DOI：10.16285/j.rsm.2016.2479

考虑附加应力作用的桩锚支护结构稳定性与位移关系研究

周 勇[1,2]，令永强[1,2]，杨校辉[1,2]

（1. 兰州理工大学 甘肃省土木工程防灾减灾重点实验室，甘肃 兰州 730050；
2. 兰州理工大学 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心，甘肃 兰州 730050）

摘 要：桩锚支护结构应用日益广泛，然而在基坑开挖过程中，基于锚杆预应力的基坑稳定性与位移的量化关系尚未解决。同时考虑锚杆预应力引起的附加应力对基坑稳定性和位移的影响，分别得到预应力与桩锚支护结构基坑整体稳定性安全系数、水平位移的计算公式，以及基坑整体稳定性安全系数与水平位移二者之间的关系表达式；通过典型基坑工程实例与现行通用基坑设计软件计算结果进行对比。结果表明：（1）将预应力以附加应力形式来计算基坑整体稳定性安全系数，安全系数随着预应力增加而增加，二者呈非线性关系；（2）以预应力在土体中产生的附加应力形式来计算桩锚支护结构水平位移，支护结构水平位移随着预应力增加而减小，二者呈非线性关系；（3）给出的支护结构稳定性安全系数和支护结构水平位移之间的关系表达式，更加符合理论与工程实际；（4）现行桩锚支护结构设计偏于保守，考虑预应力的基坑稳定性和位移计算方法，仍需根据大量工程实践进行验证与修正。（5）首次考虑附加应力作用的桩锚支护结构稳定性计算与水平位移关系研究，可为基坑开挖过程中的动态稳定性评价提供理论依据。

关 键 词：支护结构；预应力；附加应力；水平位移；稳定性

中图分类号：TU 476 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018)08－2913－09

Relationship between the displacement and stability of pile anchor retaining structure considering additional stress

ZHOU Yong[1,2], LING Yong-qiang[1,2], YANG Xiao-hui[1,2]

(1. Key Laboratory of Disaster Prevention and Mitigation in Civil Engineering of Gansu Province, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China; 2. Western Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

Abstract: The pile anchors are used widely as supporting structure. But in excavation, the stability of foundation with the prestressed anchors and displacement hasn't been solved yet. Additional stress caused by prestressed anchors influences on the stability and displacement of foundation, the expression between prestress and the stability of the pile anchor supporting structure, and the equation of horizontal displacement and structure stability are formulated. In a typical foundation pit, comparisons of the calculation results by general design software show that: 1) The prestress is considered as additional stress to calculate the overall stability safety factor of foundation pit, and the safety factor increases with increasing prestess; there exists a non-linear relationship between the safety factor and prestess; 2) Similarly, the displacement of the pile anchor supporting structure can be calculated by the forementioned way; and horizontal displacement of retaining structure decreases as prestress increases, which presents a non-linear relationship; 3) The expression of relationship between the stability safety coefficient of supporting structure and the horizontal displacement of retaining structure is given, which is more suitable for theory and engineering practice; 4) Compared with the calculation method for stability and displacement of the foundation pit considering prestress, the existing design of the pile anchor supporting structure is conservative and still needs to be validated and corrected according to a large number of engineering practices. 5) We first study the relationship of stability of pile anchor supporting structure and horizontal displacement considering additional stress, which can provide theoretical foundation for dynamic stability evaluation of foundation pit in the process of excavation.

收稿日期：2016-10-24
基金项目：国家自然科学基金（No.51568042）；教育部长江学者和创新团队发展计划（No. IRT_17R51）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51568042) and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (IRT_17R51).
第一作者简介：周勇，男，1978 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事深基坑开挖支护和边坡加固方面的教学与研究工作。E-mail: gsutzhouy@163.com

Keywords: retaining structure; prestress; additional stress; horizontal displacement; stability

1 引 言

桩锚支护结构在基坑开挖过程中的稳定性计算，多是将锚杆当作土钉，采用圆弧滑移面法来计算稳定性[1]。对于桩锚支护结构稳定性研究，前人做了很多的试验研究、数值模拟和理论推导，《建筑基坑支护技术规程》[1]中采用圆弧滑移面法来推导桩锚支护结构安全系数计算公式，但式中没有体现预应力的影响；刘国彬等[2]采用替代墙法计算基坑稳定性，但是此方法仅适用于锚固段在围墙底部以上的情况；徐中华等[3]提出框架预应力锚杆边坡坡脚处锚杆预应力会随时间增加，预应力的增加能提高边坡的稳定，但没有理论推导预应力是如何提高边坡稳定性的；王邓峮等[4]通过将预应力以附加应力的形式来考虑预应力对边坡稳定的影响，但是没有进一步推导附加应力对边坡位移的影响；胡贺松[5]通过极限平衡法和强度折减法来计算基坑稳定性，但没有考虑预应力对桩锚支护结构基坑稳定性影响；于鸿[6]、王利宾[7]等也都做了稳定性相关的研究，这些研究对预应力锚杆支护结构的加固机制从不同角度予以了解释。

