

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.10.031

黏弹性地基中基坑开挖对邻近桩基变形影响的时域解

张治国^{1,2,3}, 鲁明浩¹, 宫剑飞³

(1. 上海理工大学 环境与建筑学院, 上海 200093; 2. 国土资源部 丘陵山地地质灾害防治重点实验室, 福建 福州 350002;
3. 中国建筑科学研究院 建筑安全与环境国家重点实验室, 北京 100013)

摘要: 目前就软土基坑开挖卸荷对邻近桩基变形影响的研究一般是基于瞬时开挖工况, 很少考虑时间效应对桩-土相互作用的影响, 但实际工程中软土在开挖情况下具有较为明显的流变效应。从地基黏弹性角度出发, 采用两阶段法研究了黏弹性地基中基坑开挖与邻近桩基相互作用的时域问题。第1阶段基于 Boltzmann 黏弹性模型推导出 Mindlin 时域解, 用于分析黏弹性地基中基坑开挖引起的邻近桩基处的土体附加应力; 第2阶段采用 Pasternak 地基模型分析桩基与黏弹性土体之间的相互作用, 并求得考虑流变效应的桩基水平变形的简化时域解。最后, 采用大型有限差分软件对相关工况进行数值模拟, 并将数值模拟结果与简化时域解进行对比分析, 得到了较好的一致性。此外, 也针对 Boltzmann 黏弹性模型参数(体积模量、剪切模量、黏性系数)、桩径、基坑开挖深度、桩与基坑间距和基坑开挖尺寸进行了影响因素分析。分析结果表明, 所得出的简化时域解能较好地反映基坑开挖对邻近桩基水平变形的影响, 以及桩基变形随时间的发展趋势, 可为相关实际工程提供一定理论依据。

关键词: 基坑工程; 桩基; 黏弹性; Boltzmann 模型; 时域分析

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2017)10-3017-13

Time-domain solution for influence of excavation on adjacent pile deformation in visco-elastic foundation

ZHANG Zhi-guo^{1,2,3}, LU Ming-hao¹, GONG Jian-fei³

(1. School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Key Laboratory of Geohazard Prevention of Hilly Mountains, Ministry of Land and Resources, Fuzhou, Fujian 350002, China;

3. State Key Laboratory of Building Safety and Environment, China Academy of Building Research, Beijing 100013, China)

Abstract: At present, the studies of adjacent pile deformation caused by foundation excavation in transient case are common. Less attention has been paid to the influences of time behavior on the pile-soils interaction. The disturbed soils show the rheological properties during excavation. A two-stage method considering the soil visco-elasticity is proposed to obtain the time-domain solution for the interaction between adjacent pile and foundation pit excavation. On the first stage, based on Boltzmann visco-elastic model, a Mindlin's time-domain solution is derived to analyze the influence of excavation on soil additional stress at the position of adjacent pile in visco-elastic foundation. On the second stage, a Pasternak's two-parameter foundation model is adopted to simulate the interaction between pile and soils. A simplified time-domain solution of pile horizontal deformation is derived in consideration of rheological effects. Finally, the simulation results from finite difference software are compared to simplified time-domain solution with good agreements. The parameters of Boltzmann visco-elastic model (bulk modulus, shear modulus, viscosity coefficient), pile diameter, excavation depth, distance between pile and foundation pit and excavation size are analyzed to investigate the influences on pile deformation. It is shown that the presented simplified time-domain solution can reflect the influence of excavation on adjacent pile deformation and the development trend of pile deformation with time. It may provide certain theoretical basis for practical projects.

Keywords: foundation pit engineering; pile; visco-elasticity; Boltzmann model; time-domain solution

收稿日期: 2016-01-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 41772331); 上海自然科学基金项目(No. 15ZR1429400); 国土资源部丘陵山地地质灾害防治重点实验室课题(No. 2015k005); 建筑安全与环境国家重点实验室课题(No. BSBE2015-01)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41772331), the Natural Science Foundation of Shanghai (15ZR1429400), the Open Project Program of Key Laboratory of Geohazard Prevention of Hilly Mountains of Ministry of Land and Resources (2015k005) and the Open Project Program of State Key Laboratory of Building Safety and Environment (BSBE2015-01).

第一作者简介: 张治国, 男, 1978年生, 博士, 博士后, 副教授, 硕士生导师, 主要从事地下工程施工影响方面的研究与教学工作。

E-mail: zgzhang@usst.edu.cn

1 引言

随着城市化进程的迅猛发展和城市人口的急剧增加,城市用地率日益扩大。21世纪是地下空间开发的世纪,地面空间、地下空间与上部空间协调发展的城市立体化再开发,是城市中心区改造的较好途径。因此,城市地下工程建设项目的数量和规模迅速增大,例如建筑物基坑、地铁基坑、地下过街通道基坑等。城市中进行深基坑开挖时,大面积的卸荷会导致土体发生位移,从而对邻近既有建(构)筑物产生不良影响。目前针对基坑开挖卸荷对邻近既有桩基等构筑物变形影响的相关理论分析方法,可以分为简化解析^[1-9]、数值分析^[10-15]和现场实测^[16-18]等几个方面。

然而,上述理论研究很少考虑时间效应对桩-土相互作用的影响,实际工程中的土体在开挖的情况下应具有明显的时间效应。也就是说,土体或桩基的变形不是瞬间发生的,而是随着时间的发展逐渐变化的,时间对土体的应力-应变的影响是明显的,特别在软土地区,土体具有更为显著的流变效应。因此,对于土体流变引起的结构物变形时间效应的评价,以及土体受扰动后土与结构物相互作用性状的分析 and 预测,值得深入研究。

本文从土体流变的角度出发,采用两阶段法研究了软土基坑开挖与邻近桩基相互作用问题,考虑了黏弹性地基中基坑开挖对邻近桩基水平变形的时域影响。第1阶段将土体考虑为黏弹性体并推导出 Mindlin 时域解,从而求得基坑开挖引起的土体附加应力解;第2阶段采用 Pasternak 地基模型求得桩基水平变形的理论简化解。最后,采用有限差分软件进行数值模拟,将所得结果与简化理论解结果对比验证,其成果可为相关实际工程提供一定的理论依据。

2 开挖引起邻近桩基附加应力时域解

2.1 半无限黏弹性体的 Mindlin 时域解

从理论上讲,基坑开挖卸荷可以看作是土体内部某一范围内的开挖卸荷过程,而 Mindlin 解是弹性理论中的经典解^[9],可以用于分析地下工程所产生的土体附加应力场问题。如图1所示,半无限弹性体内深度 d 处任意一点 $M = (\varepsilon, \eta, d)$ 在竖向集中荷载 P_0 和 x 轴方向水平集中荷载 Q_0 以及 y 轴方向水平集中荷载 F_0 作用下,引起的任意一点 $N = (x, y, z)$ 处水平向附加应力 $\sigma_x^1(x, y, z)$ 、 $\sigma_x^2(x, y, z)$ 和 $\sigma_x^3(x, y, z)$ 分别为

