L-x|\right) + K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x|\right) \right] \cdot \\ \tilde{T}_D(x, 0, s) = \frac{1}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x|\right) - \tilde{T}_D(L, 0, s) \cdot \\ K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |L-x|\right) + \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \cdot \\ \int_0^L [\tilde{T}_D(x', 0, s) - \tilde{T}_D(x, 0, s)] \frac{x-x'}{|x-x'|} \cdot \\ K_1\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x-x'|\right) dx' + \\ \frac{1}{2b\rho_w c_w u_w} \int_e^d \frac{q^*}{s} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(x-c)^2 + y'^2]\right) dy' \end{aligned} \quad (19)$$

这个积分方程没有奇点, $[\tilde{T}_D(x', 0, s) - \tilde{T}_D(x, 0, s)]$ 消除了原来积分的奇点,当 $x=x'$ 时,该方程中的积分成为0/0不定式,可取其极限值:

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow x} [\tilde{T}_D(x', 0, s) - \tilde{T}_D(x, 0, s)] \frac{x-x'}{|x-x'|} \cdot \\ K_1\left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x-x'|\right) = -\sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\partial \tilde{T}_D(x', 0, s)}{\partial x'} \Big|_{x'=x} \end{aligned} \quad (20)$$

把分布热源作用线段长度划分为 n_q 个等长度的节段,节段长度 $\Delta y = (d-e)/n_q$,节段端点坐标

$y_k = e + k\Delta y$ ($k=0 \sim n_q$)。把裂隙长度划分为 n 个等长度的节段 (含 $i=0 \sim n$ 共 $n+1$ 个节点), $\Delta x = L/n$, $x_j = j\Delta x$ ($j=0 \sim n$)。为求解积分方程 (17), 采用辛普森 (Simpson) 法沿裂隙长度数值积分, 取积分权重为

$$w_j = 3/8, 7/6, 23/24, 1, 1, \dots, 1, 1, 23/24, 7/6, 3/8 \quad (j=0 \sim n) \quad (21)$$

并利用差分近似表示式 (18) (对于 $i=2 \sim n-1$, 采用中心差分; 对于 $i=1$ 和 $i=n$, 分别采用向前差分和向后差分):

$$\left. \begin{aligned} -\sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\partial \tilde{T}_D(x', 0, s)}{\partial x'} \Big|_{x'=x_1} &\approx \sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\tilde{T}_{D1} - \tilde{T}_{D2}}{\Delta x} \\ &(i=1) \\ -\sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\partial \tilde{T}_D(x', 0, s)}{\partial x'} \Big|_{x'=x_i} &\approx \sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\tilde{T}_{Di-1} - \tilde{T}_{Di+1}}{2\Delta x} \\ &(i=2 \sim n-1) \\ -\sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\partial \tilde{T}_D(x', 0, s)}{\partial x'} \Big|_{x'=x_n} &\approx \sqrt{\frac{\lambda_r}{\rho_r c_r s}} \frac{\tilde{T}_{Dn-1} - \tilde{T}_{Dn}}{\Delta x} \\ &(i=n) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

可得

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\pi \lambda_r}{b \rho_w c_w u_w} - K_0 \left(|L-x| \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \right) + K_0 \left(|x| \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \right) \right] \\ &\tilde{T}_{Di} = \frac{1}{s} K_0 \left(|x_i| \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \right) - \tilde{T}_{Dn} K_0 \left(|L-x_i| \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \right) + \\ &T_{DD} + \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \Delta x \sum_{j=0, j \neq i}^n w_j (\tilde{T}_{Dj} - \tilde{T}_{Di}) \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \cdot \\ &K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} |x_i - x_j| \right) + \frac{1}{2b \rho_w c_w u_w} \frac{q^*}{s} \cdot \\ &\Delta y \sum_{k=0}^{n_q} w_k K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(x_i - c)^2 + y_k^2] \right), \quad (i=1 \sim n) \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$T_{DD} = \begin{cases} (\tilde{T}_{D1} - \tilde{T}_{D2}) w_1, & (i=1) \\ \frac{\tilde{T}_{Di-1} - \tilde{T}_{Di+1}}{2} w_i, & (i=1 \sim n-1) \\ (\tilde{T}_{Dn-1} - \tilde{T}_{Dn}) w_n, & (i=n) \end{cases} \quad (24)$$