对于桩锚支护结构基坑在开挖过程中水平位移计算，前人做了很多的试验研究、数值模拟和理论推导。袁维等[8]提出一种基于位移场分析的临界滑动面确定方法，通过理论推导可以找到滑动面的位置。韩爱民等[9]提出，在软土地区采用灌注桩围护的深基坑最大位移平均值为开挖深度的 0.44%，但是没有理论推导。周勇等[10]假定锚杆自由段为弹簧，提出框架预应力锚杆结构在施工阶段水平位移简化算法；朱彦鹏等[11]通过混合法计算桩锚支护结构桩身内力，求得土压力与桩身位移之间的非线性变化关系；许海勇等[12]提出桩锚支护结构水平位移简化算法；张玉成等[13]通过引入位高比来判定土钉支护结构的变形和稳定性之间的关系，但是都没有考虑预应力对水平位移的影响。

桩锚支护结构在基坑开挖过程中，基坑稳定性和水平位移是不断变化的，很少有文献给出在开挖过程中稳定性与位移之间关系，通过支护结构水平位移判断基坑动态稳定性具有重要的意义。本文将在考虑锚杆预应力对土体产生附加应力的基础上，通过 MATLAB 找到锚杆预应力与基坑稳定性和支护结构水平位移之间关系，计算出基坑开挖过程中稳定性和支护结构水平位移，给出水平位移与稳定性之间的关系，并结合现行通用基坑设计软件进行对比验证。

2 考虑附加应力桩锚支护结构稳定性计算

2.1 计算模型的建立

锚杆施加预应力，将会在基坑外侧土体中产生附加应力，同样也会在滑移面处引起附加应力。预应力锚杆总是将锚杆自由段穿过最危险滑移面，如图 1 所示，因此，可以将最危险滑移面后土体看作稳定区，将预应力作为集中力考虑，作用于滑动区。

作用在支护桩上的预应力可分解为水平方向和竖直方向的两个集中力，竖直方向的集中力主要通过支护桩传到桩底，但由于锚杆水平倾角一般取 10°，竖向分力远小于水平分力，水平分力对基坑整体稳定性的贡献远大于竖向分力对基坑整体稳定性的贡献，因此，本文暂且忽略此力的作用。

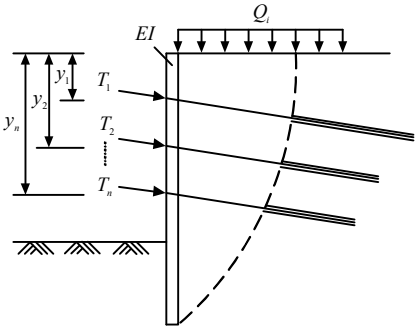


图 1 计算简图

Fig.1 Calculation diagram

2.2 附加应力对基坑稳定性影响

常用圆弧滑移面法来搜索基坑工程中潜在滑移面，以瑞典条分法[2]为例进行分析，在不考虑土条两侧相互作用力的条件下，将基坑滑裂体分为若干土条，基坑整体稳定性安全系数的值为潜在滑动圆弧上抗滑力矩与滑动力矩的比值，如图 2 所示。

设土条宽为 a，土体黏聚力为 c，内摩擦角为 φ，选取任一土条滑弧处单元体为研究对象，如图 2 所示。由材料力学可知单元 β 正应力 σ_β 及斜面上剪应力 τ_β 为

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\beta - \tau_x \sin 2\beta \quad (1)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\beta + \tau_x \cos 2\beta \quad (2)$$

如图 2 所示，第 i 土条滑弧与 x 轴成的夹角为 θ_i，β 以绕 x 轴逆时针方向转动为正，则 $\beta_i =$

$-(90-\theta_i)$，单元体斜面上正应力记为σ_i，剪应力记为τ_i，代入式（1）、（2）得

$$\sigma_i=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos 2\theta_i+\tau_x\sin 2\theta_i \tag{3}$$

$$\tau_i=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\sin 2\theta_i-\tau_x\cos 2\theta_i \tag{4}$$

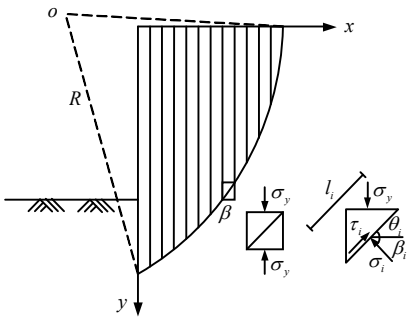


图 2　瑞典条分法示意图

Fig.2　Diagram of Sweden slice method

本文剪应力以使单元体逆时针旋转为正，压应力为正，则第 *i* 土条滑弧处，外荷载为Q_i，土条的自重为G_i，$\sigma_y=(G_i+Q_i)/a$，$\sigma_x=0$，$\tau_x=0$，$\cos\theta_i=a/l_i$，则该处的应力圆如图 3 所示。

