文章编号：1000－7598 (2011) 02－0604－07

# 列车荷载下上覆弹性层横观各向同性饱和地基的动力响应

周 晔[1]，郑荣跃[2]，刘干斌[2]

（1.浙江华东工程安全技术有限公司，杭州 310014；2.宁波大学 建筑工程与环境学院，浙江 宁波 315211）

**摘 要：**基于 Biot 多孔弹性介质的波动理论，构造了轨道、道碴、枕木及弹性层的横观各向同性饱和地基在列车荷载下的动力计算模型。利用 Fourier 变换，得到了列车荷载作用下横观各向同性软土地基上弹性层动力响应的解析结果。利用离散 Fourier 逆变换得到数值计算结果，分析了荷载速度、地基的各向异性参数、弹性层刚度系数及厚度对位移和孔压响应的影响。分析结果表明：弹性层对控制地基振动作用显著，地表振动幅值随荷载速度的增加而增大，软土的横向弹性模量对地表振动及土中孔压有较大影响。

**关 键 词：**列车荷载；动力响应；横观各向同性；多孔弹性介质

**中图分类号：**TU 471.8 **文献标识码：**A

# Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load

ZHOU Ye[1], ZHENG Rong-yue[2], LIU Gan-bin[2]

(1. Zhejiang Huadong Engineering Safety Technology Co., Ltd., Hangzhou 310014 China;
2. College of Architectural, Civil Engineering and Environment, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China)

**Abstract:** A calculation model of dynamic response of transversely isotropic saturated soil under train load is proposed. Rail, rail pad, sleeper, ballast and elastic layer were added into the model. Based on Biot's dynamic poroelastic theory, the dynamic responses of elastic layer on transversely isotropic saturated soils generated by the train load is presented by using the Fourier transform. Numerical results are obtained by using the inverse fast Fourier transform(IFFT); and then, they are used to analyze the influence of the moving load velocity, anisotropic parameter and stiffness coefficient of elastic layer on soil displacemen and pore pressure. The results show that the displacement amplitude increases with the increasing of the load velocity; and the elastic layer has great influence on ground vibration and pore pressure.

**Key words:** train load; dynamic response; transverse isotropy; poroelastic media

## 1 引 言

随着高速铁路的发展，移动荷载下地基的动力响应问题受到越来越多地重视。Sneddon[1]首先研究了弹性半空间土体上受匀速运动荷载的动力响应问题，给出了弹性半空间受点荷载作用动力响应的积分解；Alabi[2]利用 Fourier 变换求解火车荷载作用下线弹性半空间土体的动力响应问题；姚海林[3]将内配纵向钢筋的路面视为置于黏弹性 Winkler 地基上的正交各向异性薄板，车辆轮载被简化成包含自振频率的矩形均布移动荷载，应用三角级数及 Fourier 变换方法，得到了单轮荷载作用下路面竖向位移的表达式；X.Sheng[4]在成层弹性地基上部添加了轨道、道碴、枕木，利用 Fourier 变换求解了移动简谐荷载下的层状弹性地基的动力响应，并推导了层状弹性地基的递推公式。以上文献都基于土体为单相介质的假设进行计算，忽略了孔隙水的影响。自 20 世纪 50 年代 Biot[5－7]给出了饱和介质的普遍的动力方程后，有关饱和土的研究越来越引起人们的关注，刘干斌[8]通过引入势函数，并利用 Helmholtz

收稿日期：2009-11-27
基金项目：国家自然基金资助（No. 40902089）；宁波市自然科学基金资助（No. 2007A610062）。
第一作者简介：周晔，男，1983 年生，硕士研究生，主要从事土动力学方面的研究。E-mail: zhouye83@163.com

原理和 Fourier 变换技术，研究了运动荷载作用下有限层厚软土地基的振动。考虑到天然饱和土体由于历史沉积作用而表现明显的横观各向同性特性；张引科等[9]对横观各向同性饱和土的非轴对称动力响应问题进行了初步研究。

实际中列车荷载并不是直接作用于软土地基上，为了改善地基较弱的状况，往往会在地基上部浇注一层强度较高的不透水弹性介质来控制地基沉降，日本就有通过浇筑轻质土来降低路堤沉降的实例。因此，上覆弹性层并带有轨道、枕木、道碴的横观各向同性饱和软土地基计算模型比较符合实际情况。研究该模型在列车荷载下的动力响应就比较具有实际应用价值。

本文采用 Biot 理论并利用双重 Fourier 变换技术，研究了列车荷载下上覆弹性层并带有轨道、枕木、道碴的横观各向同性软土地基的动力响应问题，得到应力、位移和孔隙水压力严格的解析形式。并利用离散 Fourier 逆变换得到数值计算结果，以分析弹性层厚度和刚度系数、轨道、各向异性参数及车辆荷载的速度对列车荷载作用下软土地基位移及孔隙水压力分布的影响。