采用离散的拉普拉斯变换: 对于拉氏变换参数 $s = s_l$ ($l=1 \sim n_s$, n_s 为离散拉氏变换参数的个数), 式 (23) 是关于 $\tilde{T}_{Di} = \tilde{T}_D(x_i, 0, s)$ ($i=1 \sim n$) 的线性代数方程组。求解得到 \tilde{T}_{Di} ($i=1 \sim n$) 后, 可以通过对式 (16) 的数值积分计算岩层内的 \tilde{T}_D :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_D(x, y, s) = &\left[\frac{b \rho_w c_w u_w}{\pi \lambda_r} \left[\frac{1}{s} K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} (x^2 + y^2) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. \tilde{T}_D(L, 0, s) K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(L-x)^2 + y^2] \right) \right] \right] + \\ &\frac{b \rho_w c_w u_w}{\pi \lambda_r} \sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} \Delta x \sum_{j=0}^n w_j \tilde{T}_{Dj} \frac{x - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + y^2}} \cdot \\ &K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(x - x_j)^2 + y^2] \right) + \frac{1}{2\pi \lambda_r} \frac{q^*}{s} \Delta y \cdot \\ &\sum_{k=0}^{n_q} w_k K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho_r c_r s}{\lambda_r}} [(x - c)^2 + (y - y_k)^2] \right) \end{aligned} \quad (25)$$

分别对 \tilde{T}_{Di} ($i=1 \sim n$) 和 $\tilde{T}_D(x, y, s)$ 进行数值拉氏逆变换, 可得任意时刻裂隙节点和岩石内部任意点的温度。

采用施特菲释 (Stehfest) 法^[9-10]进行数值拉氏逆变换。设函数 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 则计算 $F(s)$ 后, $f(t)$ 的值可由下式计算:

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{l=1}^{n_s} c_l F \left(\frac{\ln 2}{t} l \right) \quad (26)$$

式中: n_s 为数值拉氏逆变换的个数 (必须为偶数, 一般可取 $6 \leq n_s \leq 20$),

$$c_l = (-1)^{n_s/2+l}.$$

$$\sum_{k=(l+1)/2}^{\min(l, n_s/2)} \frac{k^{n_s/2} (2k)!}{(n_s/2 - k)! k! (k-1)! (l-k)! (2k-l)!} \quad (27)$$

上述拉氏变换-格林函数半解析解的计算流程如图 3 所示。

5 算例

取裂隙 Simpson 数值积分节段个数 $n=100$, Stehfest 法拉氏数值逆变换个数 $n_s=6$, 其他基本参数取值见表 1。

对于图 1 所示的概念模型, 考虑单位延米厚度。如果不考虑分布热源, 且忽略岩石沿裂隙走向 (x 方向) 的热传导 (即只考虑岩石垂直于裂隙走向的热传导), 是可以采用解析法求解的; Gringarten^[5] 给出的解析解为