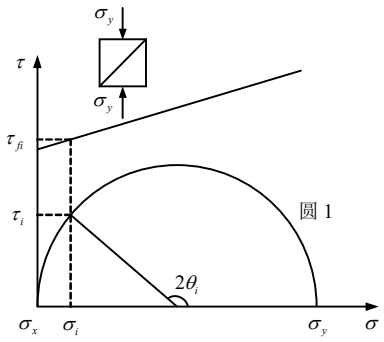


图 3　第 *i* 土条滑弧上应力圆

Fig.3　Stress circle of the arc at slice number *i*

结合式（3）、（4）及图 3 可知，滑弧上任一土条的正应力为

$$\sigma_i=\frac{(G_i+Q_i)}{b}\cos^2\theta_i \tag{5}$$

滑弧上任一土条的剪应力为

$$\tau_i=\frac{(G_i+Q_i)}{2b}\sin 2\theta_i \tag{6}$$

则滑移面上任一土条的抗剪强度为

$$\tau_{fi}=\sigma_i\tan\varphi+c \tag{7}$$

然而就基坑工程而言，单纯的附加剪应力的增加很少发生，锚杆施加预应力通常会在基坑周围土体中引起附加正应力以及附加剪应力。

根据王邓峮等[4]的研究成果，当外荷载引起附加正应力时，σ_x 由 0 增加到σ_x'，增量为$\Delta\sigma_x$，σ_y 暂不考虑。

$$\tau_i'=\tau_i-\Delta\tau_i \tag{8}$$

$$\tau_{fi}'=\tau_{fi}+\Delta\tau_{fi} \tag{9}$$

将式（8）、（9）代入式（5）～（7）中，整理得

$$\Delta\tau_i=\Delta\sigma_x\sin\theta_i\cos\theta_i \tag{10}$$

$$\Delta\tau_{fi}=\Delta\sigma_x\sin^2\theta_i\tan\varphi \tag{11}$$

同理，当外荷载引起附加剪应力增加，τ_x 由 0 增加到τ_x'，$\tau_x'=\Delta\tau_x$，整理得

$$\Delta\tau_i=\Delta\tau_x\sin 2\theta_i \tag{12}$$

$$\Delta\tau_{fi}=\Delta\sigma_i\tan\varphi \tag{13}$$

通过叠加法[4]得到附加正应力以及附加剪应力共同作用下的$\Delta\tau_i$、$\Delta\sigma_i$、$\Delta\tau_{fi}$，应力状态的变化如图 4 所示。

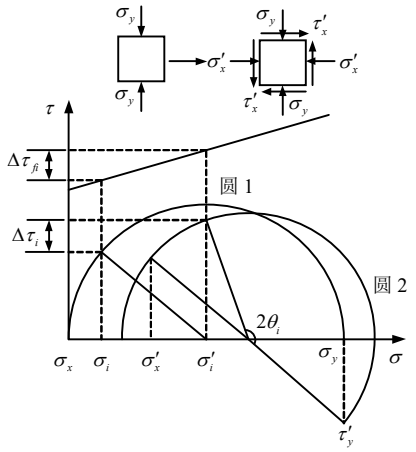


图 4　附加正应力及剪应力对应力圆的改变

Fig.4　Stress circle changed by additional normal and shear stress

$$\Delta\tau_i=\Delta\sigma_x\sin\theta_i\cos\theta_i+\Delta\tau_x\cos 2\theta_i \tag{14}$$

$$\Delta\sigma_i=\Delta\sigma_x\sin^2\theta_i+\Delta\tau_x\sin 2\theta_i \tag{15}$$

$$\Delta\tau_{fi}=\Delta\sigma_i\tan\varphi \tag{16}$$

则考虑附加应力安全系数为

$$K_{\mathrm{s},j}=\frac{MS_i'}{MT_i'}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(G_i+Q_i\right)\cos\theta_i\tan\varphi+cl_i\right]+\mu\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_{fi}l_iR}{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(G_i+Q_i\right)\sin\theta_i\right]-\mu\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i l_iR} \tag{17}$$

$$K_{\mathrm{s}}\leqslant\min\left\{K_{\mathrm{s},1},K_{\mathrm{s},2},\cdots,K_{\mathrm{s},j}\cdots\right\} \tag{18}$$

式中：$K_{\mathrm{s},j}$ 为第 j 滑动圆弧的抗滑力矩与滑动力矩的比值；K_{s} 为圆弧滑动整体稳定安全系数；μ 为附加应力折减系数，考虑到在施加预应力过程中预应力损失、预应力锚杆之间相互影响及其他施工因素影响，取值范围为 0.2～0.6 之间。

通过式（17）、（18）得到最终的整体稳定安全系数，与现行规范设计方法相比，本文方法考虑了实际工程中预应力在土体中产生的附加应力对安全系数的影响，更加贴近实际工程。

2.3 附加应力计算

将图 1 中的预应力 T_1、T_2、…、T_n 分解为垂直于支护桩和平行于支护桩两个方向的分力，预应力与水平面夹角为 α。考虑到锚杆实际布置在支护桩之间，可简化为弹性半无限体来求解附加应力[14]。如图 5 所示，依据弹性力学中计算公式，则预应力 T_n 的水平分力在滑移面上任一点的附加应力为

$$\Delta\sigma_x=\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\frac{x_i^3}{\left[x_i^2+\left(y_i-y_n\right)^2\right]^2} \tag{19}$$

$$\Delta\tau_x=\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\frac{x_i^2\left(y_i-y_n\right)}{\left[x_i^2+\left(y_i-y_n\right)^2\right]^2} \tag{20}$$

式中：$x_i=ia$，i 代表第 i 土条，a 为土条宽度；y_i 为第 i 土条高度，其中 x_i、y_i 在搜索任一个滑移面过程都会计算出，无需另外计算，由于 σ_y 对基坑稳定性起积极作用，因此，本文暂且忽略了此应力的作用。