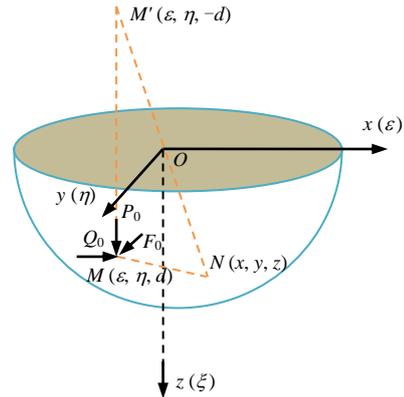


图1 半无限体弹性内部作用集中力
Fig.1 Semi-infinite elastic body with a force applied inside

$$\sigma_x^1(x, y, z) = \frac{P_0}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)(z-d)}{R_1^3} - \frac{3(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)[3(z-d)-4\mu(z+d)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\mu)(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_2^5} + \frac{6d(z+d)[(1-2\mu)z-2\mu d]}{R_2^5} - \frac{30d(x-\varepsilon)^2z(z+d)}{R_2^7} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+d)} \left[1 - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2(R_2+z+d)} - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_x^2(x, y, z) = \frac{Q_0(x-\varepsilon)}{8\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{R_2^3} - \frac{3(x-\varepsilon)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(x-\varepsilon)^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+d)^2} \left[3 - \frac{(x-\varepsilon)^2(3R_2+z+d)}{R_2^2(R_2+z+d)} \right] + \frac{6d}{R_2^5} \left[3d - (3-2\mu)(z+d) + \frac{5(x-\varepsilon)^2z}{R_2^2} \right] \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_x^3(x, y, z) = \frac{F_0}{8\pi} \left\{ \frac{1-2\mu}{1-\mu} \left[\frac{x-\varepsilon}{R_1^3} - \frac{6d(x-\varepsilon)(z+d)}{R_2^5} \right] + \frac{(1-2\mu)(3-4\mu)(x-\varepsilon)}{1-\mu} - \frac{3-4\mu}{1-\mu} \frac{3(x-\varepsilon)y^2}{R_2^5} - \frac{1}{1-\mu} \left[\frac{3y^2(x-\varepsilon)}{R_1^5} - \frac{6c^2(x-\varepsilon)}{R_2^5} - \frac{30cy^2(x-\varepsilon)}{R_2^7} \right] - (1-2\mu) \frac{4(x-\varepsilon)}{R_2(R_2+z+d)^2} \left[1 - \frac{y^2(3R_2+z+d)}{R_2^2(R_2+z+d)} \right] \right\} \quad (3)$$

式中: μ 为土体泊松比;
 $R_1 = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\eta)^2 + (z-d)^2}$;
 $R_2 = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\eta)^2 + (z+d)^2}$ 。

分析集中荷载作用下土体附加应力场时，本文选择 Boltzmann 黏弹性模型描述土体的黏弹性本构关系，研究黏弹性半空间体内部作用有任意方向集中力时的准静态黏弹性解。

已有理论研究表明^[20-23]，Boltzmann 黏弹性地基模型能够较好地反映岩土体的瞬时弹性变形以及土体随时间逐步稳定的黏弹性变形。如图 2 所示，Boltzmann 黏弹性地基模型是由一个弹性元件（H 体）和黏性元件（K 体）串联而成。

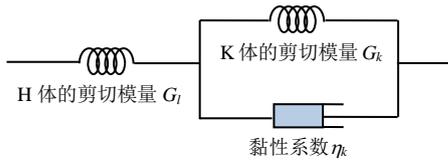


图 2 Boltzmann 黏弹性模型
Fig.2 Boltzmann visco-elastic model

三维黏弹性体的应力-应变关系可统一表达为

$$P'S_{ij}(t) = Q'e_{ij}(t) \quad (4)$$

$$P''\sigma_{kk}(t) = Q''\varepsilon_{kk}(t) \quad (5)$$

式中： $S_{ij}(t)$ 为偏应力张量； $e_{ij}(t)$ 为偏应变张量； $\sigma_{kk}(t)$ 为球应力张量； $\varepsilon_{kk}(t)$ 为球应变张量； P' 、 Q' 、 P'' 、 Q'' 为线性微分算子，其表达式分别为

$$P' = \sum_{k=0}^m p'_k \frac{d^k}{d^k t} \quad (6)$$

$$Q' = \sum_{k=0}^n q'_k \frac{d^k}{d^k t} \quad (7)$$

$$P'' = \sum_{k=0}^m p''_k \frac{d^k}{d^k t} \quad (8)$$

$$Q'' = \sum_{k=0}^n q''_k \frac{d^k}{d^k t} \quad (9)$$

根据 Boltzmann 黏弹性地基模型本构关系，其偏张量部分的黏弹性本构关系为

$$(G_l + G_k)S_{ij}(t) + \eta_k \frac{dS_{ij}}{dt} = 2G_l G_k e_{ij}(t) + 2G_l \eta_k \frac{de_{ij}}{dt} \quad (10)$$

式中： G_l 和 G_k 为剪切模量； η_k 为黏性系数。

球张量部分的弹性本构关系为

$$\sigma_{kk}(t) = 3K\varepsilon_{kk}(t) \quad (11)$$

式中： K 为体积模量。

将式 (10)、(11) 代入式 (6) ~ (9) 可得各微分算子表达式为

$$P' = (G_l + G_k) + \eta_k \frac{d}{dt} \quad (12)$$

$$Q' = 2G_l G_k + 2G_l \eta_k \frac{d}{dt} \quad (13)$$

$$P'' = 1 \quad (14)$$

$$Q'' = 3K \quad (15)$$

对式 (12) ~ (15) 进行 Laplace 变换：

$$\overline{P}'(s) = (G_l + G_k) + \eta_k s \quad (16)$$

$$\overline{Q}'(s) = 2G_l G_k + 2G_l \eta_k s \quad (17)$$

$$\overline{P}''(s) = 1 \quad (18)$$

$$\overline{Q}''(s) = 3K \quad (19)$$

式中： s 为 Laplace 变换算子。

根据弹性-黏弹性对应原理，弹性模量 $E(t)$ 和泊松比 $\mu(t)$ 经 Laplace 变换后的表达式分别为

$$E(s) = \frac{3\overline{Q}''(s)\overline{Q}'(s)}{2\overline{Q}''(s)\overline{P}''(s) + \overline{Q}'(s)\overline{P}''(s)} \quad (20)$$

$$\mu(s) = \frac{\overline{Q}''(s)\overline{P}'(s) - \overline{Q}'(s)\overline{P}''(s)}{2\overline{Q}''(s)\overline{P}''(s) + \overline{Q}'(s)\overline{P}''(s)} \quad (21)$$