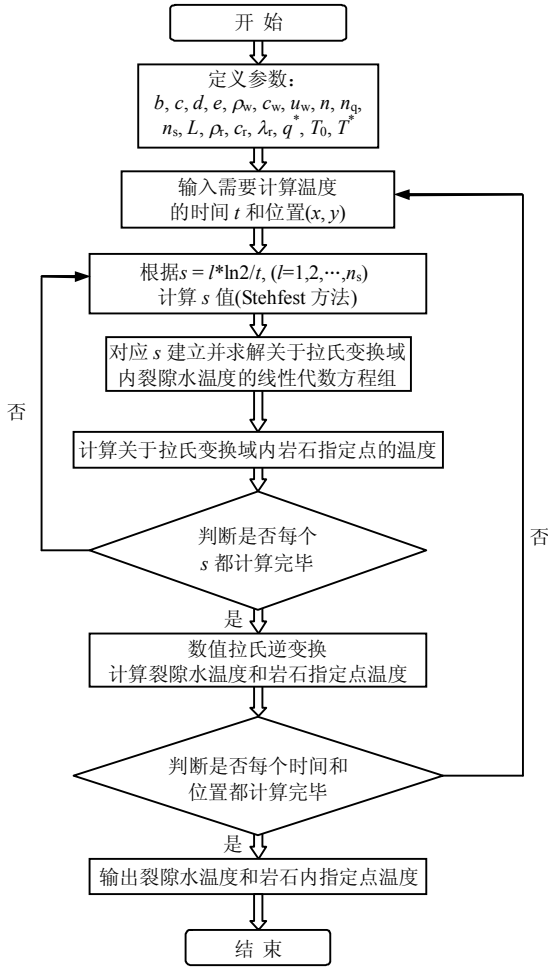


图 3 拉氏变换-格林函数半解析法的数值计算流程
Fig.3 Numerical procedure for Laplace transform & Green function semi-analytical method

$$T_D(x,y,t) = \text{erfc}\left[\frac{\lambda_r x + bu_w \rho_w c_w |y|}{2bu_w \rho_w c_w} \sqrt{\frac{u_w \rho_r c_r}{\lambda_r (u_w t - x)}}\right] \quad (28)$$

考虑岩石二维热传导的拉氏变换-格林函数半解析解与该解析解的比较如图 4 所示。图 5 为不同时间岩石温度沿垂直于裂隙方向的分布特征。图 6、7 分别为 365 d 时刻裂隙水温度分布随裂隙开度和岩石热传导系数变化的情况。可见，拉氏变换-格林函数半解析解小于 Gringarten^[5]的解析解，这是由于前者考虑岩石的二维热传导，而解析解只考虑岩石沿垂直于裂隙走向的一维热传导。虽然在设定条件下两者差别不大，但如果具体问题具有显著的岩石二维热传导特征，解析解将会严重失真，不能得到正确的计算结果。岩石的温度分布与演变取决于裂隙水温度，而裂隙开度和岩石热传导系数对裂隙水温度有明显的影响。

设图 1 中的分布热源不随时间变化，取热源作用位置参数 $c = 10\text{ m}$ ， $d = 110\text{ m}$ ， $e = 10\text{ m}$ ，Simpson 数值积分节段个数 $n_q = 100$ ，采用拉氏变换-格林函数半解析法计算。岩石内单位厚度上的分布热流集度为 10 W/m 时，岩石温度分布及随时间的变化如图 8、9 所示。改变热流集度大小对岩石温度的影响如图 10、11 所示，可见裂隙水流动和热源共同影响岩石温度的分布与演变，热源的热流集度对岩石温度的影响随时间而增大。

表 1 计算参数

Table 1 Parameters for calculation

裂隙开度 $2b$ / m	岩石的质量密度 ρ_r / (kg/m ³)	岩石的比热 c_r / (J/(kg·°C))	岩石的热传导系数 λ_r / (W/(m·°C))	水的质量密度 ρ_w / (kg/m ³)	水的比热 c_w / (J/(kg·°C))	裂隙计算长度 L / m	裂隙水流速 u_w / (m/s)	裂隙水和岩石的初始温度 T_0 / °C	裂隙计算起点温度 T^* / °C
0.003	2 650	1 000	2.59	1 000	4 180	300	5.0×10^{-3}	20	90