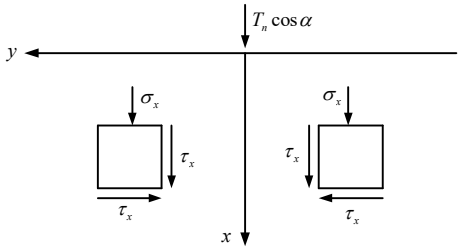


图 5 半无限体边界受法向集中力

Fig.5 Normal force on the boundary of semi-infinite body

3 考虑附加应力桩锚支护结构位移计算

3.1 计算模型

如图 6 所示，由于土体受到锚杆预应力产生的附加应力的影响，基坑侧桩体所受的土压力并不是简单的主动土压力和被动土压力，在计算主动土压力时需要考虑附加应力的影响，主动土压力按照徐日庆等[15]推导的黏性土的非极限主动土压力计算方法计算，计算被动土压力时，按照廖斌[16]黏性土的土压力计算理论研究来计算被动土压力。

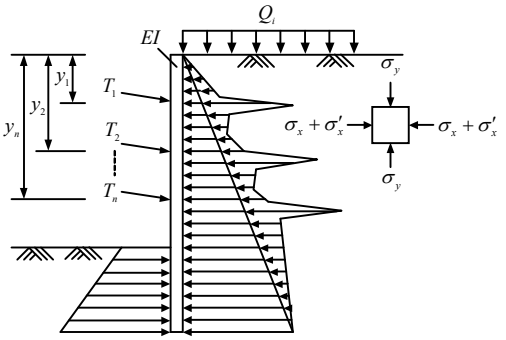


图 6 位移计算简图

Fig.6 Calculation diagram of displacement

3.2 考虑附加应力主、被动土压力计算

（1）考虑附加应力主动土压力计算

如图 6 所示，考虑附加应力 $\Delta\sigma_x$ 时主动土压力计算：

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{a}}=&\left(\gamma_1 y+q\right)\frac{\tan\theta}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}-c_{\mathrm{m}}\frac{1+\tan\theta\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}+\\&\frac{2T_1\cos\alpha}{\pi}\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y-y_1\right)^2\right]^2}+\\&\frac{2T_2\cos\alpha}{\pi}\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y-y_2\right)^2\right]^2}+\cdots+\\&\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y-y_n\right)^2\right]^2}+\cdots\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi_{\mathrm{m}}=&\left[\left(1-R_{\mathrm{f}}+\eta R_{\mathrm{f}}\right)\left(1-K_0\right)\left(1+\sin\varphi\right)+\right.\\&\eta\sin\varphi\left(1+K_0\right)-\eta\left(1-K_0\right)\left.\right]\Big/\\&\left[\left(1-R_{\mathrm{f}}+\eta R_{\mathrm{f}}\right)\left(1+\sin\varphi\right)\left(1+K_0\right)-\right.\\&\left.\eta\sin\varphi\left(1+K_0\right)+\eta\left(1-K_0\right)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

$$R_{\mathrm{f}}=\frac{\left(\sigma_0'-\sigma_{\mathrm{m}}'\right)_{\mathrm{f}}}{\left(\sigma_0'-\sigma_{\mathrm{m}}'\right)_{\mathrm{u}}} \tag{23}$$

$$c_{\mathrm{m}}=\frac{\tan\varphi_{\mathrm{m}}}{\tan\varphi}c_{\mathrm{w}} \tag{24}$$

$$\eta=\frac{S_{(z)}}{S_{\mathrm{a}}}=\frac{\tan\delta_{\mathrm{m}}-\tan\delta_0}{\tan\delta-\tan\delta_0} \tag{25}$$

式中：θ 为墙底潜在滑动面和竖直方向夹角；R_{f} 为破坏比，取值介于 0.75～1.00；c_{m} 为黏聚力发挥值；K_0 为初始土压力；φ 为内摩擦角极限值；$S_{(z)}$ 为墙体水平位移值；S_{a} 为达到主动状态所需位移值；γ_1、c_1 为分别为主动区土体重度和黏聚力的加权平均值；y_1、y_2、y_n 为预应力锚杆 T_1、T_2、T_n 在 y 轴坐标。

（2）被动土压力计算：

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\lambda\gamma\left(y-H\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)+2c'\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right) \tag{26}$$

$$\tan\varphi'=\left(\frac{h}{h-D}\right)^m\tan\varphi \tag{27}$$

$$c'=\left(\frac{h}{h-D}\right)^{m-1}c \tag{28}$$

$$\lambda=\frac{1-\alpha\beta}{1-\beta} \tag{29}$$

$$\beta=\frac{D}{h} \tag{30}$$

式中：α 为角点应力系数，大小与基坑的平面尺寸 $L\times b$ 以及该点所处深度 h 有关，可在土力学课本中查询；m 为常数，平均值为 0.64。

3.3　水平位移计算

3.3.1 第 1 根锚杆位置支护桩水平位移计算

以图 6 中所示的对锚杆处位移进行推导，竖直方向为 y 方向，预应力在 $y=y_1$ 处为 T_1，$y=y_2$ 处为 T_2，$y=y_n$ 处为 T_n；考虑在 $y=y_1$ 作用单位水平力，对支护桩产生弯矩为

$$M_1=y-y_1 \tag{31}$$

主动土压力作用下的剪力分布为

$$Q_{\mathrm{a1}}=\int_0^y\int_0^h\sigma_{\mathrm{a}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^y\int_0^h\left\{\left(\gamma_1y+q\right)\frac{\tan\theta}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}-c_{\mathrm{m}}\frac{1+\tan\theta\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}+\frac{2T_1\cos\alpha}{\pi}\frac{1}{x}+\frac{2T_2\cos\alpha}{\pi}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_1-y_2\right)^2\right]^2}+\cdots+\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_1-y_n\right)^2\right]^2}+\cdots\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{32}$$