将式 (16) ~ (19) 代入式 (20)、(21) 可得

$$E(s) = \frac{9K(G_l G_k + G_l \eta_k s)}{3K(G_l + G_k + \eta_k s) + G_l G_k + G_l \eta_k s} \quad (22)$$

$$\mu(s) = \frac{3K(G_l + G_k + \eta_k s) - 2G_l G_k - 2G_l \eta_k s}{6K(G_l + G_k + \eta_k s) + 2G_l G_k + 2G_l \eta_k s} \quad (23)$$

设竖向荷载 $P(t) = P_0 H(t)$ ，其中 $H(t)$ 是单位阶跃函数，其定义为

$$\left. \begin{aligned} H(t) &= 0 \quad t < 0 \\ H(t) &= 1 \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对 $P(t)$ 进行 Laplace 变换可得

$$P(s) = \frac{P_0}{s} \quad (25)$$

将式 (22)、(23) 和 (25) 代入式 (1)，可得出竖向集中荷载 P_0 作用下土体水平向附加应力场的 Laplace 变换表达式为

$$\sigma_x^1 = \frac{P_0}{8\pi} \left\{ T_1 \left[\frac{z-d}{R_1^3} + \frac{3(z-d)}{R_2^3} + \frac{6d(z+d)z}{R_2^5} \right] - T_2 \frac{3(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_2^5} - T_3 \left[\frac{3(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_1^5} + \frac{30d(x-\varepsilon)^2 z(z+d)}{R_2^7} \right] - T_4 \left[\frac{2(z+d)}{R_2^3} + \frac{6d^2(z+d)}{R_2^5} \right] - T_5 \frac{4}{R_2(R_2+z+d)} \left[1 - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2(R_2+z+d)} - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (26)$$

其中

$$T_1 = \frac{6G_l \eta_k s + 6G_l G_k}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)s + (3K\eta_k + 4G_l \eta_k)s^2} \quad (27)$$

$$T_2 = \frac{(6K\eta_k + 14G_l \eta_k)s + (14G_l G_k + 6G_l K + 6G_k K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)s + (3K\eta_k + 4G_l \eta_k)s^2} \quad (28)$$

$$T_3 = \frac{(6K\eta_k + 2G_l \eta_k)s + (2G_l G_k + 6G_l K + 6G_k K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)s + (3K\eta_k + 4G_l \eta_k)s^2} \quad (29)$$

$$T_4 = \frac{9K(G_l + G_k) + 9K\eta_k s}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)s + (3K\eta_k + 4G_l \eta_k)s^2} - \frac{1}{s} \quad (30)$$

$$T_5 = \frac{3(G_l G_k + G_l \eta_k s)}{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)s + (3K\eta_k + G_l \eta_k)s^2} \quad (31)$$

对式 (26) ~ (31) 进行 Laplace 逆变换可得竖向集中荷载作用下土体水平向附加应力场的 Mindlin 时域解为

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 = & \frac{P_0}{8\pi} \left\{ J_1 \left[\frac{z-d}{R_1^3} + \frac{3(z-d)}{R_2^2} + \frac{6d(z+d)z}{R_2^5} \right] - \right. \\ & J_2 \frac{3(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_2^5} - J_3 \left[\frac{2(z+d)}{R_2^3} + \frac{6d^2(z+d)}{R_2^5} \right] - \\ & J_4 \left[\frac{3(x-\varepsilon)^2(z-d)}{R_1^5} + \frac{30d(x-\varepsilon)^2 z(z+d)}{R_2^7} \right] - \\ & \left. J_5 \frac{4}{R_2(R_2+z+d)} \left[1 - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2(R_2+z+d)} - \frac{(x-\varepsilon)^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

其中

$$J_1 = \frac{6G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{18G_l^2 Ke \frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (33)$$

$$J_2 = \frac{14G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 + 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (34)$$

$$J_3 = \frac{-4G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + 2G_l^2 \left(2 - 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (35)$$

$$J_4 = \frac{2G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 - 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (36)$$

$$J_5 = \frac{9G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(G_l + 3K)} + \frac{3G_l G_k}{G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} \quad (37)$$

同理，设水平集中荷载 $Q(t) = Q_0 H(t)$ ，通过 Laplace 变换和逆变换得出 x 方向水平集中荷载 Q_0 作用下土体水平向附加应力场的 Mindlin 时域解为

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(x, y, z) = & \frac{Q_0(x-\varepsilon)}{8\pi} \left\{ -M_1 \frac{1}{R_1^3} + M_2 \frac{1}{R_2^3} - \right. \\ & M_3 \left[\frac{3(x-\varepsilon)^2}{R_1^5} - \frac{18d^2}{R_2^5} - \frac{30d(x-\varepsilon)^2 z}{R_2^2} \right] - \\ & M_4 \left[\frac{4 \left[3 - \frac{(x-\varepsilon)^2(3R_2+z+d)}{R_2^2(R_2+z+d)} \right]}{R_2(R_2+z+d)^2} - \right. \\ & \left. M_5 \frac{3(x-\varepsilon)^2}{R_2^5} - M_6 \frac{6d(z+d)}{R_2^5} \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

其中

$$M_1 = \frac{6G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{18G_l^2 Ke \frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (39)$$

$$M_2 = \frac{18G_l^2 Ke \frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}}{(4G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)(4G_l + 3K)} + \frac{36G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(G_l + 3K)(G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)} + \frac{54G_l G_k (G_l G_k + G_l K + G_k K)}{(4G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)(G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)} \quad (40)$$

$$M_3 = \frac{2G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 - 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (41)$$

$$M_4 = \frac{9G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(G_l + 3K)} + \frac{3G_l G_k}{G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} \quad (42)$$

$$M_5 = \frac{14G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 + 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (43)$$

$$M_6 = \frac{5G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{3K \left[12G_k K + G_l^2 \left(16 - 11e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{12KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (44)$$