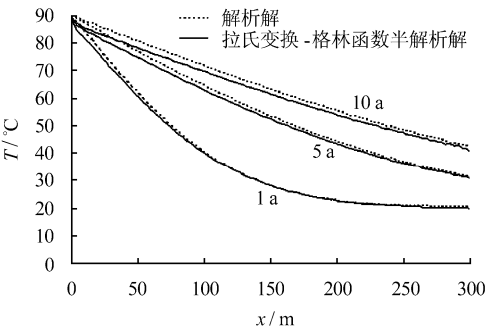


图 4 裂隙水温度 (岩石内部无热源)
Fig.4 Water temperatures in fracture (no heat source in rock interior)

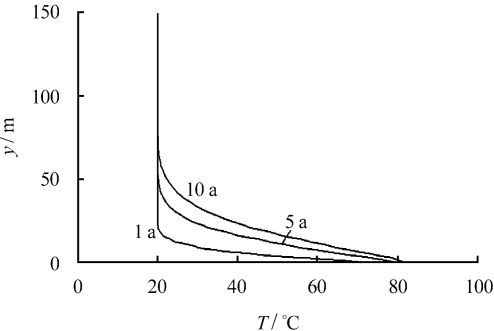


图 5 岩石温度沿 y 方向的分布 (岩石内部无热源, $x=30\text{ m}$)
Fig.5 Rock temperatures along y-direction (no heat source in rock interior, $x=30\text{ m}$)

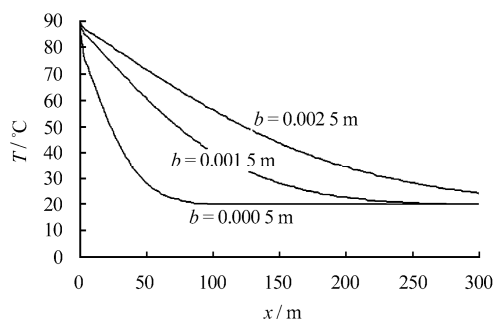


图6 裂隙开度对裂隙水温度的影响
(岩石内部无热源, $t=1$ a)

Fig.6 Effect of fracture aperture on water temperature in fracture (no heat source in rock interior, $t=1$ a)

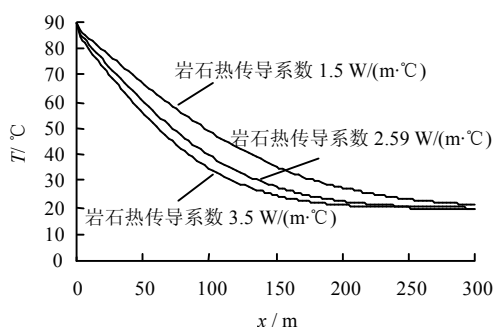


图7 岩石热传导系数对裂隙水温度的影响
(岩石内部无热源, $t=1$ a)

Fig.7 Effect of rock thermal conductivity on water temperature in fracture (no heat source in rock interior, $t=1$ a)

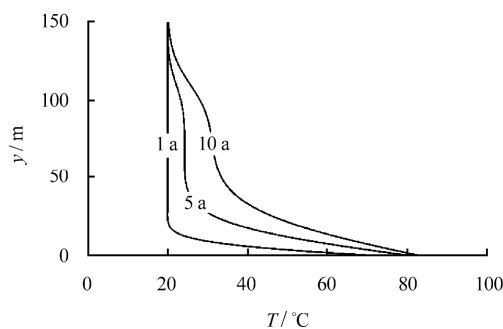


图8 岩石温度沿y方向的分布 (热流集度 10 W/m, $x=30$ m)

Fig.8 Rock temperature along y-direction (heat source intensity 10 W/m, $x=30$ m)

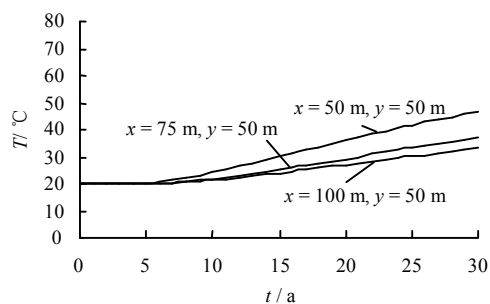


图9 岩石温度随时间的变化 (热流集度 10 W/m)