对支护桩产生的弯矩为

$$M_{\mathrm{a1}}=\int_0^yQ_{\mathrm{a1}}\mathrm{d}y \tag{33}$$

（1）主动土压力作用下支护桩在 $y=y_1$ 处的水平位移：

$$S_{\mathrm{a1}}=\frac{1}{EI}\int_0^HM_{\mathrm{a1}}M_1\mathrm{d}y=\frac{1}{EI}\int_0^H\int_0^yQ_{\mathrm{a1}}M_1\mathrm{d}y\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^H\int_0^y\int_0^y\int_0^h\left\{\left(\gamma_1y+q\right)\frac{\tan\theta}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}-\right.$$

$$c_{\mathrm{m}}\frac{1+\tan\theta\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}+\frac{2T_1\cos\alpha}{\pi}\frac{1}{x}+\frac{2T_2\cos\alpha}{\pi}$$

$$\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_1-y_2\right)^2\right]^2}+\cdots+\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\cdot$$

$$\left.\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_1-y_n\right)^2\right]^2}+\cdots\right\}(y-y_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y\mathrm{d}y \tag{34}$$

（2）同理，被动土压力作用下水平位移为

$$Q_{\mathrm{p}}=\int_h^y\sigma_{\mathrm{p}}\mathrm{d}y=\int_h^y\left[\lambda\gamma\left(y-H\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)+2c'\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)\right]\mathrm{d}y \tag{35}$$

$$M_{\mathrm{p}}=\int_h^yQ_{\mathrm{p}}\mathrm{d}y=\int_h^y\int_h^y\left[\lambda\gamma\left(y-H\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)+2c'\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}y \tag{36}$$

$$S_{\mathrm{p1}}=\frac{1}{EI}\int_h^HM_{\mathrm{p}}M_1\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{EI}\int_h^H\int_h^y\int_h^y\left[\lambda\gamma\left(y-H\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)+2c'\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)\right]\left(y-y_1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}y\mathrm{d}y \tag{37}$$

（3）用弹性叠加法得到 $y=y_1$ 最终水平位移

$$S_{\mathrm{y1}}=S_{\mathrm{a1}}-S_{\mathrm{p1}} \tag{38}$$

3.3.2 第 n 根锚杆位置支护桩水平位移计算

（1）同理得，主动土压力作用下支护桩在 $y=y_n$ 处的水平位移：

$$S_{an}=\frac{1}{EI}\int_0^HM_{an}M_n\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^H\int_0^y\int_0^y\int_0^h\left\{\left(\gamma_1y+q\right)\frac{\tan\theta}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}-\right.$$

$$c_{\mathrm{m}}\frac{1+\tan\theta\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}{\tan\left(\theta+\varphi_{\mathrm{m}}\right)}+\frac{2T_1\cos\alpha}{\pi}\cdot\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_n-y_2\right)^2\right]^2}+\frac{2T_2\cos\alpha}{\pi}\cdot\frac{x^3}{\left[x^2+\left(y_n-y_2\right)^2\right]^2}+\cdots+\frac{2T_n\cos\alpha}{\pi}\frac{1}{x}+\cdots\Bigg\}\cdot\left(y-y_n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y\mathrm{d}y \tag{39}$$

（2）被动土压力作用下水平位移：

$$S_{\mathrm{p}n}=\frac{1}{EI}\int_h^H M_{\mathrm{p}}M_n\mathrm{d}y \tag{40}$$

（3）$y=y_n$ 处最终水平位移：

$$S_{\mathrm{y}n}=S_{an}-S_{\mathrm{p}n} \tag{41}$$

通过式（38）、（41）采用弹性位移叠加法，将上述两种位移曲线相叠加，得到最终的变形位移曲线。本文方法与现行通用基坑设计软件相比，考虑了预应力对支护结构水平位移的影响，以预应力在土体中产生的附加应力形式来计算桩锚支护结构水平位移，更符合实际。

4 算例分析

基于式（17）、（18）、（38）、（41），本文采用 MATLAB 将上述算法编制成程序，通过工程 1 和工程 2，得到预应力与安全系数和水平位移关系曲线，并与理正软件、启明星软件计算结果进行对比。

4.1 工程实例

4.1.1 工程 1

兰州市某基坑，长 75 m，宽 57 m，基坑深度为 16.5 m，基坑安全等级为一级，基坑整体稳定性系数取 1.35，荷载分项系数取 1.25。

采用桩锚支护结构进行支护，支护桩长为 21 m，桩顶标高为 – 2.0 m，嵌固深度为 6.5 m，桩直径为 1 000 mm，桩间距为 2.0 m，采用 C30 混凝土浇筑，冠梁尺寸 $b\times h=1\ 200\mathrm{mm}\times800\ \mathrm{mm}$。共设 4 道锚杆，位置分别在基坑深度方向 3.0、6.0、9.0 m 和 12.0 m 处，锚杆水平间距为 2.0 m，水平倾角为 10°，支护方案如图 7 所示。