同理，设水平集中荷载 $F(t) = F_0 H(t)$ ，通过 Laplace 变换和逆变换同时转换坐标系，可得出 y 方向水平集中荷载 F_0 作用下土体水平向附加应力场的 Mindlin 时域解为

$$\sigma_y = \frac{F_0}{8\pi} \left\{ H_1 \left[\frac{-(y-\eta)}{R_1^3} + \frac{6d(y-\eta)(z+d)}{R_2^5} \right] + H_2 \frac{-(y-\eta)}{R_2^3} - H_3 \frac{-3(y-\eta)(x-\varepsilon)^2}{R_2^5} - H_4 (y-\eta) \left[\frac{-3(x-\varepsilon)^2}{R_1^5} + \frac{6d^2}{R_2^5} + \frac{30c(x-\varepsilon)^2}{R_2^7} \right] - H_5 \frac{-4(y-\eta)}{R_2(R_2+z+d)^2} \left[1 - \frac{(x-\varepsilon)^2(3R_2+z+d)}{R_2^2(R_2+z+d)} \right] \right\} \quad (45)$$

其中

$$H_1 = \frac{6G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{18G_l^2 Ke \frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (46)$$

$$H_2 = \frac{18G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_l K)(4G_l + 3K)} + \frac{36G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(G_l + 3K)(G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)} + \frac{6G_l G_k (7G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)}{(4G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)(G_l G_k + 3G_k K + 3G_l K)} \quad (47)$$

$$H_3 = \frac{14G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 + 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (48)$$

$$H_4 = \frac{2G_l G_k}{4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} + \frac{6K \left[3G_k K + G_l^2 \left(4 - 3e^{-\frac{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(4G_l + 3K)}} \right) \right]}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} + \frac{6KG_l(4G_k + 3K)}{(4G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(4G_l + 3K)} \quad (49)$$

$$H_5 = \frac{9G_l^2 Ke \frac{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)t}{\eta_k(G_l + 3K)}}{(G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K)(G_l + 3K)} + \frac{3G_l G_k}{G_l G_k + 3G_l K + 3G_k K} \quad (50)$$

2.2 作用在桩基上水平附加应力的时域解

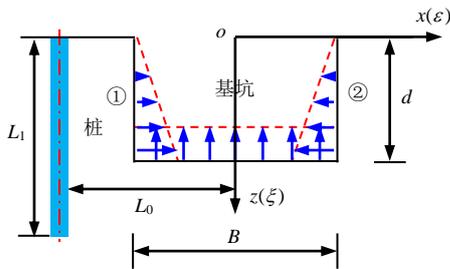
建立如图 3 的坐标系以及桩基计算模型：桩基位于基坑左侧，长度为 L_1 ，基坑开挖深度为 d ，基坑开挖区域投影平面长度为 L ，宽度为 B ，基坑 4 个侧壁编号分别为①、②、③、④，基坑中心与邻近桩基之间的水平距离为 L_0 ，桩基中心在基坑侧边长度 L 方向的 1/2 位置。

本文计算中，基坑施工造成的土体卸荷可分为两部分：①基坑底面土体竖向卸荷；②基坑四周侧壁土体水平卸荷。基坑底面土体竖向卸荷相当于对基坑底面处土体施加竖直向上的矩形分布等效荷载 $P_0 = \gamma d$ (γ 为开挖土层重度加权值)。因此，求解土体竖向卸荷引起的作用在桩基轴线上某点的水平向附加应力 $\sigma_x^{p0}(z,t)$ 时，代入 $P_0 = \gamma d$ 表达式，并对其在基坑底面竖向卸荷范围 Ω 上进行积分即可得出

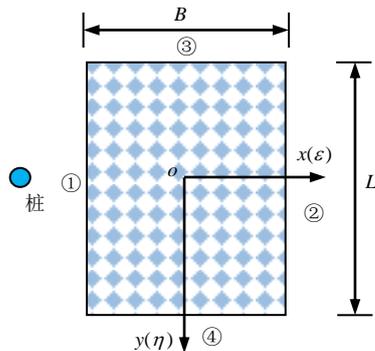
$$\sigma_x^{p0}(z,t) = \iint_{\Omega} \sigma_x^p(L_0, 0, z) d\xi d\eta \quad (51)$$

式中： $\sigma_x^p(L_0, 0, z)$ 由式 (32) 计算。

同理，基坑四周侧壁土体水平卸荷相当于对基坑四周侧壁面处土体施加水平方向分布等效荷载 Q_0 和 F_0 。水平方向的等效荷载通过土体的侧压力系数与竖向等效荷载的乘积求得，侧压力系数 $K_c = \mu / (1 - \mu)$ ，可由土体泊松比求得。



(a) 正视图



(b) 俯视图

图 3 桩基计算模型

Fig.3 Computing model of pile

求出 Q_0 后，将编号为①和②的基坑侧壁上 Q_0 的表达式代入，并对其在基坑侧壁①和②的水平卸荷范围 Γ_1 和 Γ_2 上进行积分，即可求出侧壁①和②处土体水平卸荷引起的桩基轴线上某点水平向附加应力 $\sigma_x^{q1}(z,t)$ 和 $\sigma_x^{q2}(z,t)$ 为

$$\sigma_x^{q1}(z,t) = \iint_{\Gamma_1} \sigma_x^q(L_0, 0, z) d\xi d\eta \quad (52)$$

$$\sigma_x^{q2}(z,t) = \iint_{\Gamma_2} \sigma_x^q(L_0, 0, z) d\xi d\eta \quad (53)$$

式中： $\sigma_x^q(L_0, 0, z)$ 由式 (38) 计算。

求出 F_0 后，将编号为③和④的基坑侧壁上 Q_0 的表达式代入，并对其在基坑侧壁③和④的水平卸荷范围 Γ_3 和 Γ_4 上进行积分，即可求出侧壁③和④处土体水平卸荷引起的桩基轴线上某点水平向附加应力 $\sigma_x^{f3}(z,t)$ 和 $\sigma_x^{f4}(z,t)$ 为

$$\sigma_x^{f3}(z,t) = \iint_{\Gamma_3} \sigma_x^f(L_0, 0, z) d\xi d\eta \quad (54)$$

$$\sigma_x^{f4}(z,t) = \iint_{\Gamma_4} \sigma_x^f(L_0, 0, z) d\xi d\eta \quad (55)$$

式中： $\sigma_x^f(L_0, 0, z)$ 由式 (45) 计算。

根据叠加原理，基坑施工卸荷所引起的作用在桩基轴线水平向附加应力的时域解为

$$q(z,t) = \sigma_z^{p0}(z,t) + \sigma_z^{q1}(z,t) + \sigma_z^{q2}(z,t) + \sigma_z^{f3}(z,t) + \sigma_z^{f4}(z,t) \quad (56)$$