Fig.9 Temporal variation of rock temperature (heat source intensity 10 W/m)

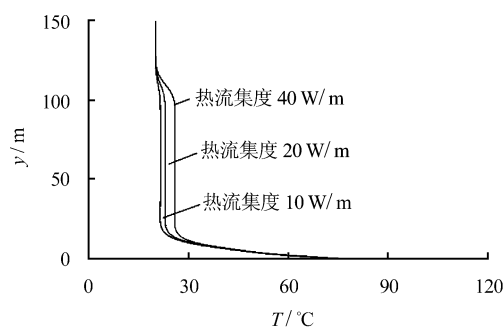


图10 热流集度对岩石温度的影响 ($x=20$ m, $t=1$ a)

Fig.10 Effect of heat source intensity on rock temperature ($x=20$ m, $t=1$ a)

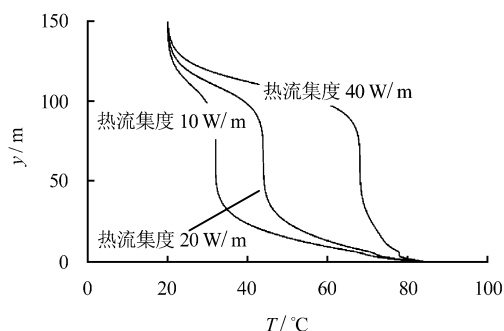


图11 热流集度对岩石温度的影响 ($x=20$ m, $t=5$ a)

Fig.11 Effect of heat source intensity on rock temperature ($x=20$ m, $t=5$ a)

6 结 语

本文借鉴 Cheng 等^[7]针对地热开发所提出的裂隙岩体渗流-传热计算理论,以裂隙岩体高放射性核废物地下处置库性能评估为目标,提出了分布热源作用下单裂隙岩体渗流-传热的简化概念模型、控制微分方程及拉氏变换-格林函数半解析计算方法。针对分布热源作用下单裂隙无限大岩体的渗流-传热问题,建立二维瞬态数学模型,利用拉氏变换后控制微分方程的基本解建立格林函数积分方程,采用解析法处理其中的奇点,通过数值积分和拉氏数值逆变换的求解过程,计算任意时刻裂隙水和岩石的温度分布。通过算例,与基于岩石一维热传导假定的解析解进行了对比,并计算分析了分布热源作用下单裂隙岩体的渗流-传热特征及其对裂隙开度、岩石热传导系数和热流集度的敏感度。

算例表明,(1)就裂隙水温度而言,由于考虑了岩石的二维热传导,拉氏变换-格林函数半解析解小于基于岩石一维热传导假定的解析解;(2)裂隙水温度和岩石温度对裂隙开度和热流集度的敏感度较大,对岩石热传导系数的敏感度较小。