4.1.2 工程 2

天水市某基坑，长为 110 m，宽为 60 m，基坑深度为 9.0 m，基坑安全等级为二级，基坑整体稳定性系数取 1.3，荷载分项系数取 1.25。

表 1 基坑 1 土体参数

Table 1 Soil parameters of the first foundation pit

土层序号	岩土名称	土层厚度 / m	重度 γ / (kN/m³)	黏聚力 c / kPa	内摩擦角 φ / (°)	界面黏结强度 τ / kPa
①	杂填土	3.2	16	8	19	35
②	黄土	3.0	18	16	20	60
③	细砂	1.0	18	5	30	40
④	强风化层	7.0	19	25	22	100
⑤	中风化层	12.0	22	28	30	120
⑥	微风化层		24	35	32	140

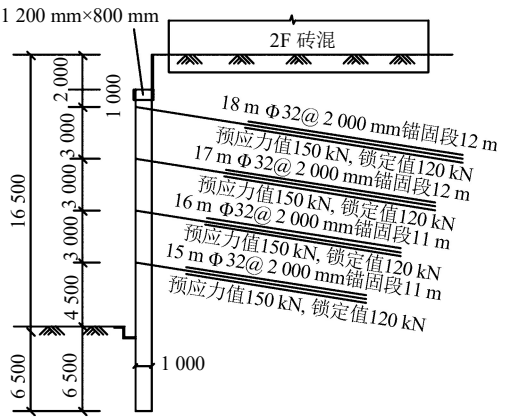


图 7 工程 1 支护方案（单位: mm）

Fig.7 Supporting scheme of the first engineering (unit: mm)

表 2 基坑 2 土体参数

Table 2 Soil parameters of the second foundation pit

土层序号	岩土名称	土层厚度 / m	重度 γ / (kN/m³)	黏聚力 c / kPa	内摩擦角 φ / (°)	界面黏结强度 τ / kPa
①	杂填土	0.8	14.5	5	20	30
②	粉质黏土	1.8	17.0	15	24	40
③	角砾	5.1	18.0	0	30	80
④	卵石	8.3	23.0	0	40	180

采用排桩预应力锚杆支护结构进行支护，支护桩长为 13.0 m，嵌固深度为 5.0 m，桩直径为 800 mm，桩间距为 2.0 m，采用 C30 混凝土浇筑。共设两道锚杆，分别在 2.5 m 和 6.0 m 处，锚杆水平间距为 2.0 m，水平倾角为 10°，支护方案如图 8 所示。

4.2 计算结果与分析

（1）安全系数与预应力关系

考虑预应力作用下产生的附加应力，将工程 1 和工程 2 参数代入通过式（17）和式（18）编写的程序，得到安全系数与预应力关系曲线，如图 9 所示。

如图 9 所示：①由于理正深基坑中把预应力锚杆当土钉考虑，故图中理正软件和启明星软件计算

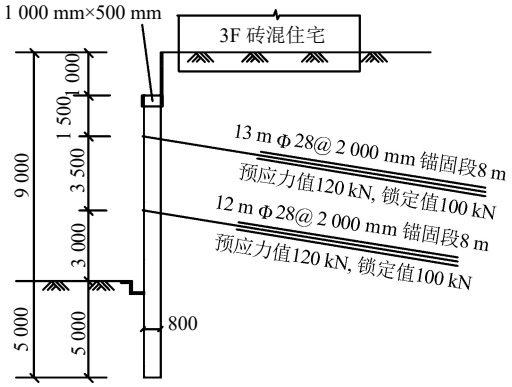


图 8　工程 2 支护方案（单位: mm）

Fig.8　Supporting scheme of the second engineering (unit: mm)

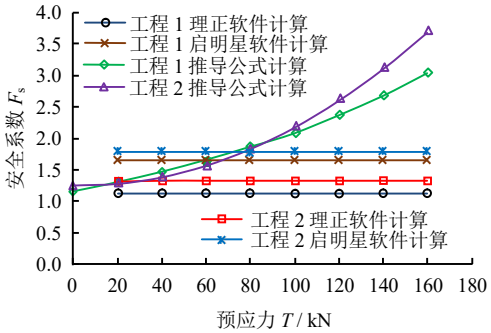


图 9　安全系数与预应力关系曲线图

Fig.9　The relationship graph between safety coefficient and prestress

得到的安全系数随着预应力增加保持不变，而本文考虑预应力引起的附加应力计算的安全系数随着预应力的增加而增加显得更加合理，符合理论与工程实际；②安全系数与预应力呈非线性关系，随着预应力增加而增加，但不能无限提高，受到锚杆极限承载力限制。

（2）位移与预应力关系

将工程 1 和工程 2 参数代入通过位移计算公式编写的程序中，得到预应力与位移关系曲线，如图 10 所示。

考虑锚杆预应力在土体中产生附加应力，采用弹性位移叠加法来计算桩锚支护结构水平位移，如图 10 所示。取 T = 120 kN，工程 1 中考虑锚杆预应力计算得到的水平位移为 14.755 mm，不考虑锚杆预应力的水平位移为 20.24 mm，减小到原来的 72.9%，工程 2 中考虑锚杆预应力计算得到的水平位移为 6.38 mm，不考虑锚杆预应力的水平位移为 8.78 mm，减小到原来的 72.6%，以上便是对结果的影响程度。因此，基坑工程实践中应该考虑锚杆预应力在土体中产生的附加应力对支护结构水平位移的影响。