公式的求解涉及到复杂函数的二重积分，本文利用数学软件 Matlab 进行求解。

3 Pasternak 黏弹性地基上的时域计算方法

考虑到传统 Winkler 地基模型不能反映土体连续性特性的缺陷，张治国等^[24]提出了基于 Pasternak 双参数地基模型计算桩基水平位移和内力的解析解，但没有考虑时间效应。Pasternak 地基模型在 Winkler 地基的基础上增加了一个剪切层(剪切刚度为 G)，如图 4 所示。该模型的基本假定为：①在纵向上将桩基等效为一根宽度为 D 、刚度为 EI 的矩形梁；②剪切层仅产生剪切变形，不产生压缩变形；③桩基与地基土体紧密相贴，其变形与接触处的地基变形协调；④不考虑地基与桩基间的横向摩擦力。

根据变形协调和力学平衡条件，建立被动单桩平衡微分方程为

$$EI \frac{d^4 u(z,t)}{dz^4} - G(t)D \frac{d^2 u(z,t)}{dz^2} + k(t)Du(z,t) = q(z,t)D \quad (57)$$

式中： $u(z,t)$ 为桩身水平位移时域解； $q(z,t)$ 为作用在桩基上的附加荷载时域解； $q(z,t)$ 由式 (56)

分软件对基坑卸荷引起的邻近桩基水平变形进行了数值模拟。数值计算中采用了软件自带土体流变本构模型来考虑时间效应的影响。

建立如图5所示的三维数值模型，为了避免产生边界效应，模型尺寸取150 m×100 m×50 m。基坑尺寸为30 m×20 m×10 m，桩长为18 m，桩径为0.9 m，桩基中心线与基坑中心的水平距离为20 m。桩体弹性模量为20.5 GPa，土体剪切层厚度为15 m。土层为各向同性的均匀土体，土体密度为1.95 g/cm³，体积模量为0.68 GPa，泊松比为0.33，H体中剪切模量为0.86 GPa，K体中剪切模量为0.62 GPa，黏性系数为16.7 GPa·d。基坑支护采用宽度为1 m的地下连续墙，深度为10 m，泊松比为0.3，密度为2.40 g/cm³，弹性模量为30 GPa。底板尺寸取30 m×20 m，厚度为1 m，泊松比为0.33，弹性模量为28 GPa。

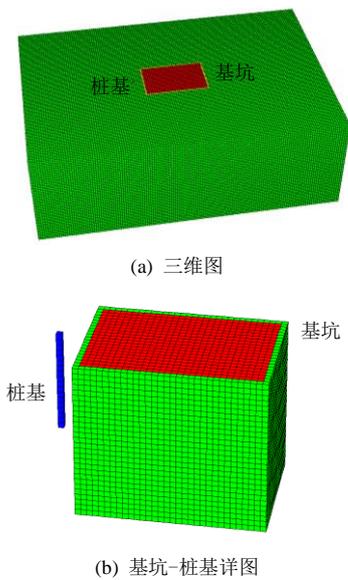


图5 三维数值模拟

Fig.5 Three-dimensional numerical model

考虑土体流变下的桩基水平变形随时间的发展曲线如图6所示，其中图6(a)~6(d)分别对应的是桩基深度为2.7、7.2、9.9、14.4 m的水平变形随时间的变化曲线。从图中可以看出，理论简化解与数值模拟解曲线变化趋势较为吻合。基坑开挖卸荷后0 d的初始水平位移分别为12.9、14.2、11.8、5 mm，在考虑土体流变效应的情况下，120 d后，采用简化理论方法计算得出的水平位移分别为16.6、18.4、16.9、7.9 mm。由此可见，桩基因土体流变效应影响而产生的随时间发展的累计变形量分别为3.7、4.2、5.1、2.9 mm，分别占不考虑土体流变工况下桩基总变形量的22.3%、22.9%、30.2%和36.7%。

这表明土体流变对桩基的水平变形影响较大，不能忽略。

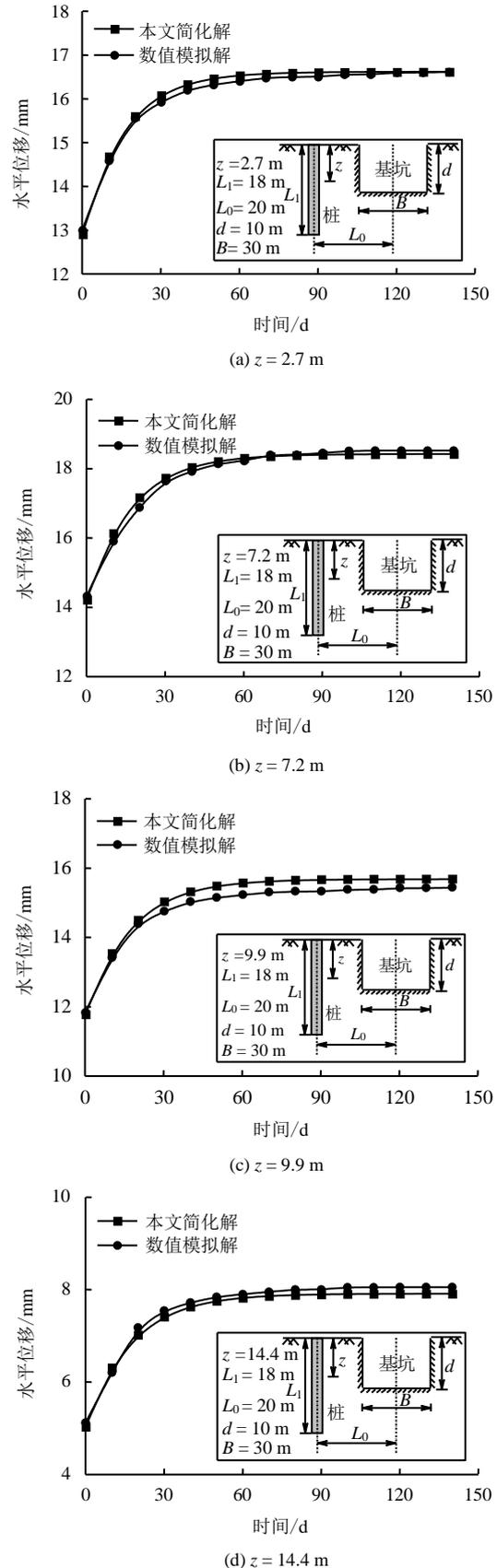


图6 桩基水平位移-时间关系曲线

Fig.6 Curves of pile lateral displacement and time

从图 6(b)中可以看出, 开挖后 40 d 内桩基水平变形随时间发展增长很快, 在 10~20 d 中增加速率最大, 达到峰值, 超过 20 d 之后变形增加逐渐变缓, 60 d 之后基本趋于稳定。图 6(a)、6(c)和 6(d)的变化趋势与图 6(b)一致, 由此可知, 基坑开挖后的 20 d 内是对桩基变形的影响最大时间段, 土体流变所产生的影响在 20 d 内集中显著体现, 因此, 在实际工程中应当在这段时间内加强对桩基变形的监测, 从而降低这种危险因素的不利影响。