这种拉氏变换-格林函数半解析方法具有理论清晰、计算过程透明和使用方便的特点,可以用于分析单裂隙岩体渗流-传热的基本特征和参数敏感

度,作为校验数值方法合理性与精确度的参考基准,并为进一步采用半解析法计算分布热源作用下多裂隙岩体渗流-传热问题奠定了基础。

参考文献

- [1] 项彦勇. 裂隙岩体中非饱和渗流与运移的概念模型及数值模拟[J]. 工程地质学报, 2002, 10(2): 204—209.
XIANG Yan-yong. Conceptual models and numerical modeling of unsaturated flow and transport in fractured rocks[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2002, 10(2): 204—209.
- [2] 项彦勇. 模拟裂隙多孔介质中变饱和渗流的广义等效连续体方法[J]. 岩土力学, 2005, 26(5): 750—754.
XIANG Yan-yong. A generalized equivalent-continuum method for modeling variably saturated seepage flow in fractured porous media[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(5): 750—754.
- [3] 项彦勇, 姬永红. 变饱和裂隙多孔介质的双渗透率数值模型与参数分析[J]. 土木工程学报, 2005, 38(6): 77—82.
XIANG Yan-yong, JI Yong-hong. An analysis on the dual-permeability numerical models and parameters of variably saturated fractured porous media[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2005, 38(6): 77—82.
- [4] LAUWERIER H A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid[J]. **Appl. Sci. Res.**, 1955, 5: 145—150.
- [5] GRINGARTEN A C, WITHERSPOON P A, OHNISHI Y. Theory of heat extraction from fractured hot dry rock[J]. **Journal of Geophysical Research**, 1975, 80: 1120—1124.
- [6] SCHULZ R. Analytical model calculations for heat exchange in a confined aquifer[J]. **Journal of Geophysics**, 1987, 61: 12—20.
- [7] CHENG A H D, GHASSEMI A, DETOURNAY E. Integral equation solution of heat extraction from a fracture in hot dry rock[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2001, 25: 1327—1338.
- [8] GHASSEMI A, TARASOV S, CHENG A H D. An integral equation for three-dimensional heat extraction from planar fracture in hot dry rock[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2003, 27: 989—1004.
- [9] STEHFEST H. Numerical inversion of Laplace transforms[J]. **Communications of ACM**, 1970, 13: 47—49.
- [10] CHENG A H D, SIDAURUK P, ABOUSLEIMAN Y. Approximate inversion of the Laplace transform[J]. **The Mathematica Journal**, 1994, 4: 76—82.
- [10] 匡忠祥, 宋卫东. 程潮铁矿 1[#]和 2[#]主溜井相互作用机制数值模拟[J]. 金属矿山, 2002, 37(7): 9—11.
KUANG Zhong-xiang, SONG Wei-dong. Numerical analog study of the interaction mechanism of No.1 and No.2 main shafts at Chengchao Iron Mine[J]. **Metal Mine**, 2002, 37(7): 9—11.
- [11] YANG R S, JIANG L L, GUO D M. Numerical simulation orepass choking-up treatment adopting blasting method[J]. **Journal of Beijing Institute of Technology**, 2009, 18(2): 166—170.
- [12] 明世祥. 地下金属矿山主溜井变形破坏机制分析[J]. 金属矿山, 2004, 39(1): 5—8.
MING Shi-xiang. Analysis of deformation destruction mechanism of main pass in underground metal mines[J]. **Metal Mine**, 2004, 39(1): 5—8.
- [13] PICHLER B, HELLMICH C, MANG H A. Impact of rocks onto gravel design and evaluation of experiments[J]. **International Journal of Impact Engineering**, 2005, 31(4): 559—578.
- [14] CHAU K T, WONG R H C, WU J J. Coefficient of restitution and rotational motions of rockfall impacts[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2002, 39(1): 69—77.
- [15] DELHOMME F, MOMMESSIN M, MOUGIN J P, et al. Behavior of a structurally dissipating rock-shed: experimental analysis and study of punching effects[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2005, 42(6): 4204—4219.
- [16] SCHWEIGL J, FERRETTI C, NOSSING L. Geotechnical characterization and rockfall simulation of a slope: A practical case study from South Tyrol(Italy)[J]. **Engineering Geology**, 2003, 67(2): 281—296.
- [17] THORNTON C. Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1997, 64(4): 383—386.
- [18] 何思明, 吴永, 杨雪莲. 滚石坡面冲击回弹规律研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(增刊 1): 2794—2798.
HE Si-ming, WU Yong, YANG Xue-lian. Study of rock-fall motion on slope[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(Supp.1): 2794—2798.
- [19] DAY R W. Case studies of rockfall in soft versus hard rock[J]. **Environmental and Engineering Geoscience**, 1997, 3(1): 133—140.

上接第 332 页