如图 10 所示：①通过理正软件和启明星软件计算得到的支护结构位移随预应力的增加呈线性关系递减，而通过本文推导公式计算的支护结构水平位移随预应力增加呈非线性关系，随着预应力的增加，对水平位移的影响逐渐减小，与理正软件和启明星软件相比，更合理，更加符合实际；②预应力与支护结构水平位移二者之间呈非线性关系，通过提高预应力来限制支护结构水平位移存在最优值，而不是越大越好；③考虑预应力作用的设计方法可克服传统规范设计保守的问题，但必须严格控制施工，这在周勇[17]、杨校辉[18]等多个桩锚支护结构基坑事故分析处理时已经证实，即目前大多数基坑事故都是由施工、管理问题造成的。

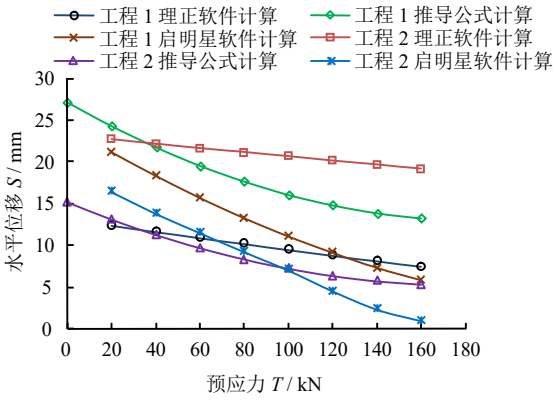


图 10　水平位移与预应力关系曲线图

Fig.10　The relationship graph between horizontal displacement and prestress

4.3　算法评价

通过理正软件和根据推导公式编写的 MATLAB 程序计算，求出不同工况下工程 1 和工程 2 的安全系数与支护结构水平位移，图 11、12 为工程 1 和工程 2 在各个工况下安全系数所对应的支护结构水平位移曲线。

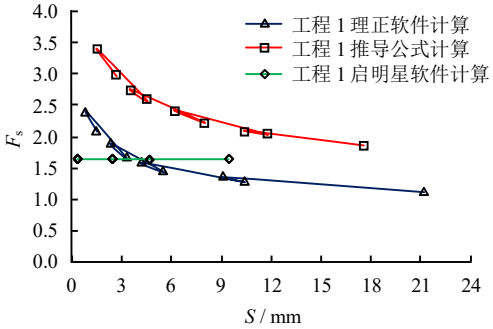


图 11　工程 1 安全系数与水平位移关系曲线图

Fig.11　The relationship graph between safety coefficient and horizontal displacement of the first engineering

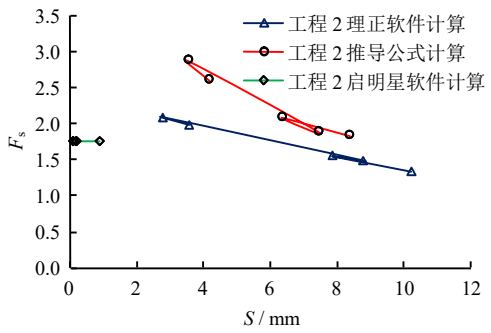


图 12 工程 2 安全系数与水平位移关系曲线图

Fig.12 The relationship graph between safety coefficient and horizontal displacement of the second engineering

如图 11、12 所示：①随着基坑的开挖，理正软件和推导公式计算出的支护结构安全系数和水平位移呈非线性关系，而启明星软件计算出的结果呈线性关系，这是由于启明星计算软件只能计算支护结构整体稳定安全系数导致的；②与理正软件和启明星软件计算结果相对比，由于本文考虑了预应力引起的附加应力对稳定性系数和水平位移的影响，得到的稳定性系数和水平位移更加精确合理，符合实际；③随着支护结构水平位移增大，支护结构的安全系数呈非线性减小，理正软件和启明星软件计算结果较保守。

综合工程 1 和工程 2，将图 11 和图 12 中推导公式计算的 F_s 和 S 的值代入 Origin8.5 进行非线性拟合，工程 1 非线性拟合公式为：$F_s = A_0 e^{-\frac{S}{B_0}} + C_0$，拟合系数为 0.990 75，工程 2 非线性拟合公式为：$F_s = A_1 e^{-\frac{S}{B_1}} + C_1$，拟合系数为 0.997 20，综合二者拟合表达式，得到基坑开挖时，支护结构安全系数和水平位移之间的关系为

$$F_s = A e^{-\frac{S}{B}} + C \qquad (42)$$

式中：A、B、C 为常数项，需要根据土层参数、基坑开挖深度和锚杆施加的预应力值确定，不同的土层参数、基坑开挖深度和锚杆施的加预应力值对应不同的值。

5 结 论

（1）本文考虑预应力在土体中产生的附加应力对基坑稳定性影响的算法，体现了桩锚支护结构中锚杆预应力的作用；算例分析表明，安全系数随着预应力增加而增加，二者呈非线性关系。

（2）本文以预应力在土体中产生的附加应力形式来计算桩锚支护结构水平位移；分析表明，支护结构水平位移随着预应力增加而减小，二者呈非线性关系，通过预应力控制支护结构水平位移存在最优值。

（3）首次给出了支护结构稳定性安全系数和支护结构水平位移之间的关系表达式，可用于在基坑开挖过程中依据支护结构水平位移大小对基坑动态稳定性进行评价，有效减少基坑工程事故。

（4）与考虑预应力的基坑稳定性和位移计算方法相比，现行桩锚支护结构设计偏于保守。文中式（42）中常数项与基坑开挖深度、土层参数和锚杆施加的预应力值有关，但尚需根据大量工程实践进行验证与修正。

参 考 文 献

[1] 中国建筑科学研究院. JGJ120－2012 建筑基坑支护技术规程[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.
China Academy of Building research. JGJ 120－2012 Technical specification for retaining and protection of building foundation excavations[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2012.