## 2　计算模型及控制方程

上覆弹性层的横观各向同性软土地基在列车荷载作用下的动力响应计算模型如图 1 所示。

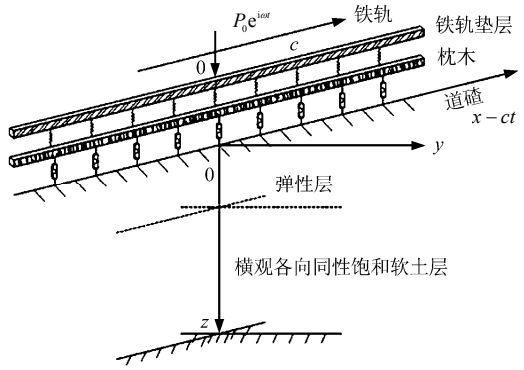


**图 1　计算模型简图**

**Fig.1　The computation model**

轨道梁控制方程：

$$EI\frac{\partial^4 w_{\mathrm{R}}(x,t)}{\partial x^4}+m_{\mathrm{R}}\frac{\partial^2 w_{\mathrm{R}}(x,t)}{\partial t^2}+k_{\mathrm{p}}[w_{\mathrm{R}}(x,t)-w_{\mathrm{S}}(x,t)]=\delta(x-ct)P_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1}$$

枕木控制方程：

$$m_{\mathrm{S}}\frac{\partial^2 w_{\mathrm{S}}(x,t)}{\partial t^2}+k_{\mathrm{P}}[w_{\mathrm{S}}(x,t)-w_{\mathrm{R}}(x,t)]=-F_2(x,t) \tag{2}$$

道碴控制方程：

$$\frac{m_{\mathrm{B}}}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w_{\mathrm{S}}(x,t)}{\partial t^2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 w_{\mathrm{G}}(x,t)}{\partial t^2}\end{Bmatrix}+k_{\mathrm{B}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{\mathrm{S}}(x,t)\\w_{\mathrm{G}}(x,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_2(x,t)\\-F_3(x,t)\end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中：$EI$ 为铁轨的抗弯刚度；$m_{\mathrm{R}}$、$m_{\mathrm{S}}$、$m_{\mathrm{B}}$ 分别为铁轨、枕木、道碴的单位长度质量；$k_{\mathrm{P}}$、$k_{\mathrm{B}}$ 分别为轨道垫层与道碴的弹性系数；$w_{\mathrm{R}}$、$w_{\mathrm{S}}$、$w_{\mathrm{G}}$ 分别为铁轨、枕木、道碴底面的竖向位移；轨道梁与枕木之间的接触力为 $F_2(x,t)$；枕木与地基表面之间的接触力为 $F_3(x,t)$。移动荷载被模拟为速度为 $c$；角频率为 $\omega$；幅值为 $P_0$ 的简谐荷载。

弹性层厚度为 $H_1$，其运动方程为

$$(\lambda+G)\nabla(\nabla u_i)+G\nabla^2 u_i=\rho_{\mathrm{e}}\ddot{u}_i \tag{4}$$

式中：$\lambda$、$G$ 为弹性层的 Lame 常数；$u_1$、$u_2$、$u_3$ 分别为弹性层的 $x$、$y$、$z$ 方向的位移；$\rho_{\mathrm{e}}$ 为弹性介质的密度。

软土层厚度为 $H_2$，根据 Biot 饱和多孔介质理论，横观各向同性软土的基本运动方程为

$$\left.\begin{aligned}
&C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+C_{13}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial z}-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}+C_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\\
&C_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+C_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial z}=\rho_{\mathrm{s}}\ddot{u}_1+\rho_l\ddot{w}_1\\
&C_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+C_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\\
&C_{13}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\partial z}-\alpha\frac{\partial p}{\partial y}+C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+C_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\partial z}=\rho_{\mathrm{s}}\ddot{u}_1+\rho_l\ddot{w}_2\\
&C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+C_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\partial z}+C_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+\\
&C_{13}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+C_{13}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\partial z}+C_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}-\alpha\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{\mathrm{s}}\ddot{u}_1+\rho_l\ddot{w}_3
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

渗流连续方程为

$$p=-M\dot{w}_{i,i}-\alpha M\dot{u}_{i,i} \tag{6}$$

流体运动方程为

$$p_{,i}=-\rho_{\mathrm{f}}\ddot{u}_i-m\ddot{w}_i-b\dot{w}_i \tag{7}$$

式中：$u_1$、$u_2$、$u_3$ 分别为土骨架的 $x$、$y$、$z$ 方向的位移；$w_1$、$w_2$、$w_3$ 分别为孔隙水的 $x$、$y$、$z$ 方向的位移；$\rho_{\mathrm{s}}$、$\rho_{\mathrm{l}}$ 分别为土骨架与孔隙流体的密度；

