DOI：10.16285/j.rsm.2018.0223

衬砌隧道中移动轴向激励作用下两相多孔介质动力响应

包汉营，陈文化

（北京交通大学 土木建筑工程学院，北京 100044）

摘 要：为了研究衬砌隧道中地铁振动在饱和地层中的传播情况，采用移动轴向激励模拟技术，建立了隧道−衬砌−两相介质的动力分析模型；利用波函数展开法、傅里叶变换法等，推导了频域内衬砌隧道移动轴向激励作用下两相多孔介质动力响应的解析解，并给出了两相多孔介质临界速度的经验公式；通过离散快速傅里叶逆变换得到了时−空域内两相介质的动力响应。结果表明：无衬砌隧道中移动的轴向常激励作用下，两相介质临界速度只与介质的剪切模量和密度有关，且数值接近其剪切波速的 1.1 倍；对于衬砌隧道，介质的临界速度随着衬砌剪切模量的增大而增大，随着衬砌密度的增大而减小，衬砌对振动向介质中的传播有一定的削弱作用，衬砌剪切模量与介质剪切模量相差越大，削弱越明显；动力响应频率越接近激振频率，其幅值越大，所对应的临界速度越小。

关 键 词：移动轴向激励；两相多孔介质；地铁振动；临界速度；波函数展开法

中图分类号：U 25 **文献识别码：**A **文章编号：**1000－7598 (2018) 10－3735－09

Dynamic response of a saturated poroelastic medium due to a moving axial excitation in a lining tunnel

BAO Han-ying, CHEN Wen-hua

（Civil Engineering and Architecture Institute, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China）

Abstract: To investigate the propagation of subway vibration in the saturated poroelastic medium, a dynamic analysis model of the tunnel, lining and the saturated medium was established by using the moving axial excitation technology. The analytical solutions of dynamic responses in the frequency domain were derived by the wave function expansion method and the Fourier transform method. Moreover, an empirical formula for the critical velocity of the saturated poroelastic medium was given. The time-space domain solutions of dynamic responses were obtained by the discrete inverse fast Fourier transform. The results show that, for the tunnel without lining, the critical velocity of the saturated poroelastic medium is only related to the shear modulus and density of the medium, and its value is close to 1.1 times shear wave velocity of the medium. For the lining tunnel, the critical velocity of the medium increases with the increase of the shear modulus of the lining but decreases with the increase of the lining density. The lining has a certain weakening effect on the propagation of vibration. The weakening effect is more obvious when the difference of shear modulus between the lining and the medium is large. When the dynamic response frequency is close to the excitation frequency, the amplitude of the dynamic response becomes high but the corresponding critical velocity becomes low.

Keywords: moving axial excitation; saturated poroelastic medium; subway vibration; critical velocity; wave function expansion method

1 引 言

城市地下轨道交通的快速发展对缓解路面交通拥挤状况、加快地区和城市发展等起到了至关重要的作用，但其产生的环境振动等问题也亟需解决。针对这一热点问题，国内外的研究主要包括以下 3 个方面：①列车动荷载振源的研究[1]，又分为列车系统模型研究与轨道系统模型研究；②列车振动在

收稿日期：2018-04-12
基金项目：国家自然科学基金项目(No. 51178035)。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51178035).
第一作者简介：包汉营，男，1988 年生，博士研究生，主要从事岩土动力学的研究工作。E-mail: baohanying.happy@163.com
通讯作者：陈文化，男，1967 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事岩土动力学的研究工作。E-mail: whchen@bjtu.edu.cn

地基中的传播及其对隧道结构、地面建筑物以及周围环境影响的研究；③减振与隔振措施的研究[2]。

针对列车振动在地基中的传播及其影响的研究又可分为多个方面，根据研究对象的类型不同主要包括以下内容：

（1）移动荷载作用下单相均匀介质及地面结构的动力响应研究。该方向的研究主体为单相均匀介质和相应的地上建筑结构，荷载类型主要为单个移动荷载或移动线荷载，研究方法主要为理论解析法[3−5]、数值法[6−7]和耦合法[8−9]。

（2）内部移动荷载作用下两相多孔均匀介质的动力响应研究。对于富水地区，地基土往往处于饱和状态，因此，将地基土视为饱和土体更加合理，通过 Biot 饱和多孔介质模型进行模拟，激振荷载的形式分为移动环形荷载[10−11]和移动点（线）荷载[12−14]。

（3）分层介质在内部移动激振荷载作用下的动力响应研究。考虑到天然土体在自然的沉积作用下一般为分层介质，该方向的研究将地基土视为单相分层介质[15−16]或两相多孔分层介质[17−18]，研究方法主要为数值方法和半解析−半数值的方法。Sheng[15]、包汉营[16]等分别采用离散波数虚拟力法、薄层法等研究了内部移动荷载作用下单相层状半空间的动力响应；胡安峰[17]、巴振宁[18]等分别利用傅里叶变换法、TRM 法、格林函数法等研究了成层饱和地基在埋置移动荷载作用下的动力响应问题以及移动简谐载荷作用下层状地基−轨道耦合系统的动力响应问题，并讨论了埋置荷载深度、荷载速度、荷载频率及软硬夹层等因素对动力响应的影响。

为了研究衬砌隧道中地铁轴向激励作用下两相多孔介质的动力响应，本文采用移动轴向激励模拟技术模拟地铁轴向荷载，将地基土视为两相多孔介质，考虑了隧道衬砌对振动传播的影响，利用波函数展开法、傅里叶变换法、镜像原理等，推导了频域内隧道中移动轴向激励作用下两相多孔介质动力响应的解析解，并给出了无衬砌隧道介质临界速度的经验公式;通过离散快速傅里叶逆变换得到了时−空域内两相多孔介质的动力响应，并研究了激振力移动速度、衬砌剪切模量、孔隙率等对介质动力响应的影响以及激振力振动频率、衬砌剪切模量和密度对介质临界速度的影响。