5 Boltzmann 黏弹性模型参数分析

假设基坑附近桩基桩径等效宽度为 0.9 m, 桩长为 18 m, 桩基弹性模量取值为 20.5 GPa。基坑尺寸为 30 m×20 m×10 m, 泊松比为 0.33, 体积模量 $K=0.68$ GPa, 黏性系数 $\eta_k=16.7$ GPa·d, K 体中剪切模量 $G_k=0.62$ GPa。H 体中剪切模量 $G_l=0.86$ GPa, 采用本文提出的简化理论计算方法, 假定桩顶无约束, 桩端自由。下面对 G_l 、 G_k 、 η_k 和 K 4 个参数进行影响因素分析。

5.1 H 体中剪切模量 G_l 的影响

图 7(a)、7(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后剪切模量 G_l 不同情况下基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响, H 体中剪切模量 G_l 分别取 0.43、0.86、1.72 GPa。可以看出, H 体中剪切模量 G_l 对桩基变形有较大影响, G_l 越大, 桩基的水平变形越小。可见土体剪切变形对桩基的影响是不容忽视的, 说明土体流变对桩基的水平变形影响较大, 不能忽略。

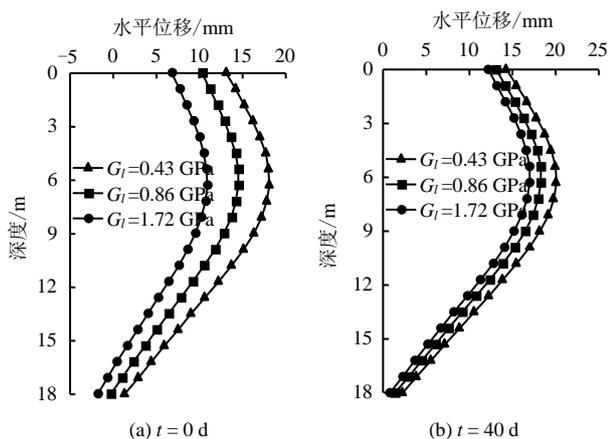


图 7 H 体剪切模量不同情况下桩基水平位移对比
Fig.7 Lateral displacement of pile with different shear moduli of H

5.2 K 体中剪切模量 G_k 的影响

图 8(a)、8(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后剪切模量 G_k 不同情况下基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响, K 体中剪切模量 G_k 分别取 0.31、0.62、1.24 GPa。

从图中可以看出, G_k 的变化对桩基水平变形基本无影响, 这是因为在三参量 H-K 固体模型中 H 体主要反映土体的瞬时弹性变形, K 体主要反映与时间有关的黏弹性变形。因此, K 体中剪切模量 G_k 的变化对桩基水平变形的影响不是非常显著。对比图 8(a)和 8(b)可以看出, 桩身的整体水平位移增幅明显, 说明土体的黏弹性对桩基的水平变形影响较大, 不可忽略。

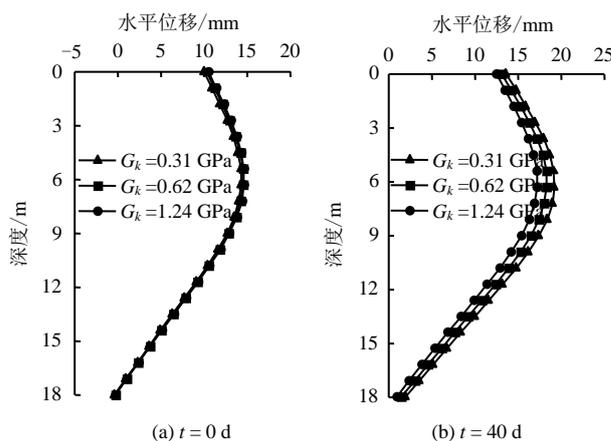


图 8 K 体剪切模量不同情况下桩基水平位移对比
Fig.8 Lateral displacement of pile with different shear moduli of K

5.3 体积模量 K 的影响

图 9(a)、9(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后体积模量 K 不同情况下基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响, 体积模量 K 分别取 0.34、0.68、1.36 GPa。从图中可以看出, 体积模量对桩基水平变形的最终累计值的影响是明显的, 当体积模量 K 越大时, 桩基的水平变形越大, 因此, 土体的体积模量对桩基的影响是不容忽视的。通过图 9 中桩基水平位移的对比可以说明, 黏弹性地基中土体流变对桩基的变形是有明显影响的。

5.4 黏性系数 η_k 的影响

图 10 为黏性系数 η_k 不同情况下基坑开挖对邻近桩基深度为 7.2 m 处水平位移的影响, 黏性系数 η_k 分别取 8.35、16.7、33.4 GPa·d。从图中可以看出, 黏性系数对桩基水平变形的最终累计值是没有影响的, 但是对达到峰值的时间长度是有显著影响的。当 η_k 取值为 8.35 GPa·d 时, 桩基水平位移的增长速率较缓, 在 100 d 后才到达峰值; 当 η_k 取值 33.4 GPa·d 时, 桩基水平位移的增长速率迅速增大, 仅在 20 d 内就达到峰值。因此, 在实际工程中应当根据不同黏性系数取值制定相应的监测方案,

从而降低基坑施工对邻近桩基的不良影响因素。

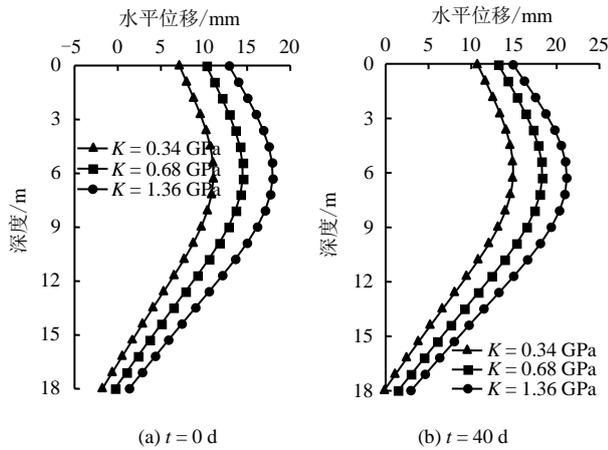


图9 体积模量不同情况下桩基水平位移对比
Fig.9 Lateral displacement of pile with different bulk moduli