$p$ 为孔隙水压力；$m=\rho_{\mathrm{l}}/n$；$b=\eta_{\mathrm{w}}/k_{\mathrm{s}}$；$\eta_{\mathrm{w}}$ 为流体的黏滞系数；$k_{\mathrm{s}}$ 为土体渗透系数；$\alpha$、$M$ 为反映土体压缩性的参数，$M=K_{\mathrm{s}}^2/\left(K_{\mathrm{d}}-K_{\mathrm{b}}\right)$，$(0\leqslant M\leqslant\infty)$，$\alpha=1-K_{\mathrm{b}}/K_{\mathrm{s}}$，$(0\leqslant\alpha\leqslant1)$，$K_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{s}}[1+n\cdot\left(K_{\mathrm{s}}/K_{\mathrm{f}}-1\right)]$，$K_{\mathrm{s}}$、$K_{\mathrm{f}}$、$K_{\mathrm{b}}$ 分别为土颗粒、流体和土骨架的体积模量。当 $M\to\infty$，$\alpha\to1$ 时，表示土颗粒和孔隙流体均不可压缩。$C_{ij}$ 为各向异性弹性常数，表达如下：

$$\left.\begin{aligned}
&C_{11}=E_{\mathrm{H}}\left(1-\nu_{\mathrm{HV}}^2E_{\mathrm{H}}/E_{\mathrm{V}}\right)/\left(1+\nu_{\mathrm{HH}}\right)\Delta;\ C_{44}=G_{\mathrm{V}}\\
&C_{12}=E_{\mathrm{H}}\left(\nu_{\mathrm{HH}}+\nu_{\mathrm{HV}}^2E_{\mathrm{H}}/E_{\mathrm{V}}\right)/\left(1+\nu_{\mathrm{HH}}\right)\Delta\\
&C_{13}=E_{\mathrm{H}}\nu_{\mathrm{HV}}/\Delta\\
&C_{33}=E_{\mathrm{V}}\left[1+2\nu_{\mathrm{HV}}^2E_{\mathrm{H}}/\left(E_{\mathrm{V}}\Delta\right)\right]\\
&C_{66}=E_{\mathrm{H}}/2\left(1+\nu_{\mathrm{HH}}\right)\\
&\Delta=1-\nu_{\mathrm{HH}}-2\nu_{\mathrm{HV}}^2E_{\mathrm{H}}/E_{\mathrm{V}}
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

## 3 控制方程求解

引入二维 Fourier 变换及逆变换：

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{f}\left(\xi,\eta\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&f\left(x,y\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}\left(\xi,\eta\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

考虑荷载形式为 $\delta(x-ct)P_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则 Fourier 变换后的响应函数可以表示为

$$\phi\left(\xi,\eta,z,t\right)=\phi\left(\xi,\eta,z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\xi c)t}\quad(10)$$

对式（4）进行 Fourier 变换，再引入变量 $e_{\mathrm{h}}=\xi\overline{u}_1+\eta\overline{u}_2$ 和 $\Omega=\omega-\xi c$，整理后可得

$$\begin{vmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\partial^2/\partial z^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&b_3\\b_4&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\partial/\partial z\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_5&0\\0&b_6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\end{vmatrix}=0\quad(11)$$

式中：$b_1=G$；$b_2=\lambda+2G$；$b_3=\left(\lambda+G\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)$；$b_4=-\lambda-G$；$b_5=\rho\Omega^2-\left(\lambda+2G\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)$；$b_6=\rho\Omega^2-G\left(\xi^2+\eta^2\right)$。

设式（11）的解为

$$\left[e_{\mathrm{h}}\quad\overline{u}_3\right]^{\mathrm{T}}=\left[C_1\quad C_2\right]^{\mathrm{T}}\exp\left(\lambda z\right)\quad(12)$$

把式（12）代入式（11），得到以下特征方程：

$$a_1\lambda^4+a_2\lambda^2+a_3=0\quad(13)$$

式中：$a_1=b_1b_2$；$a_2=b_1b_6+b_2b_5-b_3b_4$；$a_3=b_5b_6$。

假设特征式（13）的 4 个根为 $\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$、$\lambda_4$，定义 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 为正数，且 $\lambda_1=-\lambda_3$，$\lambda_2=-\lambda_4$，通过 matlab 软件得到特征值后，由弹性体本构关系得到弹性地基的应力、位移表达式为

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{u}_3^{(1)}=\sum_{s=1}^{4}C_s\mathrm{e}^{\lambda_sZ};\ \overline{u}_1^{(1)}=\sum_{s=1}^{4}C_sJ_s\mathrm{e}^{\lambda_sZ}\\
&\overline{\sigma}_{33}^{(1)}=\sum_{s=1}^{4}C_sY_s\mathrm{e}^{\lambda_sZ};\ \overline{\sigma}_{13}^{(1)}=\sum_{S=1}^{4}C_sX_s\mathrm{e}^{\lambda_sZ}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}
&J_s=\frac{\left(\lambda+G\right)\mathrm{i}\xi\lambda_s+\left(\lambda+G\right)\xi L_s}{G\lambda_s^2-G\left(\xi^2+\eta^2\right)+\rho\Omega^2}\\
&L_s=\frac{-b_3\lambda_s}{b_1\lambda_s^2+b_5}\\
&Y_s=-\mathrm{i}\lambda L_s+\left(\lambda+2G\right)\lambda_s\\
&X_s=-\mathrm{i}\xi G+\lambda_sGJ_s
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