2 移动轴向激励作用下两相多孔介质中衬砌隧道动力响应求解

2.1 衬砌隧道中移动轴向激励作用下两相多孔介质动力分析模型

图 1 为隧道内部移动的轴向激励作用下，圆形横断面衬砌隧道及两相多孔介质的动力分析模型。图中，H 为隧道形心距地基表面距离，r_0 为衬砌内径，R_0 为衬砌外径。假定隧道轴向为直线，内部激振力 P_0 的加载方向沿隧道轴向，且以速度 v 沿隧道轴向移动（本文只考虑匀速移动情况，对于变速移动问题将在后续研究中详细讨论）。

$$P_0 = F\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)\delta(z_1 - vt)/2 \tag{1}$$

式中：F 为激振力幅值；$\delta(*)$ 为狄拉克 δ 函数；z_1 为轴向坐标；t 为时间；v 为移动速度；ω_0 为振动角频率；$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。

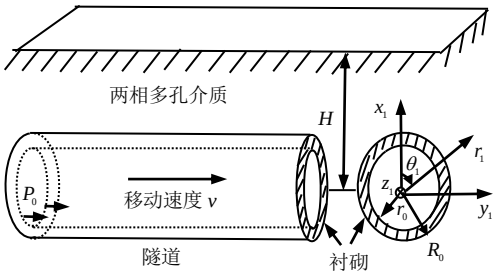


图 1 衬砌隧道及两相多孔介质的动力分析模型

Fig.1 Dynamic analysis model of lining tunnel and saturated poroelastic medium

2.2 振动控制方程及求解

由 Biot 饱和土理论可得，隧道外围两相多孔介质及孔隙水的本构方程和运动方程为[19]

$$\boldsymbol{\sigma}_{sij} = 2\mu_s\boldsymbol{\varepsilon}_{sij} + \lambda_s\boldsymbol{\delta}_{ij}e_s - \alpha\boldsymbol{\delta}_{ij}p \tag{2}$$

$$p = -\alpha M e_s + M\vartheta \tag{3}$$

$$\mu_s u_{si,jj} + (\lambda_s + \alpha^2 M + \mu_s)u_{sj,ji} + \alpha M w_{j,ji} = \rho_b\ddot{u}_{si} + \rho_f\ddot{w}_i \tag{4}$$

$$\alpha M u_{sj,ji} + M w_{j,ji} = \rho_f\ddot{u}_{si} + m\ddot{w}_i + \frac{\eta}{k}\dot{w}_i \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{\sigma}_{sij}$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{sij}$ (i，j=1，2，3)为两相多孔介质应力张量和应变张量；p 为孔隙水压力；$\boldsymbol{\delta}_{ij}$ 为克罗内克符号；e_s、ϑ 分别为介质骨架体积应变和单位体积内孔隙流体改变量，$e_s = u_{si,i}$，$\vartheta = -w_{i,i}$；u_{si}、w_i 分别为介质骨架位移和孔隙水的渗透位移分量；λ_s、μ_s 为介质的拉梅常数；α、M 为表征介质颗粒和流体压缩性的 Biot 系数；ρ_b、ρ_f 分别为两相多孔介质密度和孔隙水密度，$\rho_b = (1-n_e)\rho_s + n_e\rho_f$，$\rho_s$ 为介质骨架密度，n_e 为介质的孔隙率；$m = a_\infty\rho_f/n_e$，a_∞ 为孔隙流体弯曲系数；η 为孔隙流体黏性系数；k 为孔隙流体动力渗透系数。

将隧道衬砌视为连续弹性体，则衬砌的本构方程和运动方程为[11]

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{l}ij}=\lambda_{\mathrm{l}}\boldsymbol{\delta}_{ij}e_{\mathrm{l}}+2\mu_{\mathrm{l}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{l}ij} \tag{6}$$

$$\mu_{\mathrm{l}}u_{\mathrm{l}i,jj}+(\lambda_{\mathrm{l}}+\mu_{\mathrm{l}})u_{\mathrm{l}j,ji}=\rho_{\mathrm{l}}\ddot{u}_{\mathrm{l}i} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{l}ij}$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{l}ij}$ 分别为衬砌的应力张量和应变张量；$u_{\mathrm{l}i}$ 为衬砌位移；$e_{\mathrm{l}}=u_{\mathrm{l}i,i}$ 为衬砌的体积应变；λ_{l}、μ_{l} 为衬砌的拉梅常数；ρ_{l} 为衬砌的密度。

分别取衬砌内径 r_0，介质拉梅常数 λ_{s} 和孔隙水密度 ρ_{f} 为特征尺度，引入以下无量纲变量：

$$\left.\begin{aligned}
&\eta^*=\eta/(r_0\sqrt{\lambda\rho_{\mathrm{f}}}),\ k^*=k/r_0^2,\ \lambda_{\mathrm{s}}^*=\lambda_{\mathrm{s}}/\lambda_{\mathrm{s}}\\
&\lambda_{\mathrm{l}}^*=\lambda_{\mathrm{l}}/\lambda_{\mathrm{s}},\ \mu_{\mathrm{s}}^*=\mu_{\mathrm{s}}/\lambda_{\mathrm{s}},\ \mu_{\mathrm{l}}^*=\mu_{\mathrm{l}}/\lambda_{\mathrm{s}},\ M^*=M/\lambda_{\mathrm{s}}\\
&F^*=F/(\lambda_{\mathrm{s}}r_0^2),\ \rho_{\mathrm{b}}^*=\rho_{\mathrm{b}}/\rho_{\mathrm{f}},\ \rho_{\mathrm{s}}^*=\rho_{\mathrm{s}}/\rho_{\mathrm{f}}\\
&\rho_{\mathrm{f}}^*=\rho_{\mathrm{f}}/\rho_{\mathrm{f}},\ \rho_{\mathrm{l}}^*=\rho_{\mathrm{l}}/\rho_{\mathrm{f}},\ t^*=t\sqrt{\lambda_{\mathrm{s}}/\rho_{\mathrm{f}}}/r_0\\
&\omega^*=\omega r_0\sqrt{\rho_{\mathrm{f}}/\lambda_{\mathrm{s}}},\ v^*=v\sqrt{\rho_{\mathrm{b}}/\lambda_{\mathrm{s}}},\ X^*=X/r_0
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中：X 表示与衬砌内径 r_0 有相同量纲的变量，如衬砌外径 R_0、介质位移 u_{si} 等。