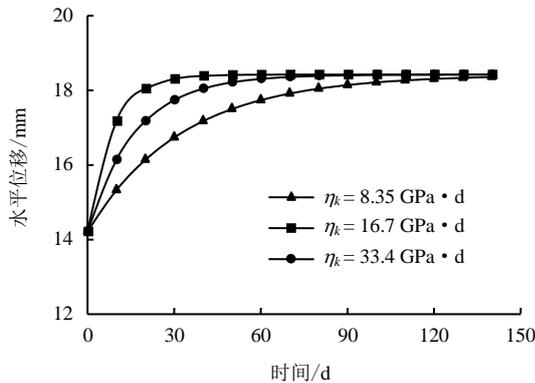


图10 不同黏性系数情况下桩基水平位移对比
Fig.10 Lateral displacement of pile with different viscosities

6 桩基影响因素分析

假设基坑附近桩基桩长为 18 m，桩径等效宽度为 0.9 m，桩基弹性模量取值为 20.5 GPa。基坑尺寸为 30 m×20 m×10 m，泊松比为 0.33，体积模量为 0.68 GPa，黏性系数为 16.7 GPa·d，K 体中剪切模量 $G_k=0.62$ GPa，H 体中剪切模量 $G_l=0.86$ GPa，基坑开挖深度为 10 m，桩与基坑间距为 5 m。采用本文提出的简化理论计算方法，假定桩顶无约束，桩端自由。下面对桩径等效宽度、开挖深度、桩与基坑间距和基坑开挖尺寸 4 个参数进行影响因素分析。

6.1 桩基等效宽度 D 的影响

图 11(a)、11(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后桩径等效宽度不同时基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响，桩径等效宽度分别取 0.5、0.9、1.8 m。可以看

出，在桩基深度为 3~12 m 时，桩径等效宽度越大，隧道开挖引起的桩身水平位移就越小，而桩身弯矩随着桩径等效宽度的增大而增大。这是因为桩径等效宽度越大，桩基抗弯刚度就越大，其抗变形能力增加。而在桩端和桩底处，桩径等效宽度越大，桩体抵抗自身变形能力越强，因此产生的影响与中间段不同。

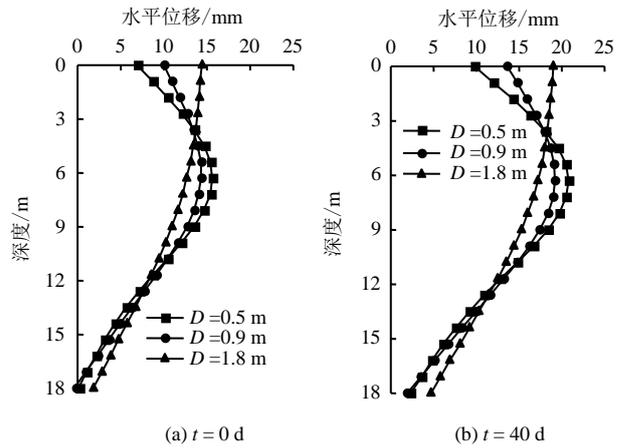


图11 不同桩径等效宽度情况下桩基水平位移对比
Fig.11 Lateral displacement of pile with different equivalent widths for pile diameters

6.2 基坑开挖深度 d 的影响

图 12(a)、12(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后基坑开挖深度不同时对邻近桩基水平位移的影响，基坑开挖深度分别取 5、10、15 m。可以看出，基坑开挖的深度越大，由土体卸荷产生的应力越大，邻近桩基的水平变形也就越大。同时通过对比也可以分析出基坑开挖对邻近桩基产生的水平位移是会受到时间的影响。

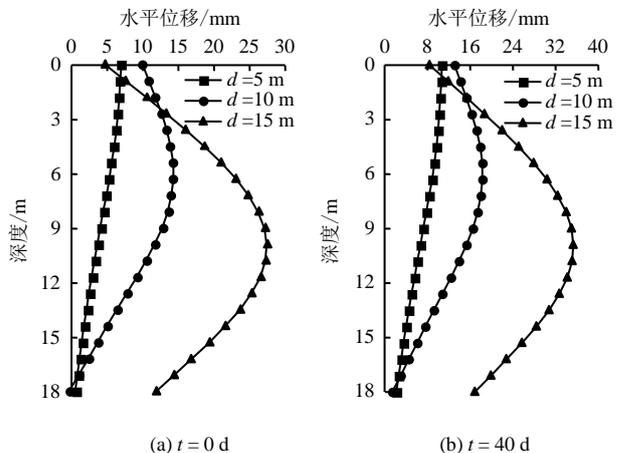


图12 不同开挖深度情况下桩基水平位移对比
Fig.12 Lateral displacement of pile with different excavation depths

6.3 桩与基坑间距 L_0 的影响

图 13(a)、13(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后基坑侧边距桩基中心线不同距离时基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响，桩与基坑间距分别取 5、10、15 m。可以看出，桩基距离基坑越近，邻近桩基的水平变形也就越大，同时也可得出邻近桩基水平位移是会受时间影响的结论。

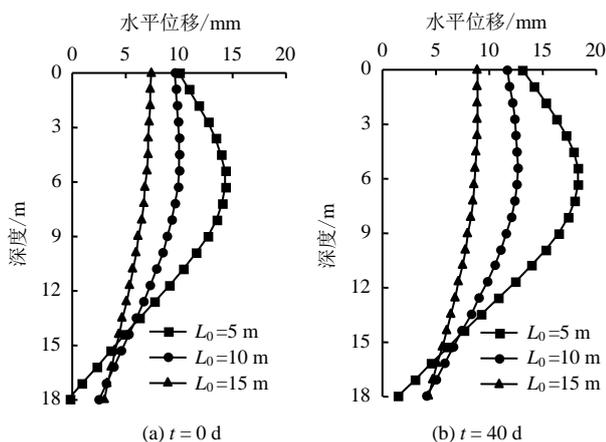


图 13 距基坑不同距离情况下桩基水平位移对比
Fig.13 Lateral displacement of pile with different distances to excavation

6.4 基坑开挖尺寸 L 的影响

图 14(a)、14(b)分别为 $t=0$ d 和 $t=40$ d 后桩基弹性模量不同时基坑开挖对邻近桩基水平位移的影响，基坑开挖平面尺寸中的长边 L 分别取 10、20、30 m。从图中可以看出，随着基坑开挖尺寸中的长边数值的增大，桩基的水平位移也整体增大。这是因为基坑开挖长边数值增大后，基坑的底部和四周的卸荷面积也增大，因此，引起的桩基整体的水平应力也有所增加。