对式（3）～（7）进行 Fourier 变换，再引入变量 $e_{\mathrm{h}}=\xi\overline{u}_1+\eta\overline{u}_2$ 和 $\beta=\dfrac{1}{m\Omega^2-\mathrm{i}\Omega b}$，整理后可得

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}C_{44}&&\\&C_{33}&\\&&M\beta\end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\\\overline{p}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}&b_1&\\b_2&&b_3\\&b_4&\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\\\overline{p}\end{bmatrix}+\\
&\begin{bmatrix}b_5&&b_6\\&b_7&\\b_8&&b_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\mathrm{h}}\\\overline{u}_3\\\overline{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}
&b_1=\left(-C_{13}\mathrm{i}-C_{44}\mathrm{i}\right)\left(\xi^2+\eta^2\right);\ b_2=-C_{44}\mathrm{i}-C_{13}\mathrm{i}\\
&b_3=\beta\Omega^2\rho_l-\alpha;\ b_5=-C_{11}\xi^2-C_{11}\eta^2+\rho\Omega^2-\rho_l^2\beta\Omega^4\\
&b_4=\alpha M-\rho_l\beta M\Omega^2;\ b_6=\left(\alpha\mathrm{i}-\mathrm{i}\rho_l\beta\Omega^2\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)\\
&b_7=-C_{44}\xi^2-C_{44}\eta^2+\rho\Omega^2-\rho_l^2\beta\Omega^4\\
&b_8=\mathrm{i}M\rho_l\beta\Omega^2-\mathrm{i}\alpha M;\ b_9=1-\beta M\left(\xi^2+\eta^2\right)
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

设式（16）的解为

$$\left[e_{\mathrm{h}}\quad\overline{u}_3\quad\overline{p}\right]^{\mathrm{T}}=\left[C_1\quad C_2\quad C_3\right]^{\mathrm{T}}\exp\left(\lambda z\right)\quad(18)$$

则式（16）的特征方程可以表示为

$$a_1\lambda^6+a_2\lambda^4+a_3\lambda^2+a_4=0\quad(19)$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}
&a_2=C_{33}C_{44}b_9+b_7C_{44}M\beta-C_{44}b_3b_4+\\
&\quad C_{33}b_5M\beta-b_1b_2M\beta\\
&a_3=C_{44}b_7b_9+C_{33}b_5b_9+b_5b_7M\beta-b_3b_4b_5+\\
&\quad b_1b_3b_8-b_1b_2b_9+b_2b_4b_6-C_{33}b_6b_8\\
&a_1=C_{33}C_{44}M\beta,\ \ a_4=b_5b_7b_9-b_6b_7b_8
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

假设特征方程（19）的 6 个根为 $\lambda_5$、$\lambda_6$、$\lambda_7$、

$\lambda_8$、$\lambda_9$、$\lambda_{10}$，定义$\lambda_5$、$\lambda_6$、$\lambda_7$为正数，且$\lambda_5=-\lambda_8$，$\lambda_6=-\lambda_9$，$\lambda_7=-\lambda_{10}$，则式（16）的解表示为

$$\overline{p}^{(2)}=\sum_{s=5}^{10}C_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z};\ e_{\mathrm{h}}=\sum_{s=5}^{10}C_s h_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z};\ \overline{u}_3^{(2)}=\sum_{s=5}^{10}C_s r_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z} \tag{21}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} r_s&=\frac{\left[b_2b_6\lambda_s-b_3\lambda_s\left(C_{44}\lambda_s^2+b_5\right)\right]}{\left(C_{33}\lambda_s^2+b_7\right)\left(C_{44}\lambda_s^2+b_5\right)-b_1b_2\lambda_s^2}\\ h_s&=\frac{-b_1\lambda_s r_s-b_6}{C_{44}\lambda_s^2+b_5}\quad(s=5,6,7,8,9,10)\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

利用$e_{\mathrm{h}}$和$\overline{u}_1$与$\overline{u}_2$的关系，可以得到

$$\overline{u}_1^{(2)}=\sum_{s=5}^{10}C_sW_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z} \tag{23}$$

式中：

$$W_s=\frac{C_{13}\mathrm{i}\xi\lambda_s r_s+C_{44}\mathrm{i}\xi\lambda_s r_s+C_{12}\xi h_s+C_{66}\xi h_s-\alpha\mathrm{i}\xi+\mathrm{i}\rho_1\beta\xi\Omega^2}{C_{44}\lambda_s^2+C_{12}\xi^2+C_{66}\xi^2-C_{11}\xi^2-C_{66}\eta^2+\rho\Omega^2-\rho_1^2\beta\Omega^4} \tag{24}$$

根据本构关系$\sigma_z=C_{13}\left(u_1+u_2\right)+C_{33}u_3-\alpha p$和$\sigma_{xz}=C_{44}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x}\right)$得到

$$\overline{\sigma}_{33}^{(2)}=\sum_{s=5}^{10}C_sN_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z};\ \ \overline{\sigma}_{13}^{(2)}=\sum_{s=5}^{10}C_sM_s\mathrm{e}^{\lambda_s Z} \tag{25}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} N_s&=-\mathrm{i}C_{13}h_s+C_{33}\lambda_s r_s-\alpha\\ M_s&=C_{44}\lambda_sW_s-C_{44}\mathrm{i}\xi r_s\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