通过以上无量纲变量对式（4）、（5）、（7）进行无量纲化，得到无量纲化运动方程。为简化表达方式，后续公式中的无量纲变量将省略上标“*”。

在求解式（2）～（7）时，需对相应的控制方程进行傅里叶变换，本文采用以下傅里叶变换对：

$$\tilde{f}(\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\Omega}\mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

$$f(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\Omega}\mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

式中：Ω 为时间或空间坐标变量；ζ 为频率或波数。

为求解式（2）～（7），用 Helmholtz 势函数表示位移[20]，有

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{s}}=\mathrm{grad}\phi_1^{\mathrm{s}}+\mathrm{rot}(\psi_1^{\mathrm{s}}\boldsymbol{k})+\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\chi_1^{\mathrm{s}}\boldsymbol{k})] \tag{11}$$

$$\boldsymbol{W}=\mathrm{grad}\phi_1^{\mathrm{f}}+\mathrm{rot}(\psi_1^{\mathrm{f}}\boldsymbol{k})+\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\chi_1^{\mathrm{f}}\boldsymbol{k})] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{l}}=\mathrm{grad}\phi_1^{\mathrm{l}}+\mathrm{rot}(\psi_1^{\mathrm{l}}\boldsymbol{k})+\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\chi_1^{\mathrm{l}}\boldsymbol{k})] \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{U}^{\mathrm{s}}=(u_1^{\mathrm{s}},\ u_2^{\mathrm{s}},\ u_3^{\mathrm{s}})$；$\boldsymbol{W}=(w_1,\ w_2,\ w_3)$；$\boldsymbol{U}^{\mathrm{l}}=(u_1^{\mathrm{l}},\ u_2^{\mathrm{l}},\ u_3^{\mathrm{l}})$；$u_i^{\mathrm{s}}$、$w_i$、$u_i^{\mathrm{l}}$($i$=1、2、3)分别表示介质、孔隙水和衬砌在 r_1、θ_1、z_1 3 个方向的位移；$\boldsymbol{k}$ 为 z_1 方向的单位向量；$\mathrm{grad}\phi_1^{\mathrm{s}}$ 为 ϕ_1^{s} 的梯度；$\mathrm{rot}(\chi_1^{\mathrm{f}}\boldsymbol{k})$ 为 $\chi_1^{\mathrm{f}}\boldsymbol{k}$ 的旋度；ϕ_1^{s}、ψ_1^{s}、χ_1^{s} 分别为介质骨架的势函数；ϕ_1^{l}、ψ_1^{l}、χ_1^{l} 分别为衬砌的势函数；ϕ_1^{f}、ψ_1^{f}、χ_1^{f} 分别为孔隙水的势函数。参考文献[4]中的相关处理方法，式（11）～（13）中势函数仅有 χ_1^{s}、χ_1^{f} 和 χ_1^{l} 3 项。

将式（11）～（13）代入式（4）、（5）、（7），并对各运动方程进行时域到频域以及空间域到波数域的傅里叶变换，可得

$$\frac{\partial^2\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}}}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}}}{\partial r_1}+(k_{\mathrm{ts}}^2-\xi^2)\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{l}}}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{l}}}{\partial r_1}+(k_{\mathrm{tl}}^2-\xi^2)\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{l}}=0 \tag{15}$$

$$\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{f}}=\beta_2\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}} \tag{16}$$

式中：ξ 为波数，上标“~”、“ ¯ ”分别表示时间 t 到角频率 ω 以及空间坐标 z_1 到波数 ξ 的傅里叶变换；$k_{\mathrm{ts}}=\omega\sqrt{(\rho_{\mathrm{b}}+\beta_2\rho_{\mathrm{f}})/\mu_{\mathrm{s}}}$；$\beta_2=-\rho_{\mathrm{f}}\omega^2/\beta_1$，$\beta_1=m\omega^2-\mathrm{i}(\eta/k)\omega$；$k_{\mathrm{tl}}=\omega\sqrt{\rho_{\mathrm{l}}/\mu_{\mathrm{l}}}$。考虑到无穷远处波动的衰减，令 $r_{\mathrm{ts}}^2=k_{\mathrm{ts}}^2-\xi^2$，$r_{\mathrm{tl}}^2=k_{\mathrm{tl}}^2-\xi^2$ 且满足 Im(r_{ts})<0，Im(r_{tl})<0，对于隧道衬砌内部的振动，考虑波动的一次透射和一次反射的影响，可得

$$\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}}=A(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1) \tag{17}$$

$$\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{l}}=B(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{tl}}r_1)+C(\omega,\xi)H_0^{(1)}(r_{\mathrm{tl}}r_1) \tag{18}$$

$$\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{f}}=\beta_2A(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1) \tag{19}$$

式中：$A(\omega,\xi)$、$B(\omega,\xi)$、$C(\omega,\xi)$ 为待定系数，通过初始条件和边界条件求得；$H_0^{(i)}(*)$(i=1, 2)为零阶第 i 类汉克尔函数。

为了利用自由表面边界条件求解未知系数，同时针对轴向激振力引起的介质波动特性，采用如图 2 所示的镜像原理，以自由表面为镜面对称出虚拟振源。对于镜像域，其对真实域中隧道衬砌的影响是通过多次透射和透射后的反射波来实现的，镜像域中虚拟振源的这种经过多次透射后的反射波对衬砌的影响已经很小，可忽略不计。因此，根据镜像原理，可得

$$\bar{\tilde{\chi}}_2^{\mathrm{s}}=A(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_2) \tag{20}$$

$$\bar{\tilde{\chi}}_2^{\mathrm{l}}=E(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{tl}}r_2) \tag{21}$$

$$\bar{\tilde{\chi}}_2^{\mathrm{f}}=\beta_2A(\omega,\xi)H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_2) \tag{22}$$