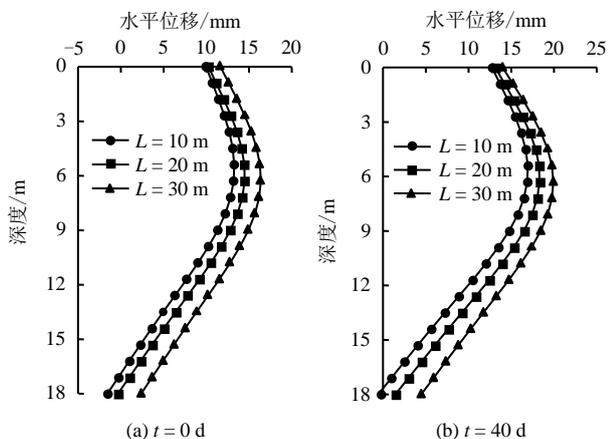


图 14 基坑开挖尺寸不同情况下桩基水平位移对比
Fig.14 Lateral displacement of pile with different sizes of excavation

7 结 论

(1) 本文通过简化时域解计算得出的考虑土体黏弹性工况下累计桩基水平位移占不考虑土体黏弹性工况下总位移的 20%~40% 之间，与数值模拟解基本吻合。这表明土体的黏弹性对桩基的水平变形影响较大，同时也证明本文的研究方法是具有实际工程意义的。

(2) 本文计算方法建立在 Boltzmann 黏弹性地基模型上，计算结果表明，H 体中的剪切模量 G_l 和体积模量 K 对桩基变形有较大影响；K 体中的剪切模量 G_k 对桩基变形基本无影响；黏性系数 η_k 对土体流变速率有较大影响， η_k 越大，桩基到达水平变形的最终累计值的时间越长。

(3) 计算结果表明，除了 Boltzmann 黏弹性模型中的相关系数，桩径、开挖深度、桩与基坑间距和基坑开挖尺寸对桩基的水平变形均有影响，其中开挖深度和桩与基坑间距对桩基的变形影响较大，桩径和基坑开挖尺寸对桩基的变形影响较小。

(4) 本文的研究重点是基坑开挖土体卸荷引起的桩基水平变形，笔者将在后续的研究中进一步考虑基坑施工过程中围护结构所带来的影响。

参 考 文 献

[1] CHEN L T, POULOS H G, LOGANATHAN N. Pile responses caused by tunneling[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1999, 125(3): 207—215.

[2] 张治国, 赵其华, 徐晨, 等. 基于影像源法的基坑开挖对邻近单桩影响简化分析[J]. *岩土力学*, 2016, 37(7): 2011—2020.

ZHANG Zhi-guo, ZHAO Qi-hua, XU Chen, et al. Simplified analysis of adjacent single-pile response subjected to foundation pit excavation based on virtual image technique[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 37(7): 2011—2020.

[3] 张治国, 张孟喜, 王卫东. 基坑开挖对邻近地铁隧道影响的两阶段分析方法[J]. *岩土力学*, 2011, 32(7): 2085—2092.

ZHANG Zhi-guo, ZHANG Meng-xi, WANG Wei-dong. Two-stage method for analyzing effects on adjacent metro tunnels due to foundation pit excavation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(7): 2085—2092.

[4] ZHANG J F, CHEN J J, WANG J H, et al. Prediction of

- tunnel displacement induced by adjacent excavation in soft soil[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2013, 36(3): 24–33.
- [5] 黄栩, 黄宏伟, 张冬梅. 开挖卸荷引起下卧已建盾构隧道的纵向变形研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(7): 1241–1249.
HUANG Xu, HUANG Hong-wei, ZHANG Dong-mei. Longitudinal deflection of existing shield tunnels due to deep excavation[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2012, 34(7): 1241–1249.
- [6] 张桓, 张子新. 盾构隧道开挖引起既有管线的竖向变形[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, 41(8): 1172–1178.
ZHANG Heng, ZHANG Zi-xin. Vertical deflection of existing pipeline due to shield tunneling[J]. **Journal of Tongji University (Natural Science)**, 2013, 41(8): 1172–1178.
- [7] POULOS H G. Analysis of piles in soil undergoing lateral movement[J]. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, 1973, 99(5): 391–406.
- [8] POULOS H G, CHEN L T. Pile response due to excavation-induced lateral soil movement[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1997, 123(2): 94–99.
- [9] ZHANG R J, ZHENG J J, YU S. Responses of piles subjected to excavation-induced vertical soil movement considering unloading effect and interfacial slip characteristics[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2013, 36(3): 66–79.
- [10] MROUEH H, SHAHROUR I. Three-dimensional finite element analysis of the interaction between tunneling and pile foundations[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2002, 26(3): 217–230.
- [11] MROUEH H, SHAHROUR I. A full 3-D finite element analysis of tunneling–adjacent structures interaction[J]. **Computers and Geotechnics**, 2003, 30(3): 245–253.
- [12] LEE C J, JACOBSZ S W. The influence of tunnelling on adjacent piled foundations[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2006, 21(3): 72–80.
- [13] 郑刚, 颜志雄, 雷华阳, 等. 基坑开挖对临近桩基影响的实测及有限元数值模拟分析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(5): 638–643.
ZHENG Gang, YAN Zhi-xiong, LEI Hua-yang, et al. Field observation and finite element numerical simulation analysis of effect on adjacent piles due to excavation[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(5): 638–643.
- [14] 王恒, 陈福全, 林海. 基坑开挖对邻近桥梁桩基的影响与加固分析[J]. 地下空间与工程学报, 2015, 11(5): 1257–1265.
WANG Heng, CHEN Fu-quan, LIN Hai. Behaviors and strengthening of bridge piles subjected to excavation-induced soil movement[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2015, 11(5): 1257–1265.
- [15] 丁勇春, 王建华. 深基坑施工对高架基础的变形影响及控制研究[J]. 土木工程学报, 2012, 45(7): 155–161.
DING Yong-chun, WANG Jian-hua. Influence of deep excavation on deformation of elevated bridge foundations and countermeasures[J]. **Chinese Civil Engineering Journal**, 2012, 45(7): 155–161.
- [16] 徐长节, 金飏, 孙凤明, 等. 桩基施工及基坑开挖对邻近建筑物联合影响研究[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(增刊 2): 809–813.
XU Chang-jie, JIN Biao, SUN Feng-ming, et al. Influence of pile construction and excavation on adjacent buildings[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(Supp. 2): 809–813.
- [17] 丘建金, 高伟, 周赞良, 等. 超深基坑及超大直径挖孔桩施工对临近地铁变形影响分析及对策[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(6): 1081–1088.
QIU Jian-jin, GAO Wei, ZHOU Zan-liang, et al. Influence analysis and countermeasures for extra-deep foundation pit and extra-large digging piles construction on adjacent metro[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2012, 31(6): 1081–1088.
- [18] SHI J, LIU G, HUANG P, et al. Interaction between a large-scale triangular excavation and adjacent structures in Shanghai soft clay[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2015, 50(8): 282–295.
- [19] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. **Journal of Applied Physics**, 1936, 7(5): 195–202.