引入一维 Fourier 变换及逆变换，$\overline{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x$，$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi$对式子式（1）～（3）进行整理，则任意时刻$t$在地基表面作用的荷载可以表示为

$$\left.\overline{\sigma}_{33}^{(1)}\right|_{Z=0}=-\frac{\sin(\eta b)}{\eta b}\overline{F}_3(\xi);\quad\left.\overline{\sigma}_{13}^{(1)}\right|_{Z=0}=0 \tag{27}$$

式中：$b$为轨道宽度；

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F}_3(\xi)=\frac{A_1^2\overline{w}_{\mathrm{G}}(\xi,t)+A_1A_2P_0}{Q}-A\overline{w}_{\mathrm{G}}(\xi,t)\\ &A_1=\frac{1}{6}m_{\mathrm{B}}\Omega^2+k_{\mathrm{b}};\ A_2=k_{\mathrm{P}}/\left(EI\eta^4-\Omega^2m_{\mathrm{R}}+k_{\mathrm{P}}\right)\\ &A_3=-\frac{1}{3}m_{\mathrm{B}}\Omega^2+k_{\mathrm{b}};\ Q=A_3-\Omega^2m_{\mathrm{s}}+k_{\mathrm{P}}-A_2k_{\mathrm{P}}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

考虑连续性条件，则

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w}_{\mathrm{G}}(\xi,t)=\left.\overline{u}_3^{(1)}\right|_{Z=0};\ \left.\overline{\sigma}_{33}^{(1)}\right|_{Z=H_1}=\left.\overline{\sigma}_{33}^{(2)}\right|_{Z=H_1}\\ &\left.\overline{\sigma}_{13}^{(1)}\right|_{Z=H_1}=\left.\overline{\sigma}_{13}^{(2)}\right|_{Z=H_1};\ \left.\overline{u}_1^{(1)}\right|_{Z=H_1}=\left.\overline{u}_1^{(2)}\right|_{Z=H_1}\\ &\left.\overline{u}_3^{(1)}\right|_{Z=H_1}=\left.\overline{u}_3^{(2)}\right|_{Z=H_1}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

饱和土地基顶部的弹性层不透水，底部为刚性基础且不透水，则

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial\overline{p}^{(2)}}{\partial z}\right|_{Z=H_1}=0;\quad\left.\frac{\partial\overline{p}^{(2)}}{\partial z}\right|_{Z=H_1+H_2}=0\\ &\left.\overline{u}_1^{(2)}\right|_{Z=H_1+H_2}=0;\ \left.\overline{u}_3^{(2)}\right|_{Z=H_1+H_2}=0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

把式（27）～（30）代入式（14）、式（15）式（21）～（26），则可以得到各未知量的矩阵型式：

$$[E][Q]=[F] \tag{31}$$

式中；$[Q]=\left[C_1\ \ \cdots\ \ C_{10}\right]^{\mathrm{T}}$；$[F]=\left[f_1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\right]^{\mathrm{T}}$；矩阵$[E]$中各元素为

$$\left.\begin{aligned} &e_{1i}=Y_i+A_1^2\frac{\sin(\eta BR)}{Q\eta BR}-A_3\frac{\sin(\eta BR)}{\eta BR}\\ &e_{2i}=X_i;\ e_{3i}=Y_i\mathrm{e}^{\lambda_iH_1};\ e_{3j}=-N_j\mathrm{e}^{\lambda_jH_1};\ e_{4i}=X_i\mathrm{e}^{\lambda_iH_1}\\ &e_{4j}=-M_j\mathrm{e}^{\lambda_jH_1};\ e_{5i}=J_i\mathrm{e}^{\lambda_iH_1};\ e_{5j}=-W_j\mathrm{e}^{\lambda_jH_1}\\ &e_{6i}=\mathrm{e}^{\lambda_iH_1};\ e_{6j}=-r_j\mathrm{e}^{\lambda_jH_1};\ e_{7j}=\lambda_j\mathrm{e}^{\lambda_jH_1};\\ &e_{8j}=\lambda_j\mathrm{e}^{\lambda_j(H_1+H_2)};\ e_{9j}=r_j\mathrm{e}^{\lambda_j(H_1+H_2)};\ e_{10j}=W_j\mathrm{e}^{\lambda_j(H_1+H_2)},\\ &\qquad(i=1\cdots4,\quad j=5\cdots10)\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

矩阵中其余分项都为 0。

在求得未知量$C_1$～$C_{12}$后，对式（14）、（21）中各第 1 式进行 Fourier 逆变换，则可得地基表面的竖向位移及饱和土中任一点的孔隙水压力解析表达式：

$$\left.\begin{aligned} u_3\big|_{z=0}&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_1+C_2+C_3+C_4\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ p&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_5e^{\lambda_1z}+C_6e^{\lambda_2z}+C_7e^{\lambda_3z}+\right.\\ &\qquad\left.C_8e^{\lambda_4z}+C_9e^{\lambda_5z}+C_{10}e^{\lambda_6z}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