为简化推导，后续内容中 $A(\omega,\xi)$、$B(\omega,\xi)$、$C(\omega,\xi)$、$E(\omega,\xi)$ 分别用 A、B、C、E 表示。总波场为

$$\bar{\tilde{\chi}}^{\mathrm{s}}=\bar{\tilde{\chi}}_1^{\mathrm{s}}+\bar{\tilde{\chi}}_2^{\mathrm{s}}=AH_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1)+AH_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_2) \tag{23}$$

$$\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{l}}=\bar{\bar{\chi}}_1^{\mathrm{l}}+\bar{\bar{\chi}}_2^{\mathrm{l}}=BH_0^{(2)}(r_{\mathrm{tl}}r_1)+CH_0^{(1)}(r_{\mathrm{tl}}r_1)+EH_0^{(2)}(r_{\mathrm{tl}}r_2) \tag{24}$$

$$\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{f}}=\bar{\bar{\chi}}_1^{\mathrm{f}}+\bar{\bar{\chi}}_2^{\mathrm{f}}=\beta_2 AH_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1)+\beta_2 AH_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_2) \tag{25}$$

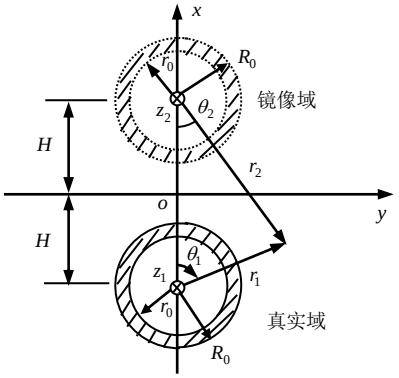


图 2 镜像原理

Fig.2 Mirror principium

利用 Graf 加法公式及贝塞尔函数的相关性质可得

$$H_0^{(2)}(Dr_2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n J_n(Dr_1)H_n^{(2)}(2HD)\cos(n\theta_1) \tag{26}$$

式中：$D=r_{\mathrm{ts}}$ 或 r_{tl}；$\varepsilon_n=\begin{cases}1 & ,\quad n=0\\ 2 & ,\quad n\neq 0\end{cases}$；$J_n$ 为贝塞尔函数。

将式（26）代入式（23）～（25）得

$$\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}=A[H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1)+\sum_{n=0}^{+\infty}H_n^{(2)}(2Hr_{\mathrm{ts}})\cos(n\theta_1)\varepsilon_n J_n(r_{\mathrm{ts}}r_1)] \tag{27}$$

$$\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{l}}=BH_0^{(2)}(r_{\mathrm{tl}}r_1)+CH_0^{(1)}(r_{\mathrm{tl}}r_1)+E\sum_{n=0}^{+\infty}H_n^{(2)}(2Hr_{\mathrm{tl}})\cos(n\theta_1)\varepsilon_n J_n(r_{\mathrm{tl}}r_1) \tag{28}$$

$$\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{f}}==\beta_2 A[H_0^{(2)}(r_{\mathrm{ts}}r_1)+\sum_{n=0}^{+\infty}H_n^{(2)}(2Hr_{\mathrm{ts}})\cos(n\theta_1)\varepsilon_n J_n(r_{\mathrm{ts}}r_1)] \tag{29}$$

由式（11）可知，柱坐标系下两相多孔介质的径向、环向以及轴向位移为

$$\left.\begin{aligned}u_r^{\mathrm{s}}&=\frac{\partial^2\chi^{\mathrm{s}}}{\partial r_1\partial z_1}\\ u_\theta^{\mathrm{s}}&=\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\chi^{\mathrm{s}}}{\partial\theta_1\partial z_1}\\ u_z^{\mathrm{s}}&=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\chi^{\mathrm{s}}}{\partial r_1}-\frac{\partial^2\chi^{\mathrm{s}}}{\partial r_1^2}-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2\chi^{\mathrm{s}}}{\partial\theta_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

对式（3）、（30）进行 t 到 ω，z 到 ξ 的双重傅里叶变换，得

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_r^{\mathrm{s}}&=\mathrm{i}\xi\frac{\partial\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}}{\partial r_1}\\ \bar{\bar{u}}_\theta^{\mathrm{s}}&=\mathrm{i}\xi\frac{1}{r_1}\frac{\partial\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}}{\partial\theta_1}\\ \bar{\bar{u}}_z^{\mathrm{s}}&=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}}{\partial r_1}-\frac{\partial^2\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}}{\partial r_1^2}-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2\bar{\bar{\chi}}^{\mathrm{s}}}{\partial\theta_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\bar{\bar{p}}=-\alpha M\bar{\bar{e}}_{\mathrm{s}}+M\bar{\bar{\vartheta}}=-M\bar{\bar{e}}_{\mathrm{s}}(\alpha+\beta_2) \tag{32}$$

式中：$\bar{\bar{e}}_{\mathrm{s}}=\frac{\partial\bar{\bar{u}}_r^{\mathrm{s}}}{\partial r_1}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial\bar{\bar{u}}_\theta^{\mathrm{s}}}{\partial\theta_1}+\frac{\bar{\bar{u}}_r^{\mathrm{s}}}{r_1}+\mathrm{i}\xi\bar{\bar{u}}_z^{\mathrm{s}}$，经化简后得 $\bar{\bar{e}}_{\mathrm{s}}=0$，因此，隧道轴向激振作用对孔隙水压力的影响可忽略不计。

假定在隧道内部移动的轴向激励作用下，$r_1=R_0$ 处衬砌隧道与周围介质不发生径向和轴向的相对位移。参考文献[4，10–11]的处理方式，将轴向激励沿隧道衬砌内边界进行均匀化处理，同时考虑衬砌与介质交界处的位移连续条件可求得未知系数 A、B、C、E。