[2] 刘国彬, 王卫东. 基坑工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.
LIU Guo-bin, WANG Wei-dong. Excavation engineering handbook[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2009.

[3] 徐中华, 王建华, 王卫东. 软土地区采用灌注桩围护的深基坑变形形状研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(5): 1362－1366.
XU Zhong-hua, WANG Jian-hua, WANG Wei-dong. Deformation behavior of deep excavations retained by bored pile wall in soft soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(5): 1362－1366.

[4] 王邓峮, 朱彦鹏. 附加应力法在预应力锚杆支护结构稳定性分析中的应用[J]. 工程力学, 2014, 31(4): 196－202.
WANG Deng-qun, ZHU Yan-peng. Additional stress method used for stability analysis of prestressed anchor support structure[J]. **Engineering Mechanics**, 2014, 31(4): 196－202.

[5] 胡贺松. 深基坑桩锚支护结构稳定性及变形特性研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009.
HU He-song. Study on the mechanical characteristic and stability of deep foundation with pile-anchor structure[D]. Changsha: Central South University, 2009.

[6] 于鸿. 桩锚支护体系基坑稳定性分析方法及应用研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2013.

YU Hong. Study on analysis methods and application about stability of deep excavation with pile-anchor structure[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2013.

[7] 王利宾, 孔德志. 清明上河园地下停车场基坑稳定性分析[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(增刊 2): 433－436.
WANG Li-bin, KONG De-zhi. Stability analysis of foundation pit of underground parking lot of Qingming-shangheyuan[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(Supp. 2): 433－436.

[8] 袁维, 胡叶江, 李小春, 等. 一种基于位移场分析的临界滑动面确定方法研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(6): 1791－1798.
YUAN Wei, HU Ye-jiang, LI Xiao-chun, et al. An approach to determining critical slip surface based on displacement field analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(6): 1791－1798.

[9] 韩爱民, 李建国, 肖军华. 预应力锚杆框架梁的支护力学行为研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(9): 2894－2900.
HAN Ai-min, LI Jian-guo, XIAO Jun-hua. Mechanical behaviors of frame beam supporting structure with prestressed anchors[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(9): 2894－2900.

[10] 周勇, 朱彦鹏. 框架预应力锚杆柔性支护结构坡面水平位移的理论分析与模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(增刊 2): 3820－3829.
ZHOU Yong, ZHU Yan-peng. Theoretical analysis and model test study of slope horizontal displacement of grillage flexible supporting structure with prestressed anchors[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(Supp.2): 3820－3829.

[11] 朱彦鹏, 李元勋. 混合法在深基坑排桩锚杆支护计算中的应用研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(5): 1416－1420.
ZHU Yan-peng, LI Yuan-xun. Application of mixing method to calculation of row pile anchor support in deep excavation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(5): 1416－1420.

[12] 许海勇, 陈龙珠, 刘全林. 桩锚支护结构水平位移的简化算法[J]. 岩土力学, 2013, 34(8): 2323－2328.
XU Hai-yong, CHEN Long-zhu, LIU Quan-lin. A simplified algorithm of lateral displacements of pile-anchor retaining structures[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(8): 2323－2328.

[13] 张玉成, 杨光华, 吴舒界, 等. 土钉支护结构变形与稳定性关系探讨[J]. 岩土力学, 2014, 35(1): 238－247.
ZHANG Yu-cheng, YANG Guang-hua, WU Shu-jie, et al. Discussion on relationship between deformation and stability of soil nailing structure[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(1): 238－247.

[14] POULOS H G, DAVIS E H. 岩土力学弹性解[M]. 孙幼兰, 译. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1990.
POULOS H G, DAVIS E H. Elastic solution for soil and rock mechanics[M]. Translated by SUN You-lan. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 1990.

[15] 徐日庆, 廖斌, 吴渐, 等. 黏性土的非极限主动土压力计算方法研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 148－154.
XU Ri-qing, LIAO Bin, WU Jian, et al. Computational method for active earth pressure of cohesive soil under nonlimit state[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(1): 148－154.

[16] 廖斌. 黏性土的土压力计算理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.
LIAO Bin. Research on earth pressure theories of cohesive soil[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013.

[17] 周勇, 郭楠, 杨校辉, 等. 某桩锚支护深基坑超挖变形分析与加固处理[J]. 地下空间与工程学, 2015, 11(增刊 1): 211－216.
ZHOU Yong, GUO Nan, YANG Xiao-hui, et al. Deformation analyses and reinforcement treatment of an overbreak deep foundation pit supported with pile-anchor retaining structure[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2015, 11(Supp.1): 211－216.

[18] 杨校辉, 朱彦鹏, 郭楠, 等. 西宁地区几个基坑工程问题分析与处理[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(增刊 1): 208－213.
YANG Xiao-hui, ZHU Yan-peng, GUO Nan, et al. Analysis and treatment for several engineering problems of foundation pits in Xining area[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2014, 36(Supp.1): 208－213.