## 4 数值计算及分析

在得到列车荷载下弹性层表面的位移及软土中的孔隙水压力解答后，要直接对其解答进行求逆 Fourier 变换较为困难，为此采用离散快速 Fourier 逆变换（IFFT）。截断积分范围，可令 $-10<\xi$，$\eta<10$，取足够的积分点，则可满足计算精度[10]。利用数值计算结果，讨论荷载速度、弹性层刚度及厚度、软土横向弹性模量对列车荷载作用下弹性层表面竖向位移及软土地基中任意深度孔隙水压力分布的影响，定义位移、孔隙水压力幅值为

$$f(x)=\sqrt{\left\{\mathrm{Re}\left[f(x)\right]\right\}^2+\left\{\mathrm{Im}\left[f(x)\right]\right\}^2} \quad (34)$$

弹性层厚度为 0.1 m，横观各向同性层的厚度 $H=5$ m，计算参数见表 1，轨道及弹性层计算参数见表 2，计算结果如图 2～11 所示。

**表 1 软土地基计算参数**

**Table 1 Computational parameters of soft ground**

| $E_V$ / MPa | $E_H$ / MPa | $\nu_{HH}$ | $\nu_{HV}$ | $G_V$ / MPa | $\rho$ / (kg/m$^3$) | $\rho_f$ / (kg/m$^3$) | $n$ | $\alpha$ | $M$ | $\eta_w$ | $k$ / (m$^3$·s/kg) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 3 | 0.3 | 0.3 | 0.8 | 1.82 | 1.00 | 0.4 | 0.9 | $2.45\times10^{10}$ | 0.01 | $1\times10^{-7}$ |

**表 2 轨道及弹性层计算参数**

**Table 2 Computational parameters of rail and elastic layer**

| $EI$ / Nm$^2$ | $m_R$ / (kg/m) | $m_S$ / (kg/m) | $m_B$ / (kg/m) | $k_P$ / (N/m$^2$) | $k_B$ / (N/m$^2$) | $b$ / m | $\lambda$ / MPa | $G$ / MPa | $\rho_e$ / (g/cm$^3$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1.26\times10^7$ | 120 | 490 | 1200 | $3.5\times10^8$ | $3.15\times10^8$ | 0.1 | 51.9 | 22.2 | 1.50 |