为得到时–空域内的动力响应，需要对频率–波数域内的动力响应进行双重傅里叶逆变换。假定频率–波数域内各动力响应中的变量形式为 $\bar{\bar{\Psi}}(r_1,\xi,\omega,\nu)$，则 $\bar{\bar{\Psi}}(r_1,\xi,\omega,\nu)$ 可表示为

$$\bar{\bar{\Psi}}(r_1,\xi,\omega,\nu)=\frac{-F}{r_0}\delta(\omega-\omega_0+\xi\nu)\bar{\bar{\Psi}}^*(r_1,\xi,\omega) \tag{33}$$

式中：$\bar{\bar{\Psi}}^*(r_1,\xi,\omega)$ 为各动力响应表达式中除去荷载幅值以及狄拉克 δ 函数项后的剩余项。

对式（33）进行波数 ξ 到坐标 z_1 的傅里叶逆变换得

$$\tilde{\Psi}(r_1,z_1,\omega,\nu)=\frac{-F}{2\pi\nu r_0}\tilde{\Psi}^*(r_1,-\frac{\omega-\omega_0}{\nu},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega z_1}{\nu}} \tag{34}$$

式（34）即为频域内各动力响应解答的一般形式，由此可得频域内的各动力响应数值，并对其进行离散快速傅里叶逆变换即可得到时–空域内的解答。

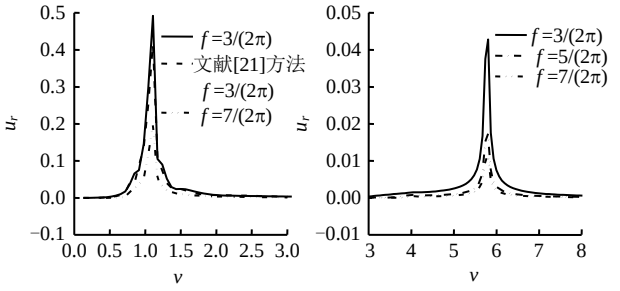
3 动力响应及参数分析

3.1 轴向激励移动速度对动力响应的影响

介质的无量纲参数：$\lambda_{\mathrm{s}}=1$，$\mu_{\mathrm{s}}=1$，$\rho_{\mathrm{f}}=1$，$\rho_{\mathrm{s}}=2$，$\alpha=0.95$，$\eta=5.774\times10^{-10}$，$k=1.0\times10^{-13}$，$n_{\mathrm{e}}=0.3$，$a_\infty=2$，$M=1.67$，衬砌内径 $r_0=1$，外径 $R_0=1.15$，密度 $\rho_1=2.4$，为避免出现奇点，衬砌剪切模量取复数形式 $\mu_1=\mu_{10}(1+\mathrm{i}\eta_0)$，取 μ_{10}=40，η_0=0.01，H=10，$\theta=\pi/6$，$z_1=50$，$v_0=\sqrt{\lambda/\rho_{\mathrm{b}}}$。无量纲激振力幅值 F=1，不考虑激振力的激振频率，计算 $r_1=1.5r_0$ 处两相介质的动力响应。图 3～5 分别

为频域内速度对质点径向、环向、轴向振动位移的影响。图 3(a)、4(a)、5(a)为无衬砌隧道的动力响应，对比了无量纲频率 $f=3/(2\pi)$时，本文方法计算结果和最小二乘法[21]的计算结果；图 3(b)、4(b)、5(b)为衬砌隧道的动力响应，横坐标为无量纲速度。

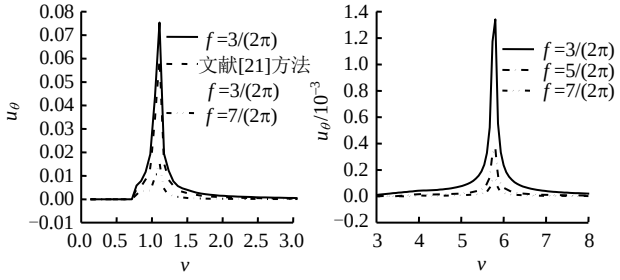
由图 3～5 可以看出：本文方法计算结果与最小二乘法计算结果能够较好地吻合；频域内动力响应幅值由低频向高频逐渐减小；相同频段内，衬砌隧道的动力响应明显小于无衬砌隧道的动力响应；对于不同频率下的动力响应，当速度达到一定值时，动力响应的振幅达到最大，将这一对应动力响应最大振幅的移动速度定义为介质的临界速度，用v_{cr}表示。



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

图 3　频域内速度 v 对质点径向振动位移 u_r 的影响

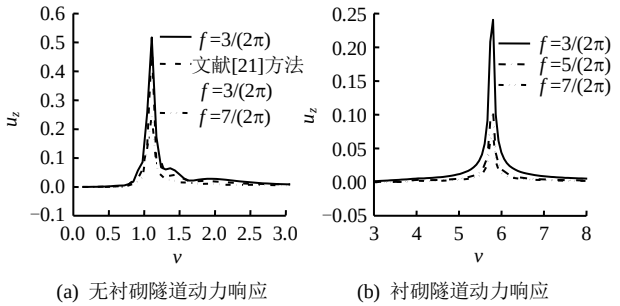
Fig.3　Influence of velocity on the radial vibration displacement of a particle in the frequency domain



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

图 4　频域内速度 v 对质点环向振动位移 u_θ 的影响

Fig.4　Influence of velocity on the circumferencial vibration displacement of a particle in frequency domain



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

图 5　频域内速度 v 对质点轴向振动位移 u_z 的影响

Fig.5　Influence of velocity on the axial vibration displacement of a particle in frequency domain