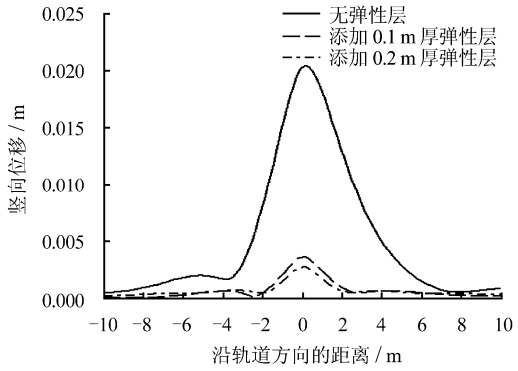


**图 2 弹性层对地基表面振动影响**

**Fig.2 Effect of elastic layer on surface vibration**

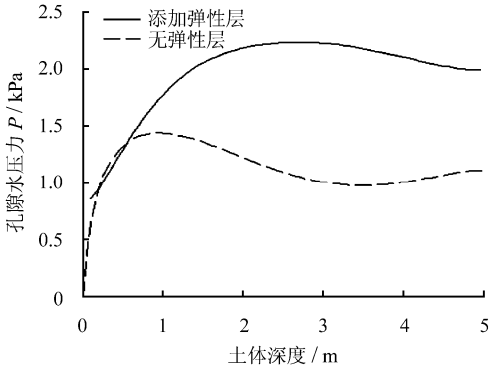


**图 4 弹性层对孔隙水压力的影响**

**Fig.4 Effect of elastic layer on pore pressure**

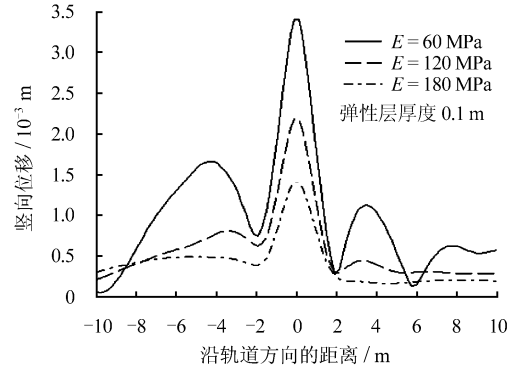


**图 3 弹性层弹性模量对地基振动的影响**

**Fig.3 Effect of Young's modulus of elastic layer on surface vibration**

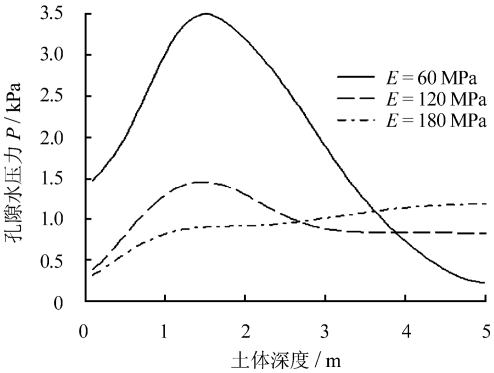


**图 5 弹性层弹性模量对孔隙水压力的影响**

**Fig.5 Effect of Young's modulus of elastic layer on pore pressure**

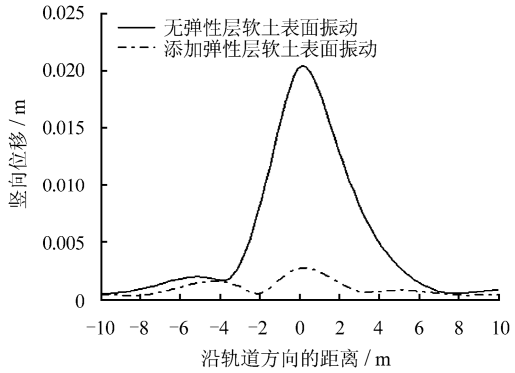


**图 6　弹性层对软土面振动的影响**

**Fig.6　Effect of elastic layer on vibration of soft soil**

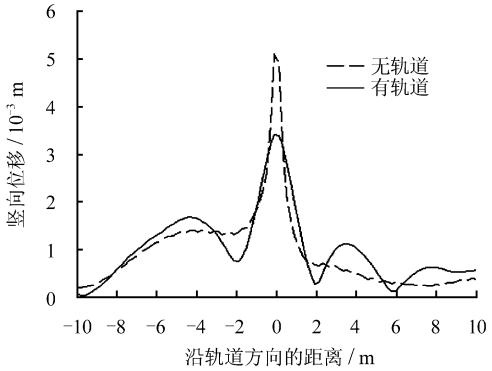


**图 7　轨道对地基表面振动的影响**

**Fig.7　Effect of rail on surface vibration of soft soil**

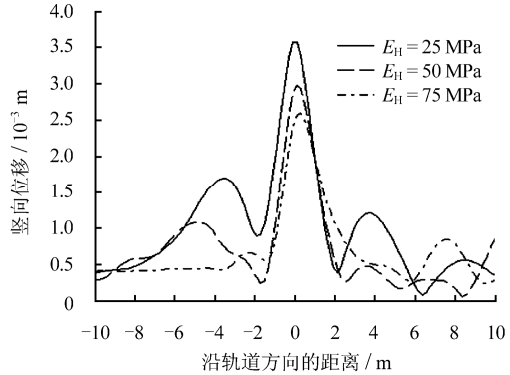


**图 8　软土横向弹性模量对地基表面振动影响**

**Fig.8　Effect of transverse Young’s modulus of soft soil on surface vibration**

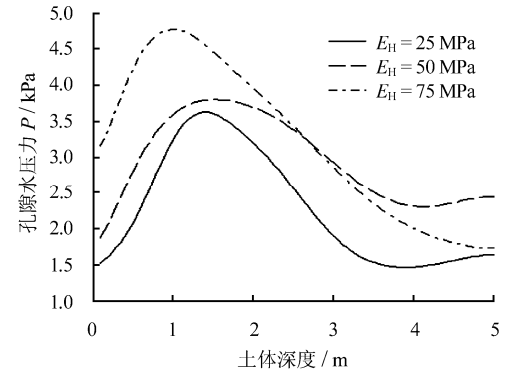


**图 9　软土横向弹性模量对孔隙水压力的影响**

**Fig.9　Effect of transverse Young’s modulus of soft soil on pore pressure**

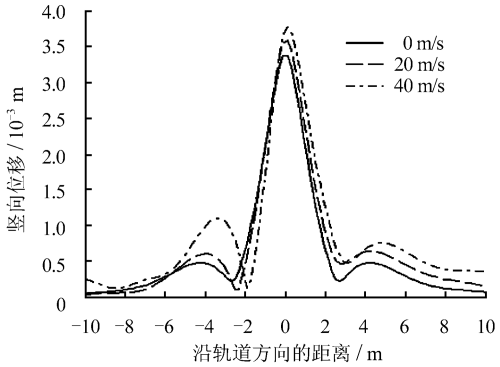


**图 10　列车速度对地基表面振动的影响**

**Fig.10　Effect of train velocity on surface vibration**

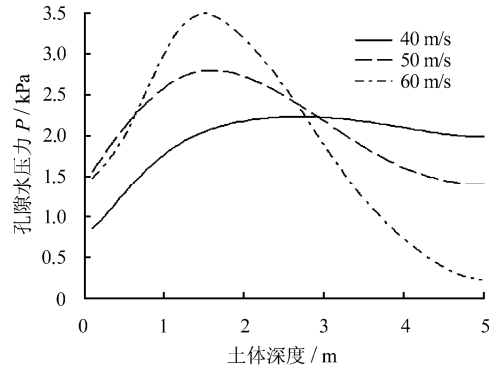


**图 11　列车速度对孔隙水压力的影响**

**Fig.11　Effect of train velocity on pore pressure**

图 2 反映出弹性层对改善软土地区的振动有明显作用，但弹性层的厚度对控制振动影响不大。从图 3 可以看出，虽然弹性层的厚度仅 0.1 m，但其弹性模量对地基振动影响非常明显，随着弹性模量的提高，振动也大幅减小，在实际工程中处理软土地基应重点考虑如何提高弹性垫层的刚度。图 4 为弹性层对土中孔隙水压力带来的影响，由于弹性层并不透水，故软土层的上表面孔隙水压力不为 0，从图 4 中可以看出，弹性层使得孔隙水压力明显增大；从图 5 可以看出，弹性层弹性模量的增加能有效减小孔隙水压力。图 6 表明，弹性层对控制软土层的振动效果明显，说明弹性层可以有效控制地基在动力荷载作用下的长期附加沉降。图 7 反映了轨道、枕木、道碴对地表振动的影响，可见由于轨道的存在，荷载作用点的振动明显减小，而周围的振动又小幅增加。从图 8 可以看出，软土的横向弹性模量对地基表面振动有明显影响，且振动随着横向弹性模量的提高而降低。图 9 反映出横向弹性模量对孔隙水压力也存在影响，随着弹性模量的提高孔隙水压力增加。图 10 给出了列车静止及列车速度为 20 m/s 与 40 m/s 时的地基振动，由图可以看出，在一定速度范围内，地表振动随着列车速度的增加

而不断增大，且在荷载作用点的振动最大。而从图 11 中可以看出，列车速度对土中的孔隙水压力也有较大影响，随着列车速度的增加，孔隙水压力沿着深度变化的现象越明显，接近地表处孔压变换较大。

## 5 结 论

（1）本文建立了列车荷载作用下轨道、道碴、枕木及弹性层的有限层厚横观各向同性饱和地基的振动计算模型，该计算模型弥补了软土地基在移动荷载作用下动力响应计算模型过于简单的缺点，考虑的因素更为全面，更加切合实际。

（2）利用 Biot 理论与 Fourier 变换技术得到了轨道地基动力响应解，进而通过算例研究了列车荷载作用下地基内的孔隙水压力响应，分析了工程上较为关心的地表振动及地基土体孔隙水压力分布受荷载移动速度、土层参数的影响。分析结果表明，地基振动幅度随着列车速度的增加而增加，软土的横向弹性模量对于地基振动及孔隙水压力有一定影响，