3.2　两相介质临界速度的确定及影响因素分析

3.2.1　确定无衬砌隧道的临界速度

首先研究两相介质中无衬砌隧道的临界速度，介质的基本参数同 3.1 节。

图 6 是利用 origin 软件拟合得到的无衬砌隧道在轴向移动常激励（不考虑激振频率）作用下，两相多孔介质临界速度随介质拉梅常数的变化曲线，得到以下经验公式：

$$v_{cr}=a(\mu_s/\lambda_s)^b v_0 \tag{35}$$

式中：v_{cr}为临界速度；$a=1.086$；$b=0.498\approx 0.5$；$v_0=\sqrt{\lambda_s/\rho_b}$。化简后得

$$v_{cr}=1.1\sqrt{\mu_s/\rho_b} \tag{36}$$

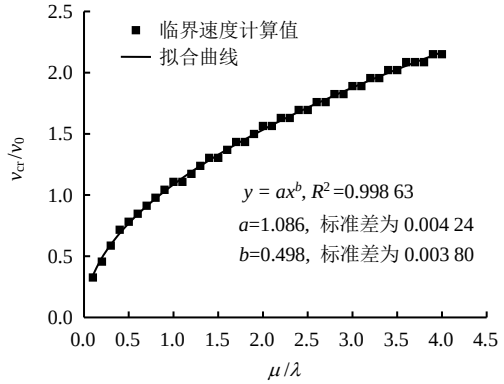


图 6　无衬砌隧道两相介质剪切模量对临界速度的影响

Fig.6　Influence of shear modulus of saturated medium on critical velocity in tunnel without lining

由式（36）及图 3～5 可以看出，无衬砌隧道在移动轴向常激励作用下，临界速度仅与介质的剪切模量和密度有关，且接近介质剪切波速的 1.1 倍。

3.2.2　衬砌剪切模量及密度对临界速度的影响

图 7 为衬砌隧道中衬砌的剪切模量和密度对临界速度的影响，介质和衬砌的其他各项参数同 3.1

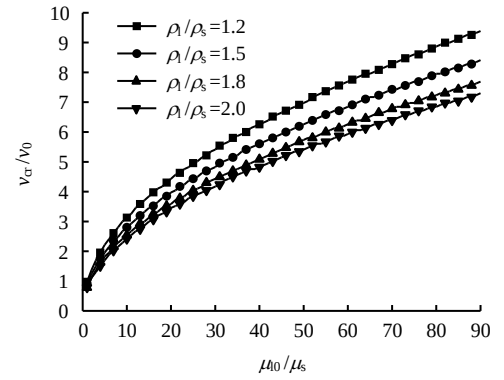


图 7　衬砌剪切模量和密度对两相介质临界速度的影响

Fig.7　Influence of shear modulus and density of the lining on critical velocity of saturated medium

节。由图可以看出：衬砌的剪切模量和密度对介质的临界速度有明显的影响。衬砌密度一定时，介质的临界速度随着衬砌剪切模量的增大而增大；衬砌剪切模量一定时，介质的临界速度随着其密度的增大而减小。

3.2.3 衬砌隧道轴向激振力振动频率对临界速度的影响

介质的无量纲参数及衬砌的相关系数同3.1节，衬砌剪切模量 $\mu_1=\mu_{10}(1+\mathrm{i}\eta_0)$，取 μ_{10}=40，η_0=0.05，轴向激振力的振动频率 $f_0=\omega_0/(2\pi)$，ω_0 分别取 2、5、8、11、14、17。图 8～10 是无量纲频率为 $5/\pi$ 时，$r_1=1.5r_0$ 处两相介质的动力响应。

由图 8～10 可以看出：激振力的振动频率 f_0 对动力响应以及介质的临界速度有较大的影响，振动频率和响应频率越接近，介质的临界速度越小，动力响应的振幅越大。

3.3 衬砌剪切模量对动力响应的影响

介质的无量纲参数及衬砌的相关系数同3.1节，衬砌剪切模量 $\mu_1=\mu_{10}(1+\mathrm{i}\eta_0)$，$\mu_{10}/\mu_s$ 分别取 40、60、80、100、120、140，η_0 取 0.05，激振力移动速度取 $0.65v_0$，不考虑激振力振动频率的影响。

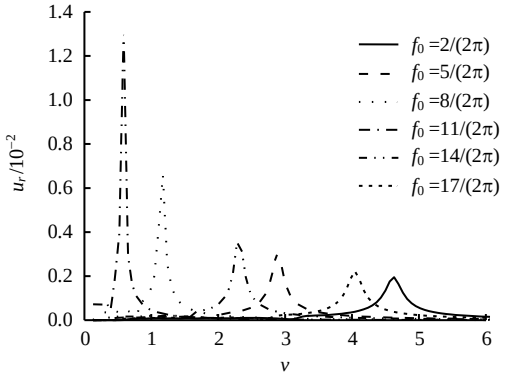


图 8 激振力振动频率对质点径向位移及临界速度的影响
Fig.8 Influence of vibration frequency of exciting force on radial displacement and critical velocity

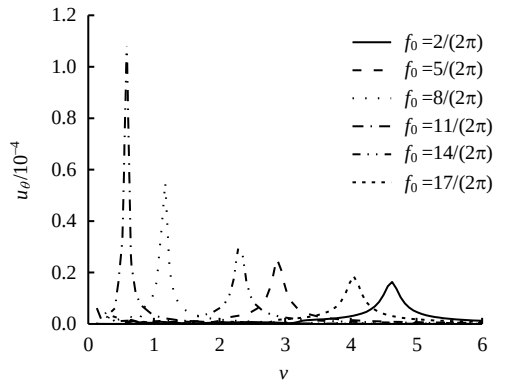


图 9 激振力振动频率对质点环向位移及临界速度的影响
Fig.9 Influence of vibration frequency of exciting force on circumferential displacement and critical velocity

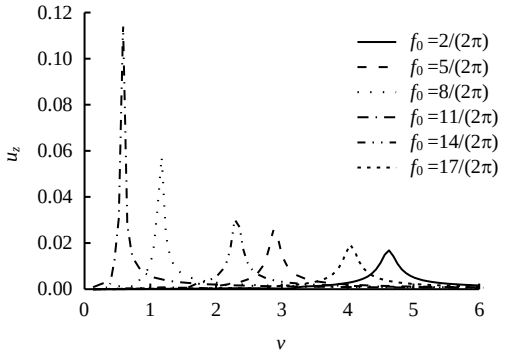


图 10 激振力振动频率对质点轴向位移及临界速度的影响
Fig.10 Influence of vibration frequency of exciting force on axial displacement and critical velocity

由图 11～13 可以看出：轴向激振力移动速度一定时，各动力响应幅值随衬砌剪切模量与介质剪切模量比值的增大而减小，但达到最大振幅的时间没有变化。

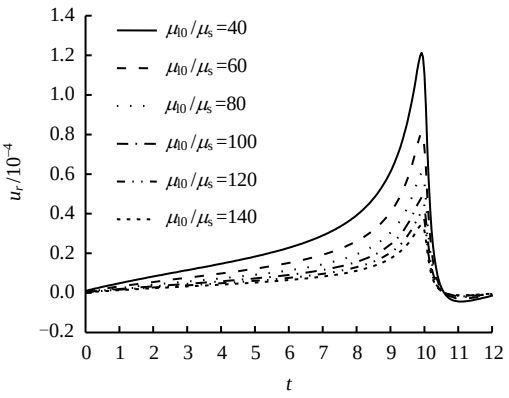


图 11 衬砌剪切模量对质点径向位移的影响
Fig.11 Influence of lining shear modulus on radial displacement of a particle

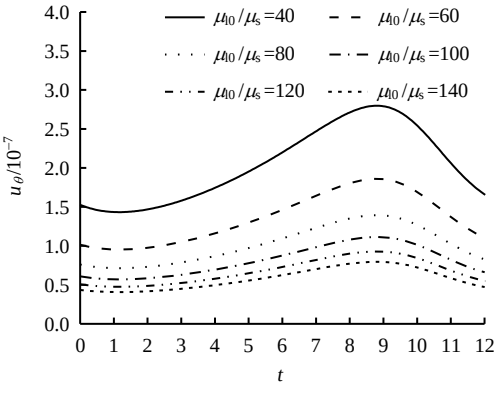


图 12 衬砌剪切模量对质点环向位移的影响
Fig.12 Influence of lining shear modulus on circumferential displacement of a particle

3.4 孔隙率对动力响应的影响

图 14～16 分别为移动的隧道轴向激励作用下，

$r_1=6r_0$ 处单相介质和不同孔隙率的两相介质的径向位移、环向位移以及轴向位移的变化曲线。介质的无量纲剪切模量取 1.0，无量纲隧道埋深取 10，两相介质的孔隙率分别取 0.2、0.3 和 0.48。当两相介质的参数 α、M、n_e、a_∞、η/k 等取值趋于 0 时，可将两相介质退化为单相介质，轴向激励的移动速度取 $0.65v_0$，其中 v_0 取 $n_e=0.3$ 时的速度，衬砌剪切模量取复数形式 $\mu_l=\mu_{l0}(1+\mathrm{i}\eta_0)$，$\mu_{l0}$ 取 40，η_0 取 0.05，其他基本参数同 3.1 节。

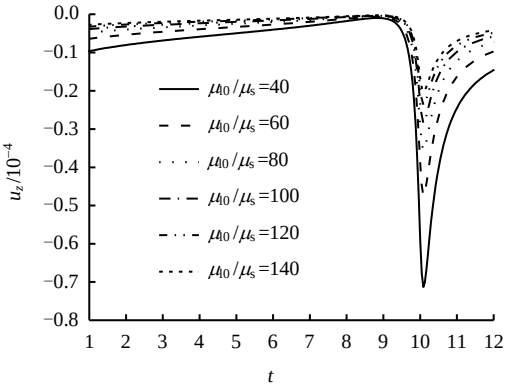
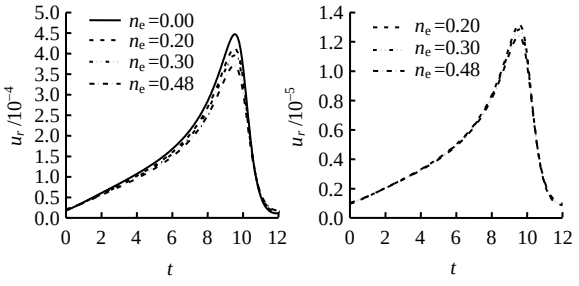
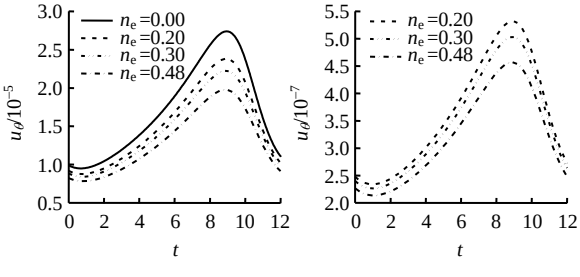


图 13　衬砌剪切模量对质点轴向位移的影响
Fig.13　Influence of lining shear modulus on axial displacement of a particle



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

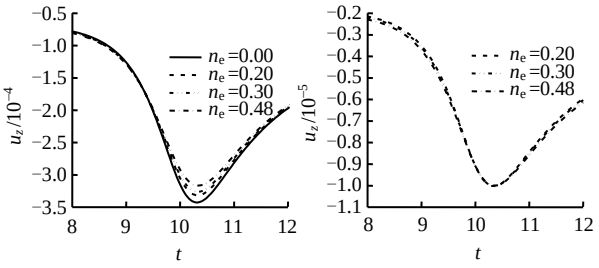
图 14　孔隙率对质点径向位移的影响
Fig.14　Influence of porosity on radial displacement of a particle



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

图 15　孔隙率对质点环向位移的影响
Fig.15　Influence of porosity on circumferential displacement of a particle