（3）本文重点研究了弹性层对地基振动及孔隙水压力的影响。之所以在数值计算中将弹性层的厚度设置为 0.1 m，是考虑到人工浇筑弹性层会带来较高的施工成本，所以将弹性层厚度设定为 0.1 m，这样文章的分析结果就具有一定实际应用价值。分析结果表明：弹性层的添加不但能有效控制地基振动以及软土地基的长期附加沉降，而且高强度的弹性层还能降低软土中的孔隙水压力。可见，高强度的弹性层可以用来改善软土地区交通荷载下地基长期沉降的状况。

## 参 考 文 献


[1] SNEDDON I N. Fourier transforms[M]. New York: McGraw-Hill, 1951.

[2] ALABI B. A parametric study on some aspects of ground-borne vibrations due to rail traffic[J]. **J. Sound Vibr**, 1992, 153(1): 77－87.

[3] 姚海林, 卢正, 刘干斌, 等. 黏弹性地基上路面板在多轮荷载作用下的响应分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(2): 367－373.
YAO Hai-ling, LU Zheng, LIU Gan-bin, et al. Dynamic response of pavement resting on viscoelastic foundation under multiple moving loads[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(2): 367－373.

[4] SHENG X. Ground vibration generated by a load moving along a railway track[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1999, 228(1): 129－156.

[5] BIOT M A. The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid[J]. **J. Acoust. Soc. Am.**, 1956, 28(2): 168－191.

[6] BIOT M A. General theory of acoustic propagation in porous dissipative media[J]. **J. Acoust. Soc. Am.**, 1962, 34(9): 1254－1264.

[7] BIOT M A, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. **J. Appl. Phys.**, 1962, 33(4): 1482－1498.

[8] 刘干斌, 汪鹏程, 姚海林, 等. 矩形运动荷载作用下软土地基的三维振动研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(10): 1658－1662.
LIU Gan-bin, WANG Pen-cheng, YAO Hai-lin, et al. 3D ground vibration of a soft subgrade in the vicinity of a moving rectangular load[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(10): 1658－1662.

[9] 张引科, 黄义. 横观各向同性饱和弹性多孔介质非轴对称动力响应[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(1): 66－70.
ZHANG Yin-ke, HUANG Yi. The non-axisymmetrical dynamic response of transversely isotropic saturated poroelastic media[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2001, 22(1): 66－70.

[10] JONES D V, HOUED DEC D L, PEPLOW A T. Ground vibration in the vicinity of a moving harmonic rectangular load on a half-space[J]. **European Journal of Mechanics A/Solids**, 1998, 17: 153－166.