由图 14～16 可以看出：单相介质的动力响应幅值最大；对于无衬砌隧道，随着介质孔隙率的增大，动力响应幅值逐渐减小；衬砌隧道各动力响应幅值明显小于无衬砌隧道的动力响应幅值；对于衬砌隧道，一点的径向振动位移幅值和环向振动位移幅值随着介质孔隙率的增大逐渐减小，但减小幅度小于无衬砌隧道动力响应的减小幅度，孔隙率对轴向振动位移幅值的影响很小。



(a) 无衬砌隧道动力响应　　(b) 衬砌隧道动力响应

图 16　孔隙率对质点轴向位移的影响
Fig.16　Influence of porosity on axial displacement of a particle

4　结　论

（1）移动轴向激励作用下两相多孔介质存在临界速度，当激励的移动速度达到临界速度时，介质的动力响应幅值最大；对于无衬砌隧道在常激励（不考虑激振频率）作用下，临界速度只与介质的剪切模量和密度有关，且接近介质剪切波速的 1.1 倍。

（2）对于衬砌隧道，介质的临界速度随着衬砌剪切模量的增大而增大，随着衬砌密度的增大而减小；隧道衬砌对波动向介质中的传播有一定的削弱作用，衬砌剪切模量与介质剪切模量相差越大，削弱越明显。

（3）激振频率对不同频段的动力响应有较大的影响，动力响应频率越接近激振频率，其幅值越大，所对应的临界速度越小；对于无衬砌隧道，动力响应幅值随着介质孔隙率的增加而减小，单相介质的动力响应幅值最大；对于衬砌隧道，孔隙率对轴向振动位移影响较小。

参 考 文 献

[1]　翟婉明. 车辆–轨道耦合动力学研究的新进展[J]. 中国铁道科学, 2002, 23(2): 1－14.
ZHAI Wan-ming. New advance in vehicle-track coupling dynamics[J]. **China Railway Science**, 2002, 23(2): 1－14.

[2] 刘鹏辉, 杨宜谦, 尹京. 地铁隧道内不同轨道结构振动测试与分析[J]. 振动与冲击, 2014, 33(2): 31－36.
LIU Peng-hui, YANG Yi-qian, YIN Jing. Test and analysis on vibration of different track structures in tunnel[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2014, 33(2): 31－36.

[3] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 294(4): 678－705.

[4] 张谦, 陈文化. 地铁列车出、进站加、减速的轴向激励引起出平面振动[J]. 振动与冲击, 2016, 35(24): 96－101.
ZHANG Qian, CHEN Wen-hua. Out-of-plane vibration induced by axial excitation while a metro train arriving at or leaving a station[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2016, 35(24): 96－101.

[5] 张谦, 陈文化. 地铁列车进站引起场地柱面纵向振动[J]. 振动工程学报, 2017, 30(3): 442－448.
ZHANG Qian, CHEN Wen-hua. Cylindrical longitudinal vibration while metro train arriving at station[J]. **Journal of Vibration Engineering**, 2017, 30(3): 442－448.

[6] 谢伟平, 孙洪刚. 地铁运行时引起的土的波动分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(7): 1180－1184.
XIE Wei-ping, SUN Hong-gang. Fem analysis on wave propagation in soils induced by high speed train loads[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(7): 1180－1184.

[7] 张楠, 夏禾, 程潜. 制动力作用下车辆-车站结构耦合系统分析[J]. 振动与冲击, 2011, 30(2): 138－143.
ZHANG Nan, XIA He, CHENG Qian. Analysis method for a vehicle structure coupled system under braking force[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2011, 30(2): 138－143.

[8] HUNG H H, YANG Y B. Analysis of ground vibrations due to underground trains by 2.5D finite/infinite element approach[J]. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, 2010, 9(3): 327－335.

[9] HUNG H H, CHEN G H, YANG Y B. Effect of railway roughness on soil vibrations due to moving trains by 2.5D finite/infinite element approach[J]. **Engineering Structures**, 2013, 57: 254－266.

[10] LU J F, JENG D S. Dynamic response of a circular tunnel embedded in a saturated poroelastic medium due to a moving load[J]. **Journal of Vibration and Acoustics**, 2006, 128(6): 750－756.

[11] 黄晓吉, 扶名福, 徐斌. 移动环形荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧洞动力响应研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(3): 892－898.
HUANG Xiao-ji, FU Ming-fu, XU Bin. Dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil due to moving ring load[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(3): 892－898.

[12] 曾晨, 孙宏磊, 蔡袁强, 等. 简谐荷载作用下饱和土体中圆形衬砌隧道三维动力响应分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(4): 1147－1156.
ZENG Chen, SUN Hong-lei, CAI Yuan-qiang, et al. Analysis of three-dimensional dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil to harmonic loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(4): 1147－1156.

[13] YUAN Z H, XU C J, CAI Y Q, et al. Dynamic response of a tunnel buried in a saturated poroelastic soil layer to a moving point load[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2015, 77: 348－359.

[14] 袁宗浩, 蔡袁强, 袁万, 等. 地铁列车荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧道和轨道系统动力响应分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(4): 1003－1014.
YUAN Zong-hao, CAI Yuan-qiang, YUAN Wan, et al. Dynamic response of circular railway tunnel and track system in saturated soil under moving train loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(4): 1003－1014.

[15] SHENG X, JONES C J C, THOMPSON D J. Ground vibration generated by a harmonic load moving in a circular tunnel in a layered ground[J]. **Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control**, 2003, 22(2): 83－96.

[16] 包汉营, 陈文化, 张谦. 基于薄层法和移动坐标系法的地铁竖向振动在成层土层中传播[J]. 岩土力学, 2018, 39(9): 3277－3284.
BAO Han-ying, CHEN Wen-hua, ZHANG Qian. Propagation of vertical vibration of subway in layered soil based on thin layer method and moving coordinate system method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(9): 3277－3284.

下转第 